శ్రీ

అధ్యాయం -1
వాస్తవ సంఖ్యలు

భారత్వము (10 నుండి 11 మార్కులు)

పరిచయం :

1. p,q పూర్ణ సంఖ్యలయి వుండి, $q \neq o$ అయిన సందర్భంలో "$\frac{p}{q}$" రూపంలో వ్రాయగల సంఖ్యలను "అకరణీయసంఖ్యలు" అందురు.
2. అకరణీయసంఖ్యా రూపంలో వ్రాయలేనటువంటి సంఖ్యలను కరణీయ సంఖ్యలు అందురు.
3. అకరణీయ, కరణీయ సంఖ్యలు కలసి వున్న సమూహాన్ని వాస్తవ సంఖ్యలు అంటాము.
4. అంకగణిత ప్రాథమిక సిద్ధాంతము : ప్రతి సంయుక్త సంఖ్యను ప్రధాన సంఖ్యల కారణాంశాల లబ్ధంగా వ్యక్త పరచవచ్చు. మరియు ప్రధాన కారణాంకాల వరుసక్రమం ఏదైనప్పటికీ ఇది ఏకైకము.
5. గరిష్ఠ సామాన్య కారణాంకము (గ.సా.కా) : సంఖ్యల యొక్క సామాన్య కారణాంకాల కనిష్ఠ ఘాతాల లబ్ధం.
6. కనిష్ఠ సామాన్య గుణిజము (క.సా.గు) : సంఖ్యల యొక్క ప్రధాన కారణాంకాల గరిష్ఠ ఘాతాల లబ్ధం.
7. రెండు ధనపూర్ణ సంఖ్యల క.సా.గు, గ.సా.కాల లబ్ధం ఆ రెండు సంఖ్యల లబ్ధానికి సమానం.
8. n,m లు రుణేతర పూర్ణ సంఖ్యలు మరియు q యొక్క ప్రధాన కారణాంకాల లబ్ధం $2^n 5^m$ రూపం కల్గి వుంటే ఆ అకరణీయ సంఖ్య $x = \frac{p}{q}$ అయిన (p,q లు పరస్పర ప్రధాన సంఖ్యలు) x యొక్క దశాంశ రూపం ఒక అంతమయ్యే దశాంశమగును.
9. హారం q అనేది $2^n 5^m$ రూపంలో లేకుంటే ఆ అకరణీయ సంఖ్య $x = \frac{p}{q}$ అనేది అంతంకాని, ఆవర్తన దశాంత భిన్నమగును.
10. (i) a, x లు ధనపూర్ణ సంఖ్యలు మరియు $a \neq 1$ అయిన $x = a^n$ అయిన $\log_a^x = n$ అని నిర్వచిస్తాం.

    (ii) ఇచ్చిన సంఖ్యను పొందటానికి నిర్ణయించిన భూమికి ఇవ్వవలసిన ఘాతాన్ని సంవర్గమానం అంటాం.
11. సంవర్గమాన న్యాయాలు :

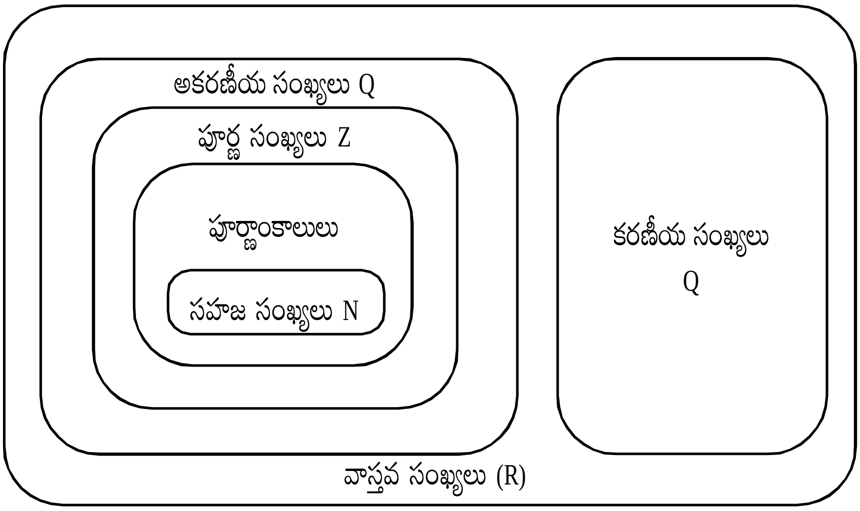
    (i) $\log_a^{xy} = \log_a^x + \log_a^y$

    (ii) $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a^x - \log_a^y$

    (iii) $\log_a^{x^m} = m \log_a^x$

    (vi) $\log_a^a = 1$

    (v) $\log_a^1 = 0$



$$N \subset W \subset Z \subset Q \subset R$$

$$R = QUQ^1$$

శ్రీ

స్వల్ప సమాధాన ప్రశ్నలు – (Short Answer Questions) : (S.A.Q.) **2 మార్కులు**

1. 220 మరియు 284 ల గ.సా.కా మరియు క.సా.గులను ప్రధాన కారణాంకాల లబ్ద పద్ధతిలో కనుగొనుము?
2. క్రింది అకరణీయ సంఖ్యలను భాగహారం చేయకుండానే దశాంశ రూపంలో వ్రాయండి?

   i) $\frac{13}{25}$ ii) $\frac{143}{110}$

3. విస్తరించి వ్రాయండి?

   i) $\log \frac{p^2q^3}{r}$ ii) $\log\sqrt{\frac{x^3}{y^2}}$ iii) $\log x^2y^3z^4$ iv) $\log\left(\frac{128}{625}\right)$

4. క్రింది వానిని log N రూపంలోనికి సూక్ష్మీకరించి N విలువను కనుగొనుము?

   i) $\log 2+\log 5$ ii) $\log 10+2\log 3-\log 2$ iii) 3 log 4 iv) 2 log3 - log 2

అతి స్వల్ప సమాధాన ప్రశ్నలు– (Very Short Answer Questions) : (V.S.A.Q.) **1 మార్కులు**

5. 156 యొక్క ప్రధాన కారణాంకాల లబ్ద రూపం తెల్పుము?
6. $\frac{3}{4}$ ను వాస్తవ సంఖ్యారేఖపై గుర్తించండి?
7. 0.375 యొక్క $\frac{p}{q}$ రూపము తెల్పుము?
8. $\log_3^9 = x$ ను ఘాతాంక రూపంలో వ్రాయుము?
9. క్రింది వాని సంవర్గమాన విలువలు కనుగొనుము?

   i) $\log_3^{243}$ ii) $\log_2^{\left(\frac{1}{16}\right)}$

వ్యాసరూప ప్రశ్నలు - (Essay Questions) : (E.Q) **4 మార్కులు**

10. $\sqrt{3}$ ను కరణీయ సంఖ్య అని "విరోధాభాసం" ద్వారా నిరూపించండి?
11. $5-\sqrt{3}$ ని ఒక కరణీయ సంఖ్య అని నిరూపించండి?
12. $3-2\sqrt{5}$ ను కరణి అని చూపండి?

బహుళైచ్ఛిక ప్రశ్నలు : **1/2 మార్కు**

13. $\frac{1}{2}$ మరియు 1 ల మధ్య గల ఒక అకరణీయ సంఖ్య ( )

    (a) $\frac{3}{4}$ (b) $\frac{4}{3}$ (c) $\frac{6}{5}$ (d) 0

14. $7.\overline{7}$ అనేది ( )

    (a) అకరణీయ సంఖ్య (b) కరణీయ సంఖ్య (c) రెండునూ (d) ఏదీకాదు

15. క్రింది వానిలో కరణీయసంఖ్య ( )

(a) $\frac{2}{3}$ (b) $\sqrt{\frac{16}{25}}$ (c) $\sqrt{8}$ (d) $\sqrt{0.04}$

16. 0.875 యొక్క $\frac{p}{q}$ రూపము ( )

(a) $\frac{7}{2^3}$ (b) $\frac{7}{16}$ (c) $\frac{3}{8}$ (d) $\frac{7}{2^2}$

17. $\log_{10} 0.01$ విలువ ( )

(a) 2 (b) 3 (c) -2 (d) -3

ఖాళీలు పూరించండి: **1/2 మార్కు**

18. $\frac{23}{2^3 x 5^2}$ యొక్క దశాంశరూపం ________________

19. $8^x = 2$ యొక్క సంవర్గమాన రూపం________________

20. $2^{10} = 1024$ యొక్క సంవర్గమాన రూపం________________

21. $\log 10000$ యొక్క విస్తరణ రూపం________________

22. $\log 16 - 2\log_2$ యొక్క సంక్షిప్త రూపం________________

23. $\log_{1000}^{1} =$ ________________

24. $\log\frac{343}{125}$ విస్తరణ రూపం ________________

25. $\log_2^{256} =$ ________________

జత చేయుము :

Group A		Group B
26. $\log x^m$	[ ]	a) 1
27. log mx	[ ]	b) 0
28. $\log_a^1$	[ ]	c) -1
29. $\log_a^a$	[ ]	d) -2
30. $\log_{10}^{0.1}$	[ ]	e) 2
		f) m log x
		g) log m + log x

సమాధానాలు (జవాబులు)

1. $220 = 2^2 \times 5 \times 11$ (1/2 Mark)

$284 = 2^2 \times 71$ (1/2 Mark)

గ.సా.కా = $2^2 = 4$ (1/2 Mark)

క.సా.గు = $2^2 \times 5 \times 11 \times 71 = 15,620$ (1/2 Mark)

2. (i) $\frac{13}{25} = \frac{13}{5^2}$ (1/2 Mark)

$= \frac{13 \times 2^2}{5^2 \times 2^2}$ (1/2 Mark)

$= \frac{52}{10^2}$ (1/2 Mark)

$= 0.52$

3. (i) $\log \frac{p^2 q^3}{r} = \log p^2 + \log q^3 - \log r$ (1 Mark)

$= 2\log p + 3\log q - \log r$ (1 Mark)

4. (i) $\log 2 + \log 5 = \log(2 \times 5)$ (1 Mark)

$= \log 10$

(ii) log 10 + 2 log3 - log 2

$= \log 10 + \log 3^2 - \log 2$ (1/2 Mark)

$= \log\left(\frac{10 \times 3^2}{2}\right)$ (1/2 Mark)

$= \log\left(\frac{\overset{5}{\cancel{10}} \times 9}{\cancel{2}}\right)$ (1/2 Mark)

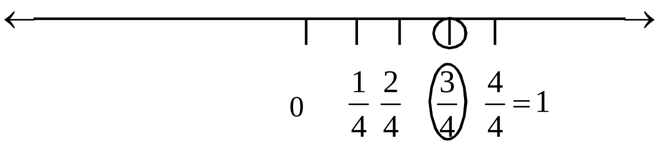
$= \log 45$ (1/2 Mark)

5. 156= 2 x 78

= 2 x 2 x 39

= 2 x 2 x 3 x 13 (1/2 Mark)

$= 2^2 \times 3^1 \times 13^1$ (1/2 Mark)

6. 

(1 Mark)

ప్రతి భాగాన్ని 4 సమాన భాగాలుగా విభజింపబడినవి.

7. $0.375=\frac{375}{10^3}$

$=\frac{3\times5^3}{2^3\times5^3}$ (1/2 Mark)

$=\frac{3}{2^3}$

$=\frac{3}{8}$ (1/2 Mark)

8. $\log_3^9 = x$

$9=3^x$ (1/2 Mark)

$\because \log_m^x = n \Rightarrow x = m^n$ (1/2 Mark)

9. (i) $\log_3^{243} = x$ అనుకో (1/2 Mark)

$243=3^x$

$3^5=3^x$

$\because 5=x$ (1/2 Mark)

$\therefore \log_3 243 = x = 5$

10. $\sqrt{3}$ ను అకరణీయ సంఖ్య అనుకో

$\sqrt{3}=\frac{r}{s}$ రూపంతో ఉంటుంది.

r,s లకు గల సామాన్య కారణాంకంచే వానిని భాగిస్తే

$\sqrt{3}=\frac{a}{b}$ ఇందులో a,b లు పరస్పర ప్రధాన సంఖ్యలు

$b\sqrt{3}=a$

$\therefore 3b^2 = a^2$

$\therefore a^2$ ను 3 భాగిస్తుంది.

$\therefore a$ ను కూడా 3 భాగిస్తుంది. $\rightarrow (1)$ (1 Mark)

$\therefore a = 3C$ అనుకో (C ఒక పూర్ణాంకం)

$\therefore 3b^2 = a^2$

$3b^2 = (3C)^2$

$3b^2 = 9C^2 \Rightarrow b^2 = 3C^2$

$\therefore b^2$ ను 3 భాగిస్తుంది.

b ను 3 భాగిస్తుంది. $\rightarrow (2)$ (1 Mark)

(1) (2)ల నుండి $\therefore a, b$ లకు 3 సామాన్య కారణాంకం అవుతుంది.

కానీ a, b లు పరస్పర ప్రధానాంశాలు. (1/2 Mark)

$\therefore$ మన ప్రతిపాదన అసత్యం (1/2 Mark)

$\therefore \sqrt{3}$ కరణీయ సంఖ్య అనుట సత్యం. (1/2 Mark)

11. $5-\sqrt{3}$ అనేది అకరణీయ సంఖ్య అనుకో (1/2 Mark)

$\therefore 5-\sqrt{3} = \frac{a}{b}$ రూపంలో వ్రాయవచ్చు (a, b లు పరస్పర ప్రధానాంశాలు) (1/2 Mark)

$\therefore 5-\frac{a}{b} = \sqrt{3}$ (1/2 Mark)

$\frac{a}{b}$ అకరణీయ సంఖ్య అయిన $5-\frac{a}{b}$ కూడా అకరణీయ సంఖ్యయే (1/2 Mark)

$5-\frac{a}{b} = \sqrt{3}$ కావున (1/2 Mark)

$\sqrt{3}$ కూడా అకరణీయ సంఖ్యయే అగును (1/2 Mark)

ఇది అసత్యం

కావున మన భావన అసత్యం (1/2 Mark)

$\therefore 5-\sqrt{3}$ అనేది కరణీయ సంఖ్య అవుతుంది. (1/2 Mark)

12. $3-2\sqrt{5}$ అకరణీయ సంఖ్య అనుకో (1/2 Mark)

$3-2\sqrt{5} = \frac{a}{b}$ రూపంలో వ్రాయవచ్చు (a, b లు పరస్పర ప్రధాన సంఖ్యలు) (1/2 Mark)

$3-\frac{a}{b} = 2\sqrt{5}$ (1/2 Mark)

$\frac{a}{b}$ అకరణీయ సంఖ్య అయిన $3-\frac{a}{b}$ కూడా అకరణీయ సంఖ్యయే (1/2 Mark)

$3-\frac{a}{b}=2\sqrt{5}$ కావున

$2\sqrt{5}$ కూడా అకరణీయ సంఖ్యయే అగును (1/2 Mark)

ఇది అసత్యం (1/2 Mark)

కావున మన భావన అసత్యం (1/2 Mark)

$\therefore 3-2\sqrt{5}$ అనేది కరణీయ సంఖ్య అవుతుంది. (1/2 Mark)

13) a 14) a 15) c 16) c 17) c

18. $\frac{23}{2^3\times 5^2}=\frac{23\times 5}{2^3\times 5^3}=\frac{115}{10^3}=\boxed{0.115}$

19. $8^x=2\Rightarrow \boxed{x=\log_8^2}$

20. $2^{10}=1024\Rightarrow \boxed{10=\log_2 1024}$

21. $\log 10000=\log 2^4\times 5^4$

$=\log 2^4+\log 5^4$

$=4\log 2+4\log 5$

$=\boxed{4(\log 2+\log 5)}$

22. $\log 16-2\log 2=\log 16-\log 2^2$

$=\log 16-\log 4$

$=\log\left(\frac{\overset{4}{\cancel{16}}}{\cancel{4}}\right)$

$=\boxed{\log 4}$

23. 0

24. $\log\frac{343}{125}=\log 343-\log 125$

$= \log 7^3 - \log 5^3$

$= 3\log 7 - 3\log 5$

$= 3\boxed{(\log 7 - \log 5)}$

25. $\log_2^{256} = \log_2^{2^8} = 8\log_2^2$

$= 8(1)$

$= 8$

26. f 27) g 28) b 29) a 30) c

శ్రీ

అధ్యాయం -2
సమితులు

భారత్వము (8 నుండి 10 మార్కులు)

పరిచయం :

1. సునిర్వచిత వస్తువుల సముదాయాన్ని "సమితి" అంటారు.
2. సమితిలోని వస్తువులను మూలకాలు అంటారు.
3. సమితులను రోస్టర్ రూపంలో వ్రాయవచ్చు. సమితిలోని మూలకాలన్నింటినీ రాసి కామాలతో వేరు చేసి ఫ్లవర్ బ్రాకెట్‌లో ఉంచాలి.
4. సమితిలోని మూలకాలను అవి పాటించే ధర్మాల ద్వారా వ్యక్తపరిస్తే ఏర్పడే రూపాన్ని సమితి నిర్మాణ రూపం అందురు.
5. ఒక సమితిలో మూలకాలు లేకుండా ఉంటే ఆ సమితిని పరిమిత సమితి అంటారు.
6. ఒక సమితిలోని మూలకాలు లెక్కించగలిగితే ఆ సమితిని పరిమిత సమితి అంటారు.
7. పరిమిత సమితి కానటువంటి సమితులను అపరిమిత సమితులు అందురు.
8. ఒక సమితిలో గల మూలకాల సంఖ్యను ఆ సమితి యొక్క "కార్డినల్ సంఖ్య" అంటారు.
9. విశ్వసమితిని "μ" తో సూచిస్తాము. విశ్వసమితిని సాధారణంగా దీర్ఘచతురస్రాలలో సూచిస్తాము.
10. సమితి A లోని ప్రతి మూలకం సమితి B లో ఉంటే A ను B యొక్క ఉపసమితి అందురు.
11. సమితి A లోని ప్రతి మూలకం సమితి B లో ఉండాలి మరియు సమితి B లోని ప్రతిమూలకం సమితి A లో ఉంటే A, B లను సమ సమితులు అందురు.
12. A,B సమితుల సమ్మేళనాన్ని $A\cup B$ అని వ్రాయవచ్చు.

    $A\cup B=\{x\in A \text{ లేక } x\in B\}$

13. A,B సమితుల ఛేదనాన్ని $A\cap B$ అని రాయవచ్చు.

    $A\cap B=\{x/x\in A \text{ మరియు } x\in B\}$

14. A,B సమితుల భేదాన్ని A-B లేదా B-A లచే సూచిస్తాము.

    $A-B=\{x/x\in A \text{ మరియు } x\notin B\}$

    $B-A=\{x/x\in B \text{ మరియు } x\notin A\}$

    $A-B\neq B-A$

స్వల్ప సమాధాన ప్రశ్నలు - (Short Answer Questions) : (S.A.Q.) **2 మార్కులు**

1. $A=\{1,2,5\}$, B=$\{2,3,4,5\}$ అయిన $A\cup B$ మరియు $A\cap B$ లను కనుగొనుము?
2. క్రింది వానిని జాబితారూపంలో రాయండి?

    $(i)\ A=\{x/x\in N, x<7\}$

    $(ii)\ B=\{x/x \text{ అనేది 'School' అనే పదంలోని అక్షరం }\}$

3. $A=\{x : x^2 = 25$ మరియు $6x = 15\}$ అనేద శూన్య సమితి అవునో కాదో చూడండి. మీ జవాబును సమర్ధించండి?

4. $A=\{1,3,5,7\}$, $B=\{1,2,3,4,6\}$ అయిన $B-A,\ A-B$ కనుగొనండి?

5. మీ దైనందిక జీవితం నుండి వియుక్త సమితులకు ఏవేని రెండు ఉదాహరణల్వండి?

6. క్రింది సమితులకు గల ఉపసమితులన్నింటి జాబితాను వ్రాయండి?

   $(i)\ \{x, y, z\}$ $(ii)\ \{a,b,c,d\}$

7. $A=\{1,2,3,4\}$, $B=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ అయిన $A\cup B,\ A\cap B$ కనుగొనండి? ఫలితం నుండి మీరు ఏమి గమనించారు?

8. $A=\{1,2,3,4,5\}$, $B=\{4,5,6,7\}$ అయిన $A-B$ మరియు $B-A$ కనుగొనండి $A-B,\ B-A$ లు రెండూ సమానమా?

అతి స్వల్ప సమాధాన ప్రశ్నలు– (Very Short Answer Questions) : (V.S.A.Q.) 1 మార్కులు

9. ఈ క్రింది వాటిని రోస్టర్ మరియు సమితి నిర్మాణ రూపంలో వ్రాయండి?

   (i) 42 ను భాగించగల అన్ని సహజ సంఖ్యల సమితి A.

   (ii)10 కంటే తక్కువైన సహజ సంఖ్యల సమితి B.

10. 6 కంటే తక్కువైన ప్రధాన సంఖ్యల సమితి A అనుకోండి మరియు 30కి ప్రధాన కారణాంకాలు గల సమితిని P అనుకోండి. A మరియు P సమానమా. సరి చూడండి?

11. $\{2,4,6,8,10\} \neq \{x : x = 2n+1$ మరియు $x \in N\}$ తగు కారణాలు పేర్కొనండి?

12. $A=\{1,2,3\}$ మరియు $B=\{3,4,5\}$ అయిన $A\cap B$ ని వెన్ చిత్రాలలో వివరించండి?

13. $n(A\cup B)$, కార్డినల్ సంఖ్య కనుగొనుటకు సూత్రం వ్రాయండి?

14. $A=\{0,2,4\}$, $A\cap\varnothing$ మరియు $A\cap A$ కనుగొనుము. వ్యాఖ్యానించండి?

వ్యాసరూప ప్రశ్నలు - (Essay Questions) : (E.Q) 4 మార్కులు

15. $A=\{x : x$ ఒక సరి సహజసంఖ్య $\}$

   $B=\{x : x$ ఒక బేసి సహజసంఖ్య $\}$

   $C=\{x : x$ ఒక ప్రధాన సంఖ్య $\}$

   $D=\{x : x$ ఒక 3 యొక్క గుణిజము $\}$ అయిన

   $(i)\ A\cup B$ $(ii)\ A\cap B$ $(iii)\ C-D$ $(iv)\ A\cap C$ లను కనుగొనుము?

16. $A=\{3,6,9,12,15,18,21\}$, $B=\{4,8,12,16,20\}$ అయిన

   $C=\{2,4,6,8,10,12,14,16\}$, $D=\{5,10,15,20\}$ క్రింది వానిని కనుగొనుము?

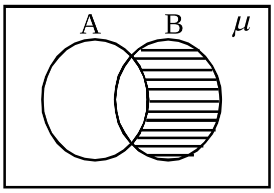
   $(i)\ A-B$ $(ii)\ D-B$ $(iii)\ A\cup C$ $(iv)\ B\cap D$

బహుళైచ్ఛిక ప్రశ్నలు : **1/2 మార్కు**

17. $A=\{x : x$ ఒక బాలుడు $\}$, $A=\{1,2,3\}$ ఒక బాలిక $\}$ అయిన ( )

a) $A \cup B = \phi$ b) $A \cap B = \phi$ c) $A - B = B$ d) $A - B = 0$

18. క్రింది పటంలో షేడ్ చేయబడిన ప్రాంతం సూచించునది ( )



a) $A - B$ b) $B - A$ c) $A \cup B$ d) $A \cap B$

19. $A=\{1,2,3\}$ అయిన దీనికి గల అన్ని ఉపసమితుల సంఖ్య ( )

a) 3 b) 8 c) 9 d) 6

20. $V=\{a,e,i,o,u\}$, $B=\{a,i,k,u\}$ అయిన $V-B$ ( )

a) $\{a,e,i,o,u\}$ b) $\{a,e,o,u\}$ c) $\{e,o\}$ d) $\{a,e,o\}$

21. క్రింది వానిలో సమసమితులు ( )

a) $A=\{1,0\}, B=\{a,b\}$ b) $A=\{a,o\}, B=\{b,o\}$

c) $A=\{3,6,9\}, B=\{6,3,9\}$ d) $A=\{1,3,5\}, B=\{3,5,7\}$

22. క్రింది వానిలో అపరిమిత సమితి ( )

a) ఒక సంవత్సరంలోని నెలల సమితి

b) $\{1,2,3,---,99,100\}$

c) 99 కంటే తక్కువగా గల ప్రధాన సంఖ్యల సమితి.

d) బేసి ప్రధాన సంఖ్యల సమితి.

23. A, B లు వియుక్త సమితులైన ( )

a) $A \cap B = \phi$ b) $A \cup B = \phi$ c) $A - B = \phi$ d) $B - A = \phi$

24. $A \cap \phi =$ ( )

a) ϕ b) A c) 0 d) 1

25. $A - B$ సమితి నిర్మాణ రూపం ( )

a) $\{x / x \in A$ మరియు $x \in B\}$

b) $\{x / x \in A$ లేక $x \in B\}$

c) $\{x / x \in A$ మరియు $x \notin B\}$

d) $\{x / x \in B$ మరియు $x \notin A\}$

ఖాళీలు పూరించండి: **1/2 మార్కు**

26. $C=\{x:x$ అనేది ఒక రెండంకెల సహజ సంఖ్య మరియు రెండంకెల మొత్తం $8\}$ దీని రోస్టర్ రూపం ________________

27. $B=\{5,25,125,625\}$ సమితి నిర్మాణ రూపం________________

28. $A=\{x:x$ అనేది 50 కంటే ఎక్కువ, 100 కంటే తక్కువ అయిన సహజ సంఖ్య$\}$ దీని రోస్టర్ రూపం________________

29. A,B లు వియుక్త సమితులు అయిన $A\cap B=$________________

30. సమితి వాదాన్ని అభివృద్ధి పరచిన శాస్త్రవేత్త ________________

31. ప్రతి సమితి దానికదే ________________ అవుతుంది.

32. శూన్య సమితి ప్రతి సమితికి ________________ అవుతుంది.

33. $'n'$ మూలకాలు గల సమితికి వ్రాయగల అన్ని ఉపసమితుల సంఖ్య ________________

34. $A-B=A$ మరియు $B-A=B$ అయిన A,B లను ________________ సమితులు అందరు.

35. $A\cap B$ సమితి నిర్మాణ రూపం ________________

జత చేయుము :

36. $\{x:x\in A$ లేక $x\in B\}$	[ ]	a) A-B
37. $\{x:x\in A$ మరియు $x\in B\}$	[ ]	b) $A\cup B$
38. $\{x:x\in A$ మరియు $x\notin B\}$	[ ]	c) B-A
39. $\{x:x\in B$ మరియు $x\notin A\}$	[ ]	d) $A\cap B$
40. $A\subset B$ మరియు $B\subset A$ అయిన	[ ]	e) $A\neq B$
		f) A=B

సమాధానాలు (జవాబులు)

1. $A=\{1,2,5\}$ $B=\{2,3,4,5\}$

$\therefore A\cup B=\{1,2,5\}\cup\{2,3,4,5\}$

$=\{1,2,3,4,5\}\rightarrow(1)$ (1 Mark)

$\therefore A\cap B=\{1,2,5\}\cap\{2,3,4,5\}$

$=\{2,5\}\rightarrow(2)$ (1 Mark)

2. $(i)\ A=\{x/x\in N, x<7\}$

$A=\{1,2,3,4,5,6\}$ జాబితారూపంలో (1 Mark)

(ii) $B=\{x/x$ అనేది 'School' అనే పదంలోని అక్షరం$\}$

జాబితారూపంలో $B=\{c,h,l,o,s\}$ (1 Mark)

3. $A=\{x:x^2=25$ మరియు $6x=15\}$

$x^2=25 \Rightarrow x=\sqrt{25}$

$x=+5\ or\ -5$

$\therefore$ సాధన సమితి $=\{-5,5\} \rightarrow (1)$ (1 Mark)

$$6x=15 \Rightarrow x=\frac{\cancel{15}^{\,5}}{\cancel{6}_{\,2}}$$

$$x=\frac{5}{2}$$

$\therefore$ సాధన సమితి $=\left\{\frac{5}{2}\right\} \rightarrow (2)$ (1 Mark)

(1) (2)ల ఉమ్మడి సాధన సమితి $=\{\ \}=\varphi$

$\therefore A$ అనేది శూన్య సమితి అవుతుంది. (1/2 Mark)

4. $A=\{1,3,5,7\}$, $B=\{1,2,3,4,6\}$

$B-A=\{1,2,3,4,6\}-\{1,3,5,7\}$

$=\{2,4,6\} \rightarrow (1)$ (1 Mark)

$A-B=\{1,3,5,7\}-\{1,2,3,4,6\}$

$=\{5,7\} \rightarrow (2)$ (1 Mark)

5. 1) మా పాఠశాలలోని విద్యార్థుల సమితి, మా పాఠశాలలో పని చేయుచున్న ఉపాధ్యాయుల సమితి (1 Mark)

2) మా గ్రామములోని ఉద్యోగుల సమితి. మా గ్రామములోని నిరుద్యోగుల సమితి (1 Mark)

6. (i) $\{x,y,z\}$

ఉపసమితుల సంఖ్య $=2^n=2^3=8$

ఉపసమితుల జాబితా $=\{x\},\{y\},\{z\},\{x,y\},\{x,z\}$

$=\{y,z\},\{x,y,z\},\varphi$ (2 Mark)

7. $A=\{1,2,3,4\}$ $B=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$

$A\cup B=\{1,2,3,4\}\cup\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$

$=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}\rightarrow(1)$ (1/2 Mark)

$=B$

$A\cap B=\{1,2,3,4\}\cap\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$

$=\{1,2,3,4\}\rightarrow(1)$ (1/2 Mark)

$=A$

$A\cup B=B$ అని గమనించితిని (1/2 Mark)

$A\cap B=A$ అని గమనించితిని (1/2 Mark)

8. $A=\{1,2,3,4,5\}$ $B=\{4,5,6,7\}$ (1/2 Mark)

$A-B=\{1,2,3,4,5\}-\{4,5,6,7\}=\{1,2,3\}$ (1/2 Mark)

$B-A=\{4,5,6,7\}-\{1,2,3,4,5\}=\{6,7\}$ (1/2 Mark)

$\therefore A-B\neq B-A$ (1/2 Mark)

9. (i) 42ను భాగించ గల అన్ని సహజ సంఖ్యల సమితి A

జాబితా రూపంలో $\therefore A=\{1,2,3,6,7,14,21,42\}$ (1/2 Mark)

సమితి నిర్మాణ రూపంలో $A=\{x/x$ అనేది 42ను భాగించగల సహజ సంఖ్య$\}$ (1/2 Mark)

10. 6 కంటే తక్కువైన ప్రధాన సంఖ్యల సమితి A

$\therefore A=\{2,3,5\}$

30కి ప్రధాన కారణాంకాలు గల సమితి P

$\therefore P=\{2,3,5\}$

$\therefore A=P$ (1 Mark)

11. $\{x : x=2n+1$ మరియు $x\in N\}$

$=\{1,3,5,7,9,---\}$

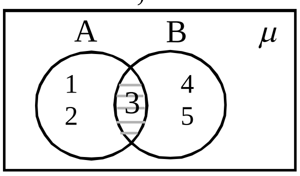
$\therefore$ ఇది బేసి సహజ సంఖ్యల అపరిమిత సమితి $\rightarrow(1)$

$\{2,4,6,8,10\}$ అనేది 10 వరకు గల సరిసహజ సంఖ్యల పరిమిత సమితి $\rightarrow(2)$

$\therefore\{2,4,6,8,10\}\neq\{x : x=2n+1$ మరియు $x\in N\}$

12. $A=\{1,2,3\}$, $B=\{3,4,5\}$

$A\cap B=\{1,2,3\}\cap\{3,4,5\}=\{3\}$



$A\cap B=$ = షేడ్ ప్రాంతం

$=\{3\}$

13. $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$ (1 Mark)

14. $A=\{0,2,4\}$

$A\cap\varphi=\{0,2,4\}\cap\{\ \}$

$=\{\ \}$

$=\varphi\rightarrow(1)$

$A\cap A=\{0,2,4\}\cap\{0,2,4\}$

$=\{0,2,4\}$

$=A\rightarrow(2)$

$\therefore A\cap\varphi=\varphi$ మరియు $A\cap A=A$ అని గమనించితిని.

15. $A=\{x:x$ ఒక సరి సహజసంఖ్య $\}=\{2,4,6,7,10,---\}$ (1/2 Mark)

$B=\{x:x$ ఒక బేసి సహజసంఖ్య $\}=\{1,3,5,7,9,---\}$ (1/2 Mark)

$C=\{x:x$ ఒక ప్రధాన సంఖ్య $\}=\{2,3,5,7,11,13,---\}$ (1/2 Mark)

$D=\{x:x$ ఒక 3 యొక్క గుణిజము $\}=\{3,6,9---\}$ (1/2 Mark)

$(i)\ A\cup B=\{2,4,6,8,10,---\}\cup\{1,3,5,7,9,--\}$

$\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10--\}$

$=N$ (సహజ సంఖ్యల సమితి) (1/2 Mark)

$(ii)\ A\cap B=\{2,4,6,8,10--\}\cap\{1,3,5,7,9,---\}$

$=\{\ \}$

$=\varphi$ (శూన్య సమితి) (1/2 Mark)

$(iii)\ C-D=\{2,3,5,7,11,13,--\}-\{3,6,9,--\}$

$=\{2,5,7,11,13,---\}$

$(iv)\ A\cap C=\{2,4,6,8,10,--\}\cap\{2,3,5,7,11,13,--\}$

$=\{2\}$ (1/2 Mark)

16. $A-B=\{3,6,9,12,15,18,21\}-\{4,8,12,16,20\}$

$=\{3,6,9,15,18,21\}$ (1 Mark)

$D-B=\{5,10,15,20\}-\{4,8,12,16,20\}$

$=\{5,10,15\}$ (1 Mark)

$A\cup C=\{3,6,9,12,15,18,21\}\cup\{2,4,6,8,10,12,14,16\}$

$=\{2,3,4,6,8,9,10,12,14,15,16,18,21\}$ (1 Mark)

$B\cap D=\{4,8,12,16,20\}\cap\{5,10,15,20\}$

$=\{20\}$ (1 Mark)

17) b 18) b 19) b 20) c 21) c

22) d 23) a 24) a 25) c

26. $\{17,26,35,44,53,62,71\}$

27. $\{x/x=5^n, n\in N, n<5\}$

28. $\{51,52,53,.........99\}$

29. φ (శూన్య సమితి)

30. జార్జి కాంటర్

31. ఉపసమితి

32. ఉపసమితి

33. 2^n

34. వియుక్త సమితులు

35. $A\cap B=\{x/x\in A$ మరియు $x\in B\}$

36) b 37) d 38) a 39) c 40) c

SSC STUDY MATERIAL
Mathematics Paper - I

Ch-3. బహుపదులు (Polynomials)

ముఖ్యమైన సమాచారము
(Important Formulae)

1) బహుపదులు : చర, స్థిర రాశులతో నిర్మితమైన బీజీయ సమాసాలే బహుపదులు. చర రాశులను కొన్ని స్థిరరాశులతో గుణించగా వచ్చు గుణకాలు మరియు వీటిని రుణేతర ధనపూర్ణ సంఖ్యల ఘాతాలకు హెచ్చించి వివిధ పరిమాణాలకు రాయబడతాయి.

ఉదా॥ $2x^2+5x, 3x^2-5x+6, -6y, x^2$ మొ॥ బహుపదులు

$\frac{1}{x^3}, \frac{1}{\sqrt{2y}}, \frac{1}{x-1}, \sqrt{2x^3}$ మొ॥ బహుపదులు కావు.

2) బహుపది పరిమాణము : x చరరాశిలో గల బహుపది P(x) లో x యొక్క గరిష్ఠ ఘాతాంకము P(x) బహుపది యొక్క పరిమాణము అగును.

వ.సంఖ్య	బహుపది	పరిమాణము	బహుపది పేరు
1.	$3x, \sqrt{3}\ y+5,$	1	రేఖీయ బహుపది
2.	x^2+5x+4 $2x^2-3x-\frac{1}{5}$	2	వర్గ బహుపది
3.	$3x^3-5x^2+3x+1$ $7x^3-5x+\frac{1}{5}$	3	ఘన బహుపది

3) బహుపది సాధారణ రూపము : $p(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+.........+a_{n-1}x+a_n$ అనేది n వ పరిమాణ బహుపది. ఇందులో $a_0, a_1, a_2, ..., a_{n-1}, a_n$ అనేవి చరరాశి వాస్తవ గుణకాలు మరియు $a_0 \neq o$.

4) బహుపది శూన్య విలువ : P(x) అనే బహుపదికి k ఒక వాస్తవ సంఖ్య మరియు P(k)=0 అయిన k ను P(x) బహుపది యొక్క శూన్యవిలువ అంటారు.

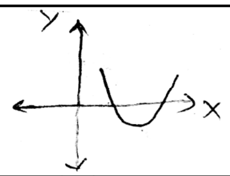
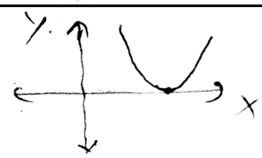
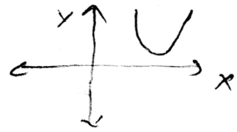
Note: 1) ax+b అనే రేఖీయ బహుపది యొక్క శూన్యవిలువ $=-\frac{b}{a}$ $ax+b, (a\neq o)$ అనే రేఖీయ బహుపదికి ఒకే ఒక శూన్య విలువ అంటే దాని రేఖాచిత్రము $y=ax+b,$ $x-$అక్షమును ఖండించే బిందువు $(-\frac{b}{a}, o)$ యొక్క $x-$నిరూపకము $=-\frac{b}{a}$ అగును.

2) $\therefore\ x^2-6x+9$ అనే వర్గ బహుపది యొక్క శూన్యాలు, ఈ వర్గ బహుపది సమీకరణం $y=ax^2+bx+c$ యొక్క రేఖా చిత్రము $x-$అక్షాన్ని ఖండించునప్పుడు ఏర్పడు బిందువుల $x-$నిరూపకాలు అగును.

3) ax^2+bx+c వర్గ బహుపది యొక్క శూన్య విలువలు α, β లయిన

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

ఇక్కడ విచక్షిణి $\Delta=b^2-4ac$ అగును.

వ.సంఖ్య	విచక్షిణి	మూలాల స్వభావం	శూన్య విలువల సంఖ్య	పటము
1.	$\Delta>0$	వాస్తవాలు మరియు విభిన్నాలు	2	
2.	$\Delta=0$	వాస్తవాలు మరియు సమానాలు	1	
3.	$\Delta<0$	సంకీర్ణాలు లేదా కల్పిత సంఖ్యలు	0	

6) వర్గ బహుపది యొక్క గరిష్ఠ శూన్యాల సంఖ్య=2

7) ఘన బహుపది యొక్క గరిష్ఠ శూన్యాల సంఖ్య=3

8) n వ పరిమాణం గల ఒక బహుపది p(x) యొక్క గరిష్ఠ శూన్యాల సంఖ్య = n

9) α మరియు β లు మూలాలుగా గల వర్గ బహుపది సాధారణ రూపం

$=k\left[x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\right]$ (k ఒక స్థిరరాశి)

10) ax^2+bx+c వర్గ బహుపది యొక్క శూన్యాలు α మరియు β లయిన

i) శూన్యాల మొత్తము $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=\frac{-(x \text{ యొక్క గుణకము })}{x^2 \text{ యొక్క గుణకము}}$

ii) శూన్యాల లబ్ధము $\alpha\,\beta=\frac{c}{a}=\frac{\text{స్థిర పదము}}{x^2 \text{ యొక్క గుణకము}}$

11) α,β,χ లు ఘన బహుపది ax^3+bx^2+cx+d యొక్క శూన్యాలు అయిన ఆ ఘన బహుపది సాధారణ రూపము $=x^3-x^2(\alpha+\beta+\chi)+x(\alpha\beta+\beta\chi+\chi\alpha)-\alpha\beta\chi$

i) శూన్యాల మొత్తము $\alpha+\beta+\chi=-\frac{b}{a}=\frac{-(x^2 \text{ గుణకము })}{x^3 \text{ గుణకము}}$

ii) శూన్యాల లబ్ధము $\alpha\,\beta\,\chi=-\frac{d}{a}=\frac{-(\text{ స్థిర పదము })}{x^3 \text{ గుణకము}}$

iii) $\alpha\,\beta+\beta\chi+\chi\alpha=\frac{c}{a}=\frac{x \text{ గుణకము}}{x^3 \text{ గుణకము}}$

12) p(x) అనే బహుపదిని మరొక శూన్యేతర బహుపది g(x) చే భాగిస్తే వచ్చే భాగఫలము q(x) మరియు శేషము r(x) అయిన p(x)=g(x). q(x)+r(x) అగును.

2 మార్కుల లెక్కలు :

1) $p(t)=t^3-1$ అయిన p(1), p(-1), p(0), p(2) మరియు p(-2) విలువలు కనుగొనండి.

జ: $p(t)=t^3-1$

$p(1)=(1)^3-1=1-1=0$

$p(-1)=(-1)^3-1=-1-1=-2$

$p(0)=(0)^3-1=0-1=-1$

$p(2)=(2)^3-1=8-1=7$

$p(-2)=(-2)^3-1=-8-1=-9$

2) ఒక వర్గ బహుపది యొక్క శూన్యాలు వరుసగా 2 మరియు $-\frac{1}{3}$ అయినచో ఆ బహుపదిని కనుగొనండి.

జ: α మరియు β లు శూన్యాలు కలిగిన వర్గ బహుపది $=ax^2+bx+c$ అనుకొనుము.

ఇక్కడ $\alpha=2, \beta=-\frac{1}{3}$

$\therefore$ శూన్యాల మొత్తం $\alpha+\beta=2+\left(-\frac{1}{3}\right)=2-\frac{1}{3}=\frac{5}{3}$

శూన్యాల లబ్ధం $\alpha\,\beta=2\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{-2}{3}$

$$ax^2+bx+c=k\left[x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\right]$$

$$=k\left[x^2-\frac{5}{3}x-\frac{2}{3}\right]$$

$$=k\left[\frac{3x^2-5x-2}{3}\right]$$

$k=3$ అయినచో వర్గ బహుపది $=3x^2-5x-2$ అగును.

3) x^3-3x^2+x+2 అను బహుపదిని g(x) అనే బహుపదిచే భాగిస్తే భాగఫలము x-2 మరియు శేషము -2x+4 అయిన g(x) ను కనుగొనండి.

జ: $p(x)=x^3-3x^2+x+2, q(x)=x-2, r(x)=-2x+4, g(x)=?$

భాగహార నియమం ప్రకారం

విభాజ్యం = విభాజకం×భాగఫలం+శేషం

$p(x)=g(x)\times q(x)+r(x)$

$x^3-3x^2+x+2=g(x)\times(x-2)+(-2x+4)$

$x^3-3x^2+x+2+2x-4=g(x)(x-2)$

$g(x)=(x^3-3x^2+3x-2)\div(x-2)$

$x-2)x^3-3x^2+3x-2(x^2-x+1$

x^3-2x^2

$-x^2+3x$

$-x^2+2x$

$x-2$

$x-2$

0

$\therefore g(x)=x^2-x+1$

4) $x^2+7x+10$ అనే వర్గ బహుపది యొక్క శూన్యాలను కనుగొని, శూన్యాలకు, బహుపది గుణకాలకు సంబంధాన్ని సరి చూడండి.

జ: $x^2+7x+10=x^2+2x+5x+10$

$=x(x+2)+5(x+2)$

$=(x+2)\,(x+5)$

$x^2+7x+10$ యొక్క విలువ శూన్యం కావాలంటే

$x+2=0$ లేదు $x+5=0$ కావలెను

$x=-2$ లేదు $x=-5$

శూన్యాల మొత్తము $=-2+(-5)=\dfrac{-7}{1}=\dfrac{-(x \text{ గుణకం})}{x^2 \text{ గుణకం}}$

శూన్యాల లబ్ధం $=(-2)\,(-5)=\dfrac{10}{1}=\dfrac{\text{స్థిర పదం}}{x^2 \text{ గుణకం}}$

5) $p(x)=5x^7-6x^5+7x-6$ అయిన క్రింది వానిని కనుగొనండి.

i) x^5 యొక్క గుణకం ii) $P(x)$ యొక్క పరిమాణం iii) స్థిర పదం

జ: $P(x)=5x^7-6x^5+7x-6$

i) x^5 యొక్క గుణకం=−6

ii) $P(x)$ యొక్క పరిమాణం=7

iii) స్థిర పదం=−6

1 మార్కు లెక్కలు :

1) $p(y)=y^2-1$ బహుపది యొక్క శూన్య విలువలు కనుగొనండి.

జ: $p(y)=0$ అనుకొనుము

$y^2-1=0$

$(y+1)(y-1)=0$

$y+1=0$ లేదా $y-1=0$

$y=-1$ లేదా $y=1$

$\therefore p(y)$ యొక్క శూన్య విలువు =−1 మరియు 1

2) kx^2-3x+1 అనే వర్గ బహుపది శూన్యముల మొత్తం 1 అయిన k విలువ ఎంత?

జ: ax^2+bx+c వర్గ బహుపది శూన్యముల మొత్తం $=\frac{-b}{a}$

kx^2-3x+1 వర్గ బహుపది శూన్యముల మొత్తం =1

$$\frac{-(-3)}{k}=1$$

$$\frac{3}{k}=1$$

$$k=3$$

3) ఏవైనా మూడు వర్గ బహుపదులను విభిన్న పదాలలో తెల్పండి.

జ: $3x^2-2x+5,\quad x^2-5,\ 6x^2+5x-2$

4) x^2-9 అనే బహుపదికి −3 మరియు 3 శూన్యాలు అవుతాయో కాదో సరిచూడండి.

జ: $p(x)=x^2-9$ అనుకొనుము

$p(-3)=(-3)^2-9=9-9=0$

$\therefore x^2-9$ కు −3 శూన్య విలువ అగును

$p(3)=3^2-9=9-9=0$

$\therefore x^2-9$ కు 3 శూన్య విలువ అగును

5) x^2-x^3 ఘన బహుపది యొక్క శూన్యాలను కనుగొనండి.

జ: $x^2-x^3=x^2(1-x)$

x^2-x^3 యొక్క శూన్యాలు కావాలంటే

$x^2(1-x)=0$ కావలెను

$x^2=0$ లేదా $1-x=0$

$x=0,\quad x=0,$ లేదా $x=1$

$\therefore x^2 - x^3$ ఘన బహుపది యొక్క శూన్యాలు =0,0,1 అగును.

6) $4x^3 + 8x^2 - 6x - 2$ యొక్క శూన్యాలు α, β, γ లు అయిన $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha$ విలువ ఎంత?

జ: $ax^3 + bx^2 + cx + d$ యొక్క శూన్యాలు α, β, γ లు అయిన

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{c}{a} = \frac{x \text{ యొక్క గుణకం}}{x^3 \text{ యొక్క గుణకం}}$$

ఇక్కడ $a = 4, b = 8, c = 6, d = -2$

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{c}{a} = \frac{-6}{4} = \frac{-3}{2}$$

4 మార్కుల లెక్కలు :

1) ఒక ఘన బహుపది $x^3 + 3x^2 - x - 3$ యొక్క శూన్యాలు 1,−1 మరియు −3 అగునని సరిచూడండి. ఇదే విధముగా బహుపది గుణకాలకు, శూన్యాలకు మధ్య గల సంబంధాన్ని సరిచూడండి.

జ: $p(x) = x^3 + 3x^2 - x - 3$

ఇక్కడ $a = 1, b = 3, c = -1, d = -3$

$$p(1) = (1)^3 + 3(1)^2 - 1 - 3$$
$$= 1 + 3 - 1 - 3$$
$$p(1) = 0$$
$$p(-1) = (-1)^3 + 3(-1)^2 - (-1) - 3$$
$$= -1 + 3 + 1 - 3$$
$$p(-1) = 0$$
$$p(-3) = (-3)^3 + 3(-3)^2 - (-3) - 3$$
$$= -27 + 27 + 3 - 3$$
$$p(-3) = 0$$

$\therefore 1, -1, -3$ లు $p(x)$ కు శూన్యాలు

శూన్యాల మొత్తము $\alpha + \beta + \gamma = 1 + (-1) + (-3) = \frac{-3}{1} = \frac{-b}{a} = \frac{-(x^2 \text{ గుణకం})}{x^3 \text{ గుణకం}}$

శూన్యాల లబ్దము $\alpha\beta\gamma = 1(-1)\,(-3)$

$$= \frac{3}{1} = \frac{-(-3)}{1} = \frac{-d}{a} = \frac{-\text{ స్థిర పదము}}{x^3 \text{ గుణకం}}$$

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 1(-1) + (-1)(-3) + (-3)(1)$$

$$= -1 + 3 - 3 = \frac{-1}{1} = \frac{c}{a} = \frac{x \text{ గుణకం}}{x^3 \text{ గుణకం}}$$

2) $3x^2 - x^3 - 3x + 5$ ను $x - 1 - x^2$ చే భాగించి, భాగహార నియమాన్ని సరిచూడండి.

జ: విభాజ్యం $= -x^3 + 3x^2 - 3x + 5$

విభాజకం $= -x^2 + x - 1$

$-x^2 + x - 1) -x^3 + 3x^2 - 3x + 5 (x - 2$

$-x^3 + x^2 - x$

(+) (−) (+)

$2x^2 - 2x + 5$

$-2x^2 - 2x + 2$

(+) (−) (−)

3

భాగఫలము= x-2

శేషము =3

భాగహార నియమం ప్రకారం

విభాజ్యం=విభాజకం × భాగఫలం + శేషము

$= (-x^2 + x - 1)(x - 2) + 3$

$= -x^3 + x^2 - x + 2x^2 - 2x + 2 + 3$

$= -x^3 + 3x^2 - 3x + 5$

= విభాజ్యం.

$\therefore$ భాగహార నియమం సరిచూడడమైనది.

3) $2x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 6x - 2$ అను బహుపదికి $\sqrt{2}$ మరియు $-\sqrt{2}$ రెండు శూన్యాలైన మిగిలిన అన్ని శూన్యాలను కనుగొనండి.

జ: $p(x) = 2x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 6x - 2$

$\sqrt{2}$ మరియు $-\sqrt{2}$ లు $p(x)$ కు రెండు శూన్యాలు కావున

$p(x)$ ను $(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}) = x^2 - 2$ చే భాగించవచ్చు.

$x^2 - 2) 2x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 6x - 2 (2x^2 - 3x + 1$

$2x^4 \quad -4x^2$

(−) (+)

$-3x^3 + x^2 + 6x$

$-3x^3 + 6x$

(−) (+)

$$x^2-2$$
$$x^2-2$$
$$\overline{\quad 0 \quad}$$

భాగఫలం = $2x^2-3x+1$

$=2x^2-2x-x+1$

$=2x(x-1)-1(x-1)$

$=(x-1)\,(2x-1)$

శూన్యాలు కనుగొనుటకు

$x-1=0$ లేదా $2x-1=0$ తీసుకోవలెను

$x=1$ లేదా $x=\frac{1}{2}$

$\therefore$ మిగిలిన రెండు శూన్యాలు= 1 మరియు $\frac{1}{2}$ అగును

$\therefore$ ఇచ్చిన బహుపది యొక్క శూన్యాలు $=\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 1$ మరియు $\frac{1}{2}$ అగును

5 మార్కుల లెక్కలు :

1) $p(x)=x^2-x-12$ బహుపదికి తగిన రేఖా చిత్రమును గీచి శూన్యాలను కనుగొనండి. ఫలితాలను సమర్థించండి.

జ: $p(x)=x^2-x-12$

$y=x^2-x-12$ అనుకొనుము

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	8	0	-6	-10	-12	-12	-10	-6	0	8
(x,y)	(-4,8)	(-3,0)	(-2,-6)	(-1,-10)	(0,-12)	(1,-12)	(2,-10)	(3,-6)	(4,0)	(5,8)

స్కేలు : $x-$అక్షంపై 1 సెం.మీ.=1 యూనిట్

$y-$అక్షంపై 1 సెం.మీ.=2 యూనిట్లు

$y=x^2-x-12$ యొక్క రేఖా చిత్రము $x-$ అక్షాన్ని $(-3,0)$ మరియు (4.0) బిందువుల వద్ద ఖండిస్తున్నది.

$\therefore x^2-x-12$ యొక్క శూన్యాలు = 4 మరియు −3

నిరూపణ :

$p(x)=x^2-x-12$

$=x^2-4x+3x-12$

$=x(x-4)+3(x-4)$

$=(x-4)\,(x+3)$

x^2-x-12 యొక్క శూన్యాలు కనుగొనుటకు

$x-4$ లేదా $x=-3$ కావలెను

$\therefore x=4$ లేదా $x=-3$

$\therefore x^2-x-12$ యొక్క శూన్యాలు= 4 మరియు −3

2) బహుపదికి తగిన రేఖా చిత్రమును గీచి శూన్యాలను కనుగొనండి. ఫలితాలను సమర్థించండి.

జ: $p(x)=x^2-6x+9$

$y=x^2-6x+9$ అనుకొనుము

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	36	25	16	9	4	1	0	1
(x,y)	(-3,36)	(-2,25)	(-1,16)	(0,9)	(1,4)	(2,1)	(3,0)	(4,1)

స్కేలు : $x-$అక్షంపై 1 సెం.మీ.=1 యూనిట్

$y-$అక్షంపై 1 సెం.మీ.=2 యూనిట్లు

$y=x^2-6x+9$ యొక్క రేఖా చిత్రము $x-$ అక్షాన్ని $(3,0)$ బిందువు వద్ద ఖండిస్తున్నది.

$\therefore x^2-6x+9$ బహుపది యొక్క శూన్యాలు = 3,3

నిరూపణ :

$$p(x)=x^2-6x+9$$
$$=x^2-3x-3x+9$$
$$=x(x-3)-3(x-3)$$
$$=(x-3)\,(x-3)$$

x^2-6x+9 యొక్క శూన్యాలు కనుగొనుటకు

$x-3=0$ లేదా $x-3=0$ కావలెను

$x=3$ లేదా $x=3$

$\therefore x^2-6x+9$ యొక్క శూన్యాలు= 3, 3

Part-B

I) బహుళైచ్ఛిక ప్రశ్నలు

1) $2x^2+3x+1$ ను $x+2$ చే భాగించగా వచ్చు శేషము ________________ ( )

a) -3 b) 3 c) 15 d) 12

2) $f(x)=x^3-2x^2+4x+k$ యొక్క ఒక శూన్య విలువ $x=1$ అయిన k విలువ ______ ( )

a) 9 b) 6 c) -3 d) 2

3) $f(x)=x^2-x-1$ యొక్క శూన్యాలు α మరియు β లయిన $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=$ ___________ ( )

a) 0 b) -1 c) 1 d) 2

4) x^3+4x^2+x-6 బహుపది యొక్క శూన్యాల లబ్ధము ___________ ( )

a) 4 b) -4 c) 1 d) 6

5) $y=x^2-3x-4$ యొక్క గ్రాఫుపై ఒక బిందువు ___________ ( )

a) (-1,0) b) (2,0) c) (3,0) d) (-2,-6)

6) క్రింది వాటిలో బహుపది కానిది ___________ ( )

a) $5x^2+7x-3$ b) $\frac{2}{x^{-2}}-\frac{7}{x^{-1}}+3$

c) $x^4-\sqrt{3}$ d) $x^{2/3}+6x-\frac{1}{2}$

7) $p(x)=ax+b$ యొక్క శూన్య విలువ ___________ ( )

a) $\frac{a}{b}$ b) $\frac{-b}{a}$ c) $-\frac{a}{b}$ d) $\frac{b}{a}$

8) $2x^3-5x^2-14x+8$ యొక్క శూన్యాల మొత్తము ___________ ( )

a) $\frac{5}{2}$ b) -7 c) 4 d) $\frac{2}{5}$

9) ఒక బహుపది యొక్క గ్రాఫు x- అక్షాన్ని ఖండించకపోతే ఆ బహుపది యొక్క శూన్యాల సంఖ్య ___________ ( )

a) 0 b) 1 c) 2 d) -3

10) $p(m)=m^2-3m+1$ అయితే $p(-1)$ విలువ___________ ( )

a) 4 b) -1 c) 5 d) 3

11) $y=ax+b$ యొక్క గ్రాఫు $x-$అక్షాన్ని ఖండించే బిందువు నిరూపకాలు___________ ( )

a) $(0,\frac{a}{b})$ b) $\left(\frac{-a}{b},o\right)$ c) $\left(\frac{-b}{a},o\right)$ d) $\left(o,\frac{-a}{b}\right)$

12) x^3-4x ఘన బహుపది యొక్క శూన్యాలు ________ ( )

a) 0,2,4 b) -2,0,2 c) 0,3,-2 d) 1,0,2

II) ఖాళీలను పూరింపుము.

1) $4u^2+8u$ వర్గ బహుపది యొక్క శూన్యాలు ____________

2) x^2-4x+3 బహుపది యొక్క ఒక శూన్య విలువ '1' అయిన మరొక శూన్య విలువ ____________

3) $x^3-5x^2-2x+24$ యొక్క శూన్యాలు α,β,γ లు అయిన $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$ విలువ ____________

4) $y=x^2-6x+8$ యొక్క గ్రాఫు $x-$అక్షాన్ని ఖండించే బిందువుల యొక్క $x-$నిరూపకాలు ____________

5) $x=-1$ వద్ద px^2+qx+r బహుపది యొక్క విలువ ____________

III) జత పరచుము.

A		B
1) ఘన బహుపది	( )	$a)\ 2x^4-\frac{2}{3}x^3+x-2$
2) వర్గ బహుపది	( )	$b)\ -\frac{2}{7}$
3) రేఖీయ బహుపది	( )	$c)\ \sqrt{2}x-3$
4) స్థిర బహుపది	( )	$d)\ 2x^3-3x+5$
5) చతుర్థాంక బహుపది	( )	$e)\ x^2-5x+6$
		$f)\ x^{3/2}-5x^2$
		$g)\ \sqrt{3x}-4$

సమాధానాలు (Answers)

I) 1) b 2) c 3)b 4) d
5) a 6) d 7) b 8) a
9) a 10) c 11) c 12) b

II) 1) 0,-2 2) 3 3) -2 4) 2,4
5) p-q+r

III) 1) d 2) e 3) c 4) b 5) a

Unit IV

రెండు రాశులలో రేఖీయ సమీకరణాల జత

Pair of Linear Equations in two variables

Prepared by : **L. Ravindranath Babu,** Headmaster, Z.P. High School, R.V. Palli, Peddiveedu (P), Veeraballi (M)

కీలకాంశాలు : **5 మార్కులు**

గ్రాఫ్ పద్ధతి ద్వారా రేఖీయ సమీకరణాల జతకు సాధన :

రెండు రేఖీయ సమీకరణాలు $a_1x + b_1y + c_1 = 0, a_2x + b_2y + c_2 = 0$. ఇందులో

i) $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ అయ్యే విధంగా నిష్పత్తులు వున్నట్లయితే రెండు రేఖలకు ఒకే ఒక ఉమ్మడి బిందువు ఉండును. ఈ రేఖీయ సమీకరణాల జతకు ఒకే ఒక సాధన ఉంటుంది. అందువల్ల ఈ రేఖీయ సమీకరణాలను సంగత రేఖీయ సమీకరణాలు అందురు.

ii) $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ అయ్యే విధంగా నిష్పత్తులు ఉన్నట్లయితే రెండు రేఖలకు ఉమ్మడి బిందువులు ఉండక రేఖలు సమాంతరంగా ఉంటాయి. ఇటువంటి రేఖీయ సమీకరణాలను 'అసంగత రేఖీయ సమీకరణాలు' అందురు. వీటికి సాధన ఉండదు.

iii) $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ అయ్యే విధంగా నిష్పత్తులు ఉన్నట్లయితే రెండు రేఖలకు అనంతమైన ఉమ్మడి బిందువులు ఉంటాయి. ఇవి ఏకీభవించే రేఖలుగా ఉంటాయి. ఇటువంటి రేఖీయ సమీకరణాలను 'పరస్పరాధారిత రేఖీయ సమీకరణాలు' అందురు. వీటికి అనంతమైన సాధనలు ఉంటాయి.

1) క్రింద ఇవ్వబడిన సమీకరణాల జతలు సంగత సమీకరణాలో, అసంగత సమీకరణాలో సరి చూచి వాటిని గ్రాఫ్ పద్ధతిలో సాధించుము.

జ : $2x + y - 6 = 0 \qquad 4x - 2y - 4 = 0$

$a_1 = 2, b_1 = 1, c_1 = -6 \qquad a_2 = 4, b_2 = -2, c_2 = -4 \qquad \frac{a_1}{a_2} = \frac{2}{4}, \frac{b_1}{b_2} = \frac{1}{-2}, \frac{c_1}{c_2} = \frac{-6}{-4}$

ఇక్కడ $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ కావున ఈ రేఖీయ సమీకరణాలు సంగత రేఖీయ సమీకరణాలు. వీటికి ఏకైక సాధన ఉంటుంది.

$2x + y - 6 = 0 \qquad 4x - 2y - 4 = 0$

$2x + y = 6 \qquad 2(2x - y - 2) = 0$

$y = 6 - 2x \qquad 2x - y = 2$

$y = 2x - 2$

$y = 6 - 2x \qquad\qquad y = 2x - 2$

$x = 0 \quad y = 6 - 2\times 0 = 6 \quad (0,6) \qquad x = 0 \quad y = 2\times 0 - 2 = -2 \quad (0,-2)$

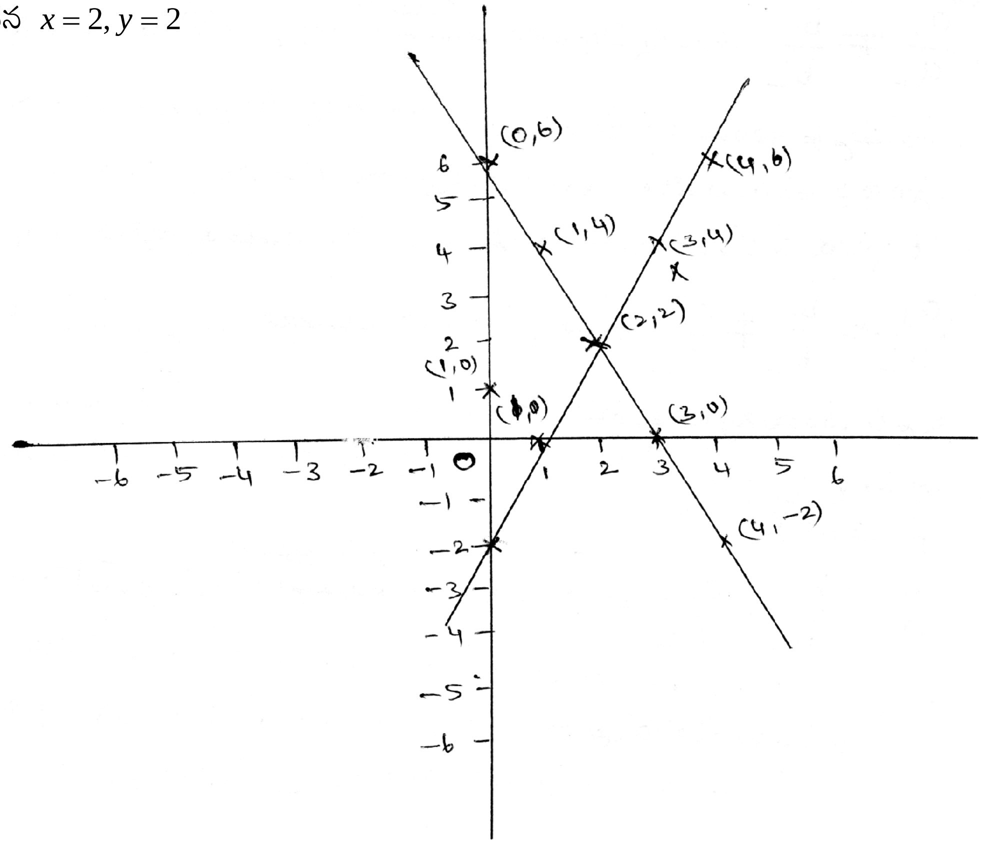
$x = 1 \quad y = 6 - 2\times 1 = 4 \quad (1,4) \qquad x = 1 \quad y = 2\times 1 - 2 = 0 \quad (1,0)$

$x = 2 \quad y = 6 - 2 \times 2 = 2 \quad (2,2)$ $\qquad$ $x = 2 \quad y = 2 \times 2 - 2 = 2 \quad (2,2)$

$x = 3 \quad y = 6 - 2 \times 3 = 0 \quad (3,0)$ $\qquad$ $x = 3 \quad y = 2 \times 3 - 2 = 4 \quad (3,4)$

$x = 4 \quad y = 6 - 2 \times 4 = -2 \quad (4,-2)$ $\qquad$ $x = 4 \quad y = 2 \times 4 - 2 = 6 \quad (4,6)$

$\therefore$ సాధన $x = 2, y = 2$



2) $2x - 3y = 8, 4x - 6y = 9$ సమీకరణాలు సరి చూచి గ్రాఫ్ పద్ధతిన సాధించండి.

జ: $\begin{matrix} 2x - 3y = 8 \\ 4x - 6y = 9 \end{matrix}$ $\qquad \dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}, \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{-3}{-6} = \dfrac{1}{2}, \dfrac{c_1}{c_2} = \dfrac{8}{9}$

$$\therefore \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$$

పై సమీకరణాలు అసంగత రేఖీయ సమీకరణాలు. వీటి రేఖలు సమాంతర రేఖలు. వీటికి సాధన లేదు.

$2x - 3y = 8$ $\qquad$ $4x - 6y = 9$

$3y = 2x - 8$ $\qquad$ $6y = 4x - 9$

$y = \dfrac{2x - 8}{3}$ $\qquad$ $y = \dfrac{4x - 9}{6}$

$x = 0, \quad y = \dfrac{2x0 - 8}{3} = \dfrac{-8}{3} = -2.6 (0,-2.6)$ $\qquad$ $x = 0, \quad y = \dfrac{4x0 - 9}{6} = \dfrac{-9}{6} = -1.5\ (0,-1.5)$

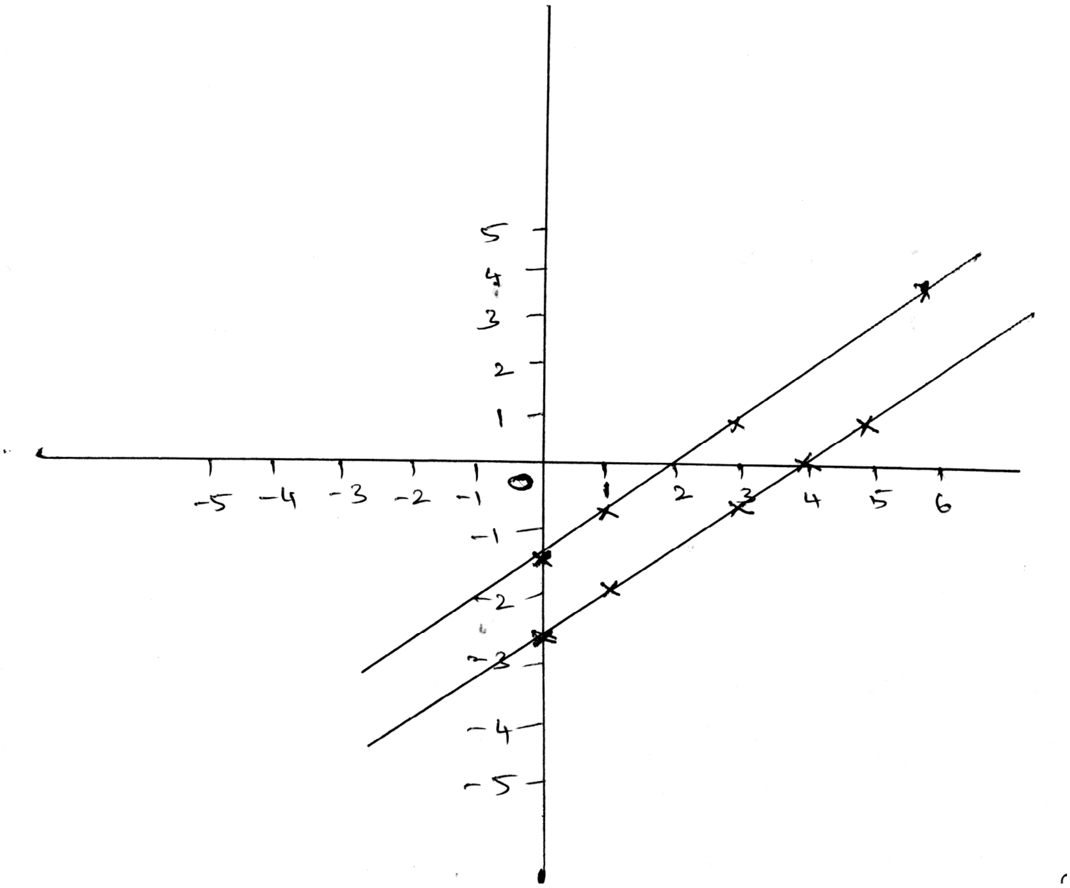
$x = 1, \quad y = \dfrac{2x1 - 8}{3} = \dfrac{-6}{3} = -2\ \ (1,-2)$ $\qquad$ $x = 1, \quad y = \dfrac{4x1 - 9}{6} = \dfrac{-5}{6} = -0.8\ \ (1,-0.8)$

$x = 3, \quad y = \frac{2x3-8}{3} = \frac{-2}{3} = -0.6 \ (3, -0.6)$ $\quad$ $x = 3, \quad y = \frac{4x3-9}{6} = \frac{-3}{6} = 0.5 \ (3, 0.5)$

$x = 4, \quad y = \frac{2x4-8}{3} = \frac{0}{3} = 0 \ (4, 0)$ $\quad$ $x = 6, \quad y = \frac{4x6-9}{6} = \frac{15}{6} = 2.5 \ (6, 2.5)$

$x = 5, \quad y = \frac{2x5-8}{3} = \frac{2}{3} = 0.6 \ (5, 0.6)$

సాధన : సమాంతర రేఖలు, సాధనలు లేవు



3) $9x + 3y + 12 = 0, 18x + 6y + 24 = 0$ సమీకరణాలు సరి చూచి గ్రాఫ్ పద్ధతి సాధించండి.

$9x + 3y + 12 = 0$

$18x + 6y + 24 = 0$

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{9}{18} = \frac{1}{2}, \frac{b_1}{b_2} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, \frac{c_1}{c_2} = \frac{12}{24} = \frac{1}{2}$$

$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ కావున పై రేఖీయ సమీకరణాలు పరస్పరాధారిత సమీకరణాలు. అందువల్ల వీటికి అనంత సాధనలు ఉంటాయి.

$9x + 3y + 12 = 0$

$3y = -9x - 12$

$y = \frac{-9x-12}{3}$

$18x + 6y + 24 = 0$

$6y = -18x - 24$

$y = \frac{-18x-24}{6}$

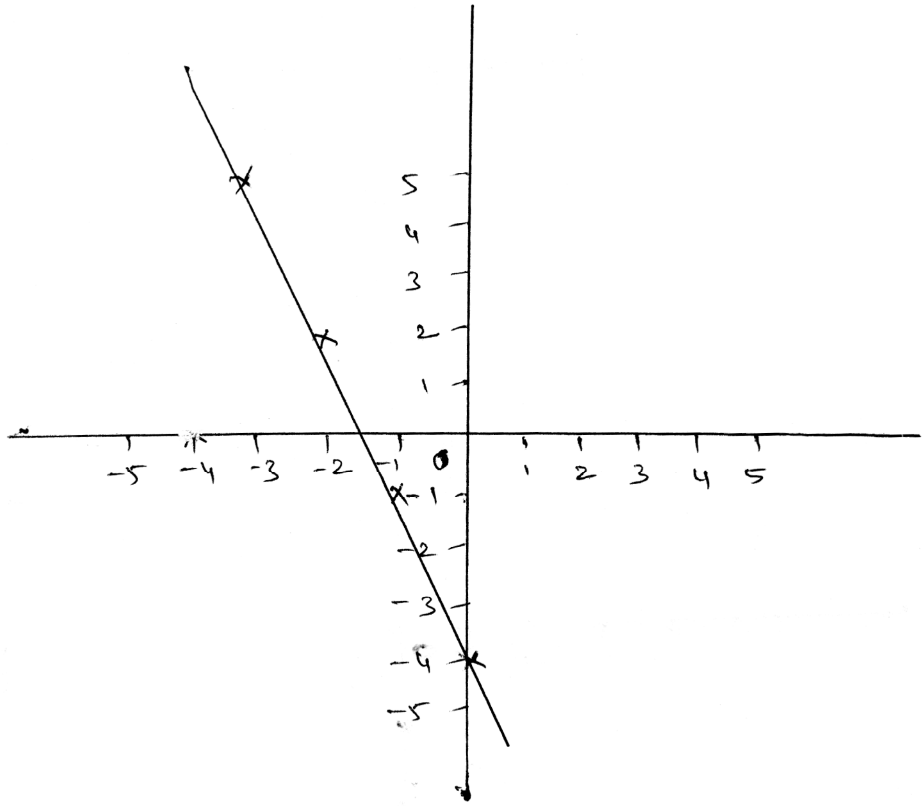
$x = 0, \ y = \frac{(-9 \times 0) - 12}{3} = \frac{-12}{3} = -4 \ (0, -4)$ $\quad$ $x = 0, \ y = \frac{(-18 \times 0) - 24}{6} = \frac{-24}{6} = -4 \ (0, -4)$

$x=-1,\ y=\frac{(-9\times-1)-12}{3}=\frac{9-12}{3}=\frac{-3}{3}=-1\,(-1,-1)$ $\quad x=-1,\ y=\frac{(-18\times-1)-24}{6}=\frac{18-24}{6}=\frac{-6}{6}=-1(-1,-1)$

$x=-2,\ y=\frac{(-9\times-2)-12}{3}=\frac{18-12}{3}=\frac{6}{3}=2\,(-2,2)$ $\quad x=-2,\ y=\frac{(-18\times-2)-24}{6}=\frac{36-24}{6}=\frac{12}{6}=2(-2,12)$

$x=-3,\ y=\frac{(-9\times-3)-12}{3}=\frac{27-12}{3}=\frac{15}{3}=5\,(-3,5)$ $\quad x=-3,\ y=\frac{(-18\times-3)-24}{6}=\frac{54-24}{6}=\frac{30}{6}=5(-3,5)$

సాధన : రేఖలు ఏకీభవించే రేఖలు. కావున వీటికి అనంత సాధనలు ఉంటాయి.



4) పదవ తరగతి చదివే 10 మంది విద్యార్థులు ఒక గణిత క్విజ్‌లో పాల్గొన్నారు. దానిలో పాల్గొన్న బాలకల సంఖ్య, బాలుర సంఖ్య కన్నా 4 ఎక్కువ అయిన ఆ క్విజ్‌లో పాల్గొన్న బాలికల సంఖ్యను, బాలుర సంఖ్యను కనుగొనండి.

జ: బాలుర సంఖ్య = x

బాలికల సంఖ్య = y

క్విజ్‌లో పాల్గొన్న విద్యార్థుల సంఖ్య $x+y=10........(1)$

పాల్గొన్న వారిలో బాలికల సంఖ్య బాలుర సంఖ్య కన్నా 4 ఎక్కువ

$$y=x+4$$

$$-x+y=4.........(2)$$

$$x+y=10$$

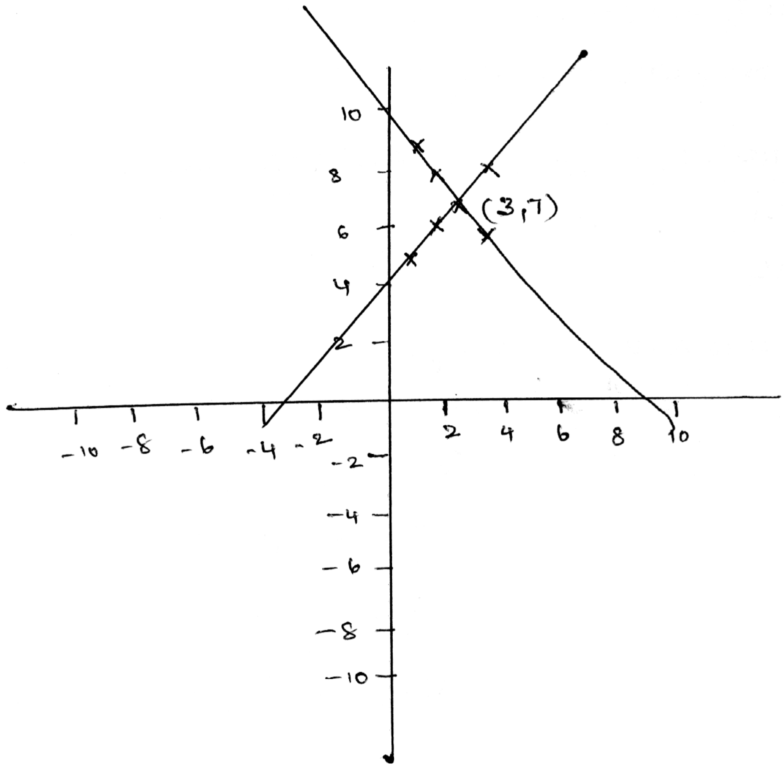
$$-x+y=4$$

$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{1}{-1},\frac{b_1}{b_2}-\frac{1}{1},\frac{c_1}{c_2}=\frac{10}{4}$$

$\therefore \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ కావున పై సమీకరణాలు సంగత సమీకరణాలు. ఒకే సాధన ఉంటుంది.

$x+y=10$	$-x+y=4$
$y=-x+10$	$y=x+4$
$x=1,\ y=-1+10=9\ \ (1,9)$	$x=1,\ y=1+4=5\ \ (1,5)$
$x=2,\ y=-2+10=8\ \ (2,8)$	$x=2,\ y=2+4=6\ \ (2,6)$
$x=3,\ y=-3+10=7\ \ (3,7)$	$x=3,\ y=3+4=7\ \ (3,7)$
$x=4,\ y=-4+10=6\ \ (4,6)$	$x=4,\ y=4+4=8\ \ (4,8)$

సాధన : ఖండన బిందువు $(3,7)$ కావున బాలుర సంఖ్య $x=3$, బాలికల సంఖ్య $y=7$



ప్రయత్నించండి :

ఏ రకమైన సమీకరణాలో సరిచూచి వాటిని రేఖాచిత్ర పద్ధతిన సాధించండి.

1) $4x+2y-10=0$
   $3x-2y-4=0$

2) $6x+3y-15=0$
   $2x+y-5=0$

3) $6x+8y-4=0$
   $3x+4y-2=0$

4) $2x-3y-5=0$
   $4x-6y-15=0$

5) $3x - y = 7$

$2x + 3y = 1$

6) ఒక తోటలో కొన్ని తుమ్మెదలు మరియు పువ్వులు కలవు. ప్రతి పువ్వుపై ఒక తుమ్మెద వాలినపుడు ఒక తుమ్మెద మిగిలిపోతుంది. ప్రతి పువ్వుపై రెండు తుమ్మెదలు వాలితే ఒక పువ్వు మిగిలిపోతుంది. అయిన పువ్వులెన్ని? తుమ్మెదలెన్ని?

7) 5 పెన్సిళ్ళు మరియు 7 కలముల మొత్తం వెల రూ. 50. అలాగే 7 పెన్సిళ్ళు మరియు 5 కలముల మొత్తము వెల రూ. 46. అయిన ప్రతి పెన్సిల్ మరియు కలము వెల కనుగొనండి.

కీలకాంశాలు : **5 మార్కులు**

రేఖీయ సమీకరణాల జతను సాధించు పద్ధతులు

i) మోడల్ పద్ధతి

ii) రేఖా చిత్రం పద్ధతి (గ్రాఫ్ ద్వారా సాధించుట)

iii) ప్రతిక్షేపణ పద్ధతి

iv) చరరాశిని తొలగించే పద్ధతి.

క్రింది సమీకరణాల జతను ప్రతిక్షేపణ పద్ధతిలో సాధించుము.

1) $x + 2y = -1$.............(1)

$2x - 3y = 12$............(2)

జ: (1)వ సమీకరణం నుండి $x + 2y = -1$

$$2y = -x - 1$$

$$y = \frac{-x-1}{2}$$

విలువను (2)వ సమీకరణంలో ప్రతిక్షేపించగా

$$2x - 3\left(\frac{-x-1}{2}\right) = 12$$

$$2x + \frac{3x+3}{2} = 12$$

$$\frac{4x+3x+3}{2} = 12$$

$$\frac{7x+3}{2} = 12$$

$$7x + 3 = 12 \times 2 = 24$$

$$7x = 24 - 3$$

$$7x = 21$$

$$x = \frac{21}{7} = 3$$

x =3 విలువన y లో ప్రతిక్షేపించగా

$$y=\frac{-3-1}{2}=\frac{-4}{2}=-2$$

$$\therefore x=3,\ y=-2$$

2) $x+\frac{6}{y}=6$

$3x-\frac{8}{y}=5$

$x+\frac{6}{y}=6$

$\frac{xy+6}{y}=6$

$xy+6=6y$

$xy-6y+6=0$

$xy-6y=-6.........(1)$

$3x-\frac{8}{y}=5$

$\frac{3xy-8}{y}=5$

$3xy-8=5y$

$3xy-5y-8=0$

$3xy-5y=8........(2)$

(1) నుండి

$$xy-6y=-6$$
$$y(x-6)=-6$$
$$y=\frac{-6}{x-6}$$

y విలువను (2)లో ప్రతిక్షేపించగా

$3x\left(\frac{-6}{x-6}\right)-5\left(\frac{-6}{x-6}\right)=8$

$\frac{-18x}{x-6}+\frac{30}{x-6}=8$

$\frac{-18x+30}{x-6}=8$

$-18x+30=8(x-6)$

$-18x+30=8x-48$

$-18x-8x=-30-48$

$-26x=-78$

$x=\frac{-78}{-26}=3$

x =3 విలువ y లో ప్రతిక్షేపించగా

$$y = \frac{-6}{3-6} = \frac{-6}{-3} = 2$$

$\therefore x = 3, y = 2$

3) ఒక రెండంకెల సంఖ్య మరియు దానిలోని స్థానాలను తారుమారు చేయగా వచ్చిన సంఖ్యల మొత్తము 66. ఆ సంఖ్యలోని రెండు అంకెల బేధము 2 అయిన ఆ సంఖ్యను కనుగొనుము?

జ: రెండంకెల సంఖ్యలో ఒకట్ల స్థాన విలువ = x

పదుల స్థాన విలువ = y

ఆ సంఖ్య = $10y + x$

సంఖ్యను తారుమారు చేయగా = $10x + y$

ఈ రెండు సంఖ్యల మొత్తము =66

$$(10y + x) + (10x + y) = 66$$

$$11x + 11y = 66$$

$$11(x + y) = 66$$

$$x + y = \frac{66}{11} = 6 ......(1)$$

ఆ సంఖ్యలోని రెండంకెల బేధము =2

$$x - y = 2 ....(2)$$

$x + y = 6$

$y = 6 - x$ విలువ (2)లో ప్రతిక్షేపించగా

$$x - (6 - x) = 2$$

$$x - 6 + x = 2$$

$$2x - 6 = 2$$

$$2x = 2 + 6 = 8$$

$$x = \frac{8}{2} = 4$$

x =4 విలువ y లో ప్రతిక్షేపించగా

$$y = 6 - 4 = 2$$

$x = 4, y = 2$ కావున ఆ సంఖ్య =10×2+4=20+4=24

తారుమారు చేయగా వచ్చు సంఖ్య =42

క్రింది సమస్యలను చరరాశిని తొలగించు పద్ధతిన సాధించుము.

1) $8x + 5y = 9 ....(1)$

$3x + 2y = 4 ....(2)$

జ: (1), (2) సమీకరణాల చరరాశుల గుణకాలను సమానం చేయగా

$$(1)\times 2.......16x+\cancel{10y}=18$$

$$(2)\times 5.......15x+\cancel{10y}=20$$

$$(-)\quad \overline{x \qquad =-2}$$

$\therefore x=-2$ విలువను (2)లో ప్రతిక్షేపించగా

$$3(-2)+2y=4$$

$$-6+2y=4$$

$$2y=4+6=10$$

$$y=\frac{10}{2}=5$$

$$\therefore x=-2, y=5$$

2) హైదరాబాదులో టాక్సీ ఛార్జీలు రెండు అంశాలుగా ఉంటాయి. మొదటిది స్థిర ఛార్జీ కాగా రెండవది దూరాన్ని బట్టి నిర్ణయించే ఛార్జి. 10 కి.మీ. దూరం ప్రయాణం చేసినపుడు అయిన మొత్త ఛార్జీ 220 రూ. అలాగే 15 కి.మీ. దూరం ప్రయాణం చేసినపుడు అయిన మొత్తం ఛార్జి 310 రూ. అయిన

i) స్థిర ఛార్జి విలువ మరియు ఒక కిలో మీటరుకు అయ్యే ఛార్జి విలువు ఎంత?

ii) ఒక వ్యక్తి 25 కి.మీ. దూరం ప్రయాణించిన అతను ఛార్జీల నిమిత్తం చెల్లించవలసిన మొత్తం ఎంత?

జ: స్థిర ఛార్జి అయిన = x

1కి.మీ. వెళ్ళుటకు అగు ఖర్చు= y అనుకొనిన

10 కి.మీ. దూరం ప్రయాణించుటకు ఖర్చు =220 రూ.

$$x+10y=220.........(1)$$

15 కి.మీ. దూరం ప్రయాణించుటకు ఖర్చు =310 రూ.

$$x+15y=310.........(2)$$

(i) (2) - (1) $\cancel{x}+15y=310$

$$\cancel{x}+10y=220$$

$$(-)\quad \overline{\qquad 5y=90 \qquad}$$

$$y=\frac{90}{5}=18$$

$y=18$ విలువ (1)లో ప్రతిక్షేపించగా

$$x+10(18)=220$$

$$x+180=220$$

$$x=220-180=40$$

$\therefore$ స్థిర ఛార్జి x = 40 రూ.

1 కి.మీ. వెళ్ళుటకు ఖర్చు = 18 రూ.

(ii) 25 కి.మీ. ప్రయాణించుటకు చెల్లించవలసిన మొత్తం

= స్థిర ఛార్జి + 25×1కి. మీ. ఖర్చు

= 40 + (25×18)

= 40+450=490 రూ.

రెండు చర రాశులలో రేఖీయ సమీకరణాల జతలుగా మార్చగలిగే సమీకరణాలు

క్రింది సమీకరణాల జతలను రేఖీయ సమీకరణాల జతలుగా మార్చడం ద్వారా వాటి సాధన కనుగొనుము.

1) $$\frac{2}{\sqrt{x}}+\frac{3}{\sqrt{y}}=2$$

$$\frac{4}{\sqrt{x}}-\frac{9}{\sqrt{y}}=-1$$

జ: $$2\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)+3\left(\frac{1}{\sqrt{y}}\right)=2$$

$$4\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)-9\left(\frac{1}{\sqrt{y}}\right)=-1$$

$\frac{1}{\sqrt{x}}=p, \frac{1}{\sqrt{y}}=d$ అనుకొనిన

$2p+3d=2.........(1)$

$4p-9d=-1.........(2)$

d గుణకాలు సమానం చేయగా

$(1)\times 3....6p+\cancel{9d}=6$

$(2)\quad ....4p-\cancel{9d}=-1$

$(+)\quad 10p=5$

$$p=\frac{\cancel{5}}{\cancel{10}_{2}}=\frac{1}{2}$$

$p=\frac{1}{2}$ విలువ (1)లో ప్రతిక్షేపించగా

$$\cancel{2}\times\frac{1}{\cancel{2}}+3d=2$$

$1+3d=2$

$$3d = 2-1 = 1$$

$$d = \frac{1}{3}$$

$p = \frac{1}{\sqrt{x}}, q = \frac{1}{\sqrt{y}}$ కావున

$$\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{y}} = \frac{1}{3}$$

$$\sqrt{x} = 2, \sqrt{y} = 3$$

$$x = 2^2 = 4, \quad y = 3^2 = 9$$

$$\therefore x = 4, \quad y = 9$$

2) $\frac{1}{3x+y} + \frac{1}{3x-y} = \frac{3}{4}$

$$\frac{1}{2(3x+y)} - \frac{1}{2(3x-y)} = \frac{-1}{8}$$

Ans: $\frac{1}{3x+y} = p, \frac{1}{3x-y} = d$ అనుకొనిన పై సమీకరణాలు

$$p+4 = \frac{3}{4}$$

$$4p+4d = 3 \ldots\ldots(1)$$

$$\frac{1}{2}p - \frac{1}{2}d = \frac{-1}{8}$$

$$\frac{p-d}{2} = \frac{-1}{8}$$

$$p-d = \frac{-1}{8} \times 2 = \frac{-1}{4}$$

$$4(p-d) = -1$$

$$4p-4d = -1 \ldots\ldots\ldots(2)$$

$(1)+(2)$ $\quad 4p + \cancel{4d} = 3$

$$4p - \cancel{4d} = -1$$

$$(+)\ 8p = 2$$

$$p = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

$p = \frac{1}{4}$ విలువ (1)లో ప్రతిక్షేపించగా

$$4\left(\frac{1}{4}\right) + 4d = 3$$

$$1 + 4d = 3$$

$$4d = 3-1 = 2$$

$$d = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

ఇపుడు $p = \frac{1}{3x+y}, d = \frac{1}{3x-y}$ విలువలు తిరిగి ప్రతిక్షేపించగా

$$\frac{1}{3x+y} = \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{3x-y} = \frac{1}{2}$$

$$3x + y = 4 ....(3) \quad 3x - y = 2 ....(4)$$

$(3)+(4)$ $\quad 3x + \cancel{y} = 4$

$$3x - \cancel{y} = 2$$

$$\overline{6x \quad = \ 6}$$

$$x = \frac{6}{6} = 1$$

$x = 1$ విలువ (3)లో ప్రతిక్షేపించగా

$$3(1) + y = 4$$

$$y = 4 - 3 = 1$$

$$\therefore x = 1, \ y = 1$$

ప్రయత్నించండి :

రేఖీయ సమీకరణాల జతలుగా మార్చి సాధించండి.

1) $6x + 3y = 6xy$

$2x + 4y = 5xy$

2) $\frac{x+y}{xy} = 2$

$\frac{x-y}{xy} = 6$

3) ఒక వ్యక్తి 370 కి.మీ. దూరాన్ని కొంత దూరం రైలులో, కొంత దూరం కారులో ప్రయాణించారు. అతను 250 కి.మీ. దూరాన్ని రైలులో, మిగిలిన దూరాన్ని కారులో ప్రయాణించగా అతనికి 4 గంటలు పట్టినది. అదే అతను 130 కి.మీ. దూరం రైలులో, మిగిలిన దూరం కారులో ప్రయాణిస్తే అతనికి 18 నిమిషాల కాలం ఎక్కువ పట్టేది. రైలు మరియు కారుల వేగాన్ని కనుగొనండి.

చరరాశిని తొలగించు పద్ధతి ద్వారా సాధించండి.

1) ఒక బీజగణిత పాఠ్య పుస్తకములో మొత్తము 1382 పేజీలు ఉన్నాయి. దీనిని రెండు భాగాలు చేసిన రెండవ భాగములో, మొదటి భాగము కన్న 64 పేజీలు ఎక్కువ ఉన్నాయి. అయిన ప్రతి భాగములోని పేజీల సంఖ్యను కనుగొనండి.

2) ఇద్దరు వ్యక్తుల ఆదాయాల నిష్పత్తి 9:7 మరియు వాటి ఖర్చుల నిష్పత్తి 4:3 వారు ప్రతి ఒక్కరూ నెలకు 2000 రూ.ల సొమ్మును ఆదా చేసిన వారి నెలవారీ ఆదాయాలను కనుగొనండి.

3) ఒక పోటీ పరీక్షలో ప్రతి సరియైన సమాధానికి 3 మార్కులు వేయగా ప్రతి తప్పు సమాధానానికి 1 మార్కు తగ్గించెదరు. ఈ పరీక్షలో మధు అన్ని ప్రశ్నలకు సమాధానము వ్రాసి 40 మార్కులు సంపాదించెను. ప్రతి సరియైన సమాధానికి 4 మార్కులు వేసి ప్రతి తప్పు సమాధానికి 2 మార్కులు తగ్గించిన అతనికి 50 మార్కులు వచ్చి ఉండేవి. అయిన ఆ పరీక్షలో ఉన్న మొత్తము ప్రశ్న లెన్ని?

ప్రతిక్షేపణ పద్ధతి :

ఇచ్చిన సమీకరణాల జతను ప్రతిక్షేపణ పద్ధతిలో సాధించుము.

1. $2x+3y=9$
   $3x+4y=5$

2. $0.2x+0.3y=13$
   $0.4x+0.5y=2.3$

3. $3x-5y=-1$
   $x-y=-1$

2 మార్కులు మరియు 1 మార్కు :

1) సంగత రేఖీయ సమీకరణాల జతకు ఉదాహరణ ఇచ్చి వివరించుము?

జ : $2x+y-5=0$
$3x-2y-4=0$

ఈ రేఖీయ సమీకరణాల యొక్క $\frac{a_1}{a_2}=\frac{2}{3}, \frac{b_1}{b_2}=\frac{1}{-2}, \frac{c_1}{c_2}=\frac{-5}{4}$ విలువలు పరిశీలిస్తే $\frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}$. కావున ఇవి రెండు ఖండన రేఖీయ సమీకరణాలు. వీటికి ఏకైక సాధన ఉంటుంది. అందువల్ల వీటిని సంగత రేఖీయ సమీకరణాలు అందురు.

2) పరస్పరాధార రేఖీయ సమీకరణాల జతకు ఉదాహరణ ఇచ్చి వివరించుము?

జ : $x+y-2=0$
$2x+2y-4=0$

ఈ రేఖీయ సమీకరణాల యొక్క విలువలు $\frac{a_1}{a_2}=\frac{1}{2}, \frac{b_1}{b_2}=\frac{1}{2}, \frac{c_1}{c_2}=\frac{-2}{-4}=\frac{1}{2}$. కావున $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$. అందువల్ల ఇవి పరస్పరం ఏకీభవించే రేఖలు. వీటికి అనంతమైన సాధనలు ఉంటాయి. అందువల్లనే వీటిని పరస్పరాధార రేఖీయ సమీకరణాలు అందురు.

3) అసంగత రేఖీయ సమీకరణాల జతకు ఉదాహరణ ఇచ్చి వివరించుము?

జ: $4x-6y-15=0$
$2x-3y-5=0$

ఈ రేఖీయ సమీకరణాల యొక్క విలువలు $\frac{a_1}{a_2}=\frac{4}{2}=\frac{2}{1}, \frac{b_1}{b_2}=\frac{-6}{-3}=\frac{2}{1}, \frac{c_1}{c_2}=\frac{-15}{-5}=\frac{3}{1}$. ఇందులో

$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}$. ఈ నియమం ద్వారా ఈ రేఖీయ సమీకరణాల జత సమాంతర రేఖలు సూచిస్తాయి. వీటికి సాధనలు లేవు. కావున ఇవి అసంగత రేఖీయ సమీకరణాలు అవుతాయి.

4) గ్రాఫ్‌లు గీయకుండా $\frac{a_1}{a_2},\frac{b_1}{b_2},\frac{c_1}{c_2}$ నిష్పత్తులను పోల్చి క్రింది రేఖీయ సమీకరణాలు ఖండన రేఖలో, సమాంతర రేఖలో లేదా ఏకీభవించే రేఖలో తెల్పుము.

a) $5x-4y+8=0$
$7x+6y-9=0$

$\frac{a_1}{a_2}=\frac{5}{7}$, $\frac{b_1}{b_2}=\frac{-4}{6}=\frac{-2}{3}$, $\frac{c_1}{c_2}=\frac{8}{-9}$ ఈ విలువల ద్వారా $\frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}$. అందువల్ల ఈ రేఖీయ సమీకరణాలు ఖండన రేఖలు.

b) $9x+3y+12=0$
$18x+6y+24=0$

$\frac{a_1}{a_2}=\frac{9}{18}=\frac{1}{2}$, $\frac{b_1}{b_2}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$, $\frac{c_1}{c_2}=\frac{12}{24}=\frac{1}{2}$ ఈ విలువల ద్వారా $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$. అందువల్ల ఈ రేఖీయ సమీకరణాలు ఏకీభవించే రేఖలు.

c) $6x-3y+10=0$
$2x-y+9=0$

$\frac{a_1}{a_2}=\frac{6}{2}=\frac{3}{1}$, $\frac{b_1}{b_2}=\frac{-3}{-1}=\frac{3}{1}$, $\frac{c_1}{c_2}=\frac{10}{9}$ ఈ విలువల ద్వారా $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}$. అందువల్ల ఈ రేఖీయ సమీకరణాలు సమాంతర రేఖలు.

5) చరరాశిని తొలగించుట ద్వారా సాధించండి.

$x+y=5$
$x-y=1$

జ:
$$x+\cancel{y}=5......(1)$$
$$x-\cancel{y}=1......(2)$$
$$(+)\quad 2x=6$$

$$x=\frac{6}{2}=3$$

$x=3$ విలువ (1)లో ప్రతిక్షేపించగా

$$3+y=5$$
$$y=5-3=2$$
$$\therefore x=3,\ y=2$$

6) రేఖీయ సమీకరణాల జతగా క్రింది సమీకరణాలు మార్చండి?

$\frac{x+y}{xy}=2 \qquad \frac{x-y}{xy}=6$

$\frac{x}{xy}+\frac{y}{xy}=2 \qquad \frac{x}{xy}-\frac{y}{xy}=6$

$\frac{1}{y}+\frac{1}{x}=2 \qquad \frac{1}{y}-\frac{1}{x}=6$

$\frac{1}{x}=p,\ \frac{1}{y}=d$ అనుకొంటే

$d+p=2 \qquad d-p=6$

1/2 మార్కు :

1) $\frac{4}{x}-\frac{4}{y}=-2$ రేఖీయ సమీకరణంలో y విలువ 1 అయిన సమీకరణాన్ని తృప్తిపరిచే x విలువ

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 ( )

2) $5x-3y=11$ సమీకరణాల జత ఏ సమీకరణాలు. ( )
$-10x+6y=-22$

a) సంగత b) అసంగత c) పరస్పరాధార d) వర్గ

3) వస్తువు ఉత్పాదనకు అయిన ఖర్చు వాటి అమ్మకాల ద్వారా వచ్చిన రాబడి సమానంగా ఉండే స్థానాన్ని ఏమంటారు?

a) సమతుల్యతా స్థానము b) అసంగత స్థానము ( )

c) సంగత స్థానము d) వర్గ స్థానము

4) కాలాన్ని లెక్కించడంలో దూరము, వేగమునకు గల సంబంధము ( )

a) $\frac{\text{వేగము}}{\text{దూరము}}$ b) $\frac{\text{కాలము}}{\text{వేగము}}$ c) $\frac{\text{కాలము}}{\text{దూరము}}$ d) $\frac{\text{దూరము}}{\text{వేగము}}$

5) $(-5,-5)$ బిందువు కల పాదము ( )

a) Q_1 b) Q_2 c) Q_3 d) Q_4

6) పరస్పరాధార సమీకరణాల జత కావలెనన్న ( )

a) $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}$ b) $\frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}$ c) $\frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2}$ d) $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$

7) $x+y-9=0,\ x-y-2=0$ యొక్క సాధనల సంఖ్య ( )

a) 1 b) 0 c) అనంతము d) 9

8) రేఖీయ సమీకరణ సాధారణ రూపం ( )

a) $ax+by=0$ b) $ax+by+c=0$ c) $ax=by$ d) $\frac{x}{y}$

9) $2x+y=7,\ x+y=5$ అయిన y విలువ ( )

a) 2 b) 3 c) 5 d) 7

10) $3x+2y=4$ ఇందులో $x=0$ అయిన y విలువ ( )

a) 3 b) 2 c) 4 d) 1

Unit V

వర్గ సమీకరణాలు (Quddratic Equations)

Prepared by : **L. Ravindranath Babu,** Headmaster, Z.P. High School, R.V. Palli, Peddiveedu (P), Veeraballi (M)

కీలకాంశాలు :

1. a, b, c లు వాస్తవ సంఖ్యలై $a \neq 0$ అయితే $ax^2+bx+c=0$ ను xలో వర్గ సమీకరణము అందురు. $ax^2+bx+c=0 (a \neq 0)$ ను వర్గ సమీకరణ ప్రామాణిక రూపం అంటారు. $y=ax^2+bx+c$ని వర్గ ప్రమియము అందురు.

   వర్గ సమీకరణాన్ని కారణాంక పద్ధతిన, వర్గమును పూర్తి చేయుట ద్వారా సాధిస్తాము.

   వర్గ సమీకరణ సాధనకు ఉపయోగించే సూత్రము

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

   ఇందులో b^2-4acని వర్గ సమీకరణము యొక్క 'విచక్షణి' అందురు. విచక్షణి ద్వారా వర్గసమీకరణ మూలాల స్వభావాన్ని తెలుసుకుంటాము.

   i) $b^2-4ac>0$ అయిన వర్గ సమీకరణ మూలాలు వాస్తవాలుగా ఉండి వేరు వేరుగా వుంటాయి.

   ii) $b^2-4ac=0$ అయిన వర్గ సమీకరణ మూలాలు వాస్తవాలు, సమానాలు.

   iii) $b^2-4ac<0$ అయిన వాస్తవ మూలాలు ఉండవు.

4 మార్కులు :

1. కారణాంక పద్ధతిన వర్గ సమీకరణాన్ని సాధించుము.

   i) $100x^2-20x+1=0$

Ans : $100x^2-10x-10x+1=0$

$10x(10x-1)-1(10x-1)=0$

$(10x-1)(10x-1)=0$

$10x-1=0$ లేదా $10x-1=0$

$x=\frac{1}{10}$ మూలాలు వాస్తవాలు, సమానాలు.

   ii) $\sqrt{2}\,x^2+7x+5\sqrt{2}=0$

Ans : $\sqrt{2}\,x^2+5x+2x+5\sqrt{2}=0$

$x\left(\sqrt{2}\,x+5\right)+\sqrt{2}\left(\sqrt{2}\,x+5)=0\right)$

$\left(\sqrt{2}\,x+5\right)\left(x+\sqrt{2}\right)=0$

$5\sqrt{2}\times\sqrt{2}$

5×2

$10x^2$

$5x \quad 2x$

$\sqrt{2}\,x+5=0$ లేదా $x+\sqrt{2}=0$

$x=\frac{-5}{\sqrt{2}}$ లేదా $x=-\sqrt{2}$

$\therefore x=\frac{-5}{\sqrt{2}},-\sqrt{2}$

iii) $3(x-4)^2-5(x-4)=12$

Ans : $3(x-4)^2-5(x-4)-12=0$

$x-4=a$ అనుకొనిన

$3a^2-5a-12=0$

$3a^2-9a+4a-12=0$

$3a(a-3)+4(a-3)=0$

$(a-3)(3a+4)=0$

$a-3=0$ లేదా $3a+4=0$

ఇపుడు $a=x-4$ ప్రతిక్షేపించగా

$(x-4)-3=0$ లేదా $3(x-4)+4=0$

$x-7=0$ లేదా $3x-12+4=0$

$x=7$ $\quad 3x-8=0$

$x=\frac{8}{3}$

$\therefore x=7$ లేదా $\frac{8}{3}$

2) ఒక దీర్ఘ చతురస్రము యొక్క చుట్టు కొలత 28 మీ. మరియు దాని వైశాల్యము 40 చ.మీ. అయిన దీర్ఘచతురస్రము యొక్క కొలతలు కనుగొనుము?

జ: దీర్ఘచతురస్ర పొడవు= l

వెడల్పు= b అనుకొనిన

దీర్ఘచతురస్ర చుట్టు కొలత=28 మీ.

$2(l+b)=28$

$l+b=\frac{28}{2}=14$

$l+b=14$

$b=14-l$.......(1)

దీర్ఘచతురస్ర వైశాల్యం=40

$lb=40$

ఇందులో b విలువ $14-l$ ప్రతిక్షేపించగా

$l(14-l)=40$

$14l-l^2=40$

$l^2-14l+40=0$

$l^2-10l-4l+40=0$

$l(l-10)-4(l-10)=0$

$(l-10)(l-4)=0$

$l=10$ లేదా $l=4$

l విలువ bలో ప్రతిక్షేపించగా

$l=10$ అయిన $\qquad l=4$అయిన

$b=14-10 \qquad b=14-4=10$

$l=10, b=4$ లేదా $l=4, b=10$

3. వర్గమును పూర్తి చేయుట ద్వారా వర్గసమీకరణమును సాధించుట.

i) $x^2-10x+9=0$

జ: $x^2-10x=-9$

($-10x$ పదాన్ని వర్గములోని $-2ab$ రూపంలో వ్రాయగా)

$x^2-2.x.5=-9$

ఇరువైపులా 5 యొక్క వర్గ విలువను కలుపగా

$x^2-2.x.5+5^2=-9+5^2$

$x^2-2.x.5+5^2=-9+25$

$(x-5)^2=16$

$x-5=\sqrt{16}$

$x-5=\pm 4$

$x=5+4$ లేదా $5-4$

$\therefore x=9$ లేదా 1

ii) $4x^2+4\sqrt{3}\,x+3=0$

జ : $4x^2+4\sqrt{3}\,x=-3$

$(2x)^2+4\sqrt{3}\,x=-3$

$(2x)^2+2.2x.\sqrt{3}=-3$

$(\sqrt{3})^2$ చే ఇరువైపులా సంకలనము చేయగా

$(2x)^2+2.2x.\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2=-3+(\sqrt{3})^2$

$(2x+\sqrt{3})^2=-3+3$

$$\left(2x+\sqrt{3}\right)^2=0$$

$$2x+\sqrt{3}=0$$

$$2x=-\sqrt{3}$$

$$x=\frac{-\sqrt{3}}{2}$$

పరిశీలన : $4x^2+4\sqrt{3}x+3=0$ వర్గ సమీకరణ విచక్షణి లెక్కించిన $a=4, b=4\sqrt{3}, c=3$

$$b^2-4ac=\left(4\sqrt{3}\right)^2-4\times4\times3=4^2\times3-4^2\times3=0$$

కావున పై సమీకరణ మూలాలు వాస్తవాలు సమానాలు.

iii) $\frac{1}{x+4}-\frac{1}{x-7}=\frac{11}{30},\ x\neq-4,7$

జ : $\frac{x-7-(x+4)}{(x+4)(x-7)}=\frac{11}{30}$

$$\frac{\cancel{x}-7-\cancel{x}-4}{(x+4)(x-7)}=\frac{11}{30}$$

$$\frac{-11}{(x+4)(x-7)}=\frac{11}{30}$$

అడ్డగుణకారము చేయగా

$$11(x+4)(x-7)=30\times-11$$

$$(x+4)(x-7)=\frac{30\times-\cancel{11}}{\cancel{11}}$$

$$(x+4)(x-7)=-30$$

$$x^2-7x+4x-28=-30$$

$$x^2-3x-28=-30$$

$$x^2-3x-28+30=0$$

$$x^2-3x+2=0$$

$$x^2-3x=-2$$

$$x^2-\frac{2}{2},x,3=-2$$

$$x^2-2,x,\frac{3}{2}+\left(\frac{3}{2}\right)^2=-2+\left(\frac{3}{2}\right)^2$$

$$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2=-2+\frac{9}{4}$$

$$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{-8+9}{4}$$

$$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$$

$$x-\frac{3}{2}=\sqrt{\frac{1}{4}}$$

$$x-\frac{3}{2}=\pm\frac{1}{2}$$

$x=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}$ లేదా $\frac{3}{2}-\frac{1}{2}$

$=\frac{3+1}{2}$ లేదా $\frac{3-1}{2}$

$=\frac{4}{2}$ లేదా $\frac{2}{2}$

$x=2$ లేదా 1

4) రెండు సంఖ్యల వర్గాల బేధము 180. చిన్న సంఖ్య యొక్క వర్గము పెద్ద దానికి 8 రెట్లు అయినా సంఖ్యలను కనుగొనుము?

జ : రెండు సంఖ్యలలో పెద్ద సంఖ్య= x

చిన్న సంఖ్య = y అనుకొనిన

రెండు సంఖ్యల వర్గాల బేధము =180

$$x^2-y^2=180........(1)$$

చిన్న సంఖ్య యొక్క వర్గము పెద్ద దానికి 8 రెట్లు

$$y^2=8x$$

ఈ విలువను (1)లో ప్రతిక్షేపించగా

$$x^2-8x=180$$

$$x^2-2.x.4=180$$

$$x^2-2.x.4+4^2=180+4^2$$

$$(x-4)^2=196$$

$$x-4=\sqrt{196}=\pm14$$

$x-4=14$ లేదా −14

$x=14+4$ లేదా −14+4

$x=18$ లేదా −10

$x=18$ అయిన y విలువ	$x=-10$ అయిన
$y^2=8\times18$	$y^2=8\times-10$

$y^2 = 144$ $\qquad$ $y^2 = -80$

$y = \sqrt{144}$ $\qquad$ ఋణ విలువలకు వర్గ మూలం లేదు.

$y = 12$

$\therefore$ పెద్ద సంఖ్య=18

చిన్న సంఖ్య=12

5) ఒక రైలు 360 కి.మీ. దూరమును ఏకరీతి వేగముతో ప్రయాణించును. దీని వేగము గంటకు 5 కి.మీ. పెరిగిన అదే దూరమును ప్రయాణించుటకు పట్టుకాలము 1 గంట తగ్గును. అయిన రైలు వేగమును కనుగొనుము?

జ: ఏకరీతి వేగంతో రైలు ప్రయాణించిన దూరము =360 కి.మీ.

రైలు వేగము= x కి.మీ. అనుకొనిన

ప్రయాణము పూర్తి చేయుటకు పట్టు కాలము = $\dfrac{\text{దూరము}}{\text{వేగము}}$

x వేగముతో ప్రయాణించిన పట్టుకాలము = $\dfrac{360}{x}$

గంటకు 5 కి.మీ. వేగము పెరిగినచో మొత్తం వేగము = $x+5$

$x+5$ కి.మీ. వేగంతో ప్రయాణించిన పట్టు కాలము = $\dfrac{360}{x+5}$

$x+5$ కి.మీ. వేగంతో ప్రయాణించిన ప్రయాణ కాలం 1 గంట తగ్గును.

$$\frac{360}{x} - \frac{360}{x+5} = 1$$

$$360\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+5}\right) = 1$$

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x+5} = \frac{1}{360}$$

$$\frac{\cancel{x} + 5 - \cancel{x}}{x(x+5)} = \frac{1}{360}$$

$$\frac{5}{x(x+5)} = \frac{1}{360}$$

అడ్డ గుణకారము చేయగా

$x(x+5) = 360 \times 5$

$x^2 + 5x = 1800$

$x^2 + 5x - 1800 = 0$

$x^2 + 45x - 40x - 1800 = 0$

$x(x+45) - 40(x+45) = 0$

$(x+45)(x-40) = 0$

$x + 45 = 0$ లేదా $x - 40 = 0$

$x=-45$ లేదా $x=40$

వేగము ఋణాత్మకము కాదు కావున $x=40$

రైలు వేగము=40 కి.మీ./గం.

వర్గ సమీకరణ సాధన సూత్రం ఉపయోగించి సాధించుట.

6) క్రింది సమీకరణ మూలాల స్వభావం తెలిపి వాస్తవ మూలాలుంటే కనుక్కోండి.

$2x^2-6x+3=0$

$a=2, b=-6, c=3$

జ: $b^2-4ac=(-6)^2-4\times2\times3$

$36-24=12>0$

కావున పై వర్గ సమీకరణానికి వాస్తవ మూలాలు ఉండి వేరువేరుగా ఉంటాయి.

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$=\frac{-(-6)\pm\sqrt{12}}{2\times2}$$

$$=\frac{6\pm\sqrt{12}}{4}$$

$$=\frac{6\pm\sqrt{4\times3}}{4}$$

$$=\frac{6\pm2\sqrt{3}}{4}$$

$$=\frac{\overset{1}{\cancel{2}}\left(3\pm\sqrt{3}\right)}{\underset{2}{\cancel{4}}}$$

$$=\frac{3\pm\sqrt{3}}{2}$$

మూలాలు $x=\frac{3\pm\sqrt{3}}{2}, \frac{3-\sqrt{3}}{2}$

7) $2x^2+Kx+3=0$ వర్గ సమీకరణానికి రెండు సమాన వాస్తవ మూలాలు ఉంటే విలువ కనుగొనుము.

జ : $2x^2+Kx+3=0$ వర్గ సమీకరణమునకు రెండు సమాన వాస్తవ మూలాలు ఉన్నచో

$b^2-4ac=0$

$\therefore a=2, b=k, c=3$ కావున

$k^2-4\times2\times3=0$

$k^2-24=0$

$$k^2 = 24$$

$$k = \sqrt{24} = \sqrt{4 \times 6} = 2\sqrt{6}$$

k విలువ $= 2\sqrt{6}$

8) ఇద్దరు మిత్రుల వయస్సుల మొత్తం 20 సం॥లు. నాలుగు సంవత్సరాల క్రితం వారి వయస్సుల లబ్ధం 48. ఇది సాధ్యమేనా? సాధ్యమైతే వారి వయసులు కనుగొనుము?

జ: ఇద్దరి మిత్రులలో ఒకరి వయసు= x అనుకొనిన

రెండవ వ్యక్తి వయసు $= 20 - x$

నాలుగు సంవత్సరాల క్రిందట మొదటి వాని వయసు= $x - 4$

రెండవ వాని వయసు= $20 - x - 4$

$= 16 - x$

నాలుగు సంవత్సరాల క్రితం వారి వయసుల లబ్ధం=48

$$(x-4)(16-x) = 48$$

$$16x - x^2 - 64 + 4x = 48$$

$$-x^2 + 20x - 64 = 48$$

$$-x^2 + 20x - 64 - 48 = 0$$

$$-x^2 + 20x - 112 = 0$$

$$x^2 - 20x + 112 = 0$$

ఈ వర్గ సమీకరణ మూలాల స్వభావాన్ని పరిశీలిస్తే

$$a = 1, b = -20, c = 112$$

$$b^2 - 4ac = (-20)^2 - 4 \times 1 \times 112$$

$$= 100 - 448 = -48 < 0$$

ఈ వర్గ సమీకణమునకు వాస్తవ మూలాలు లేవు. అందువల్ల వారి వయసుల విలువల నియమాలు సరి కాదు. కావున ఇది సాధ్యం కాదు.

ప్రయత్నించండి :

కారణాంక పద్ధతిలో సాధించండి.

1) $2x^2 - x + \frac{1}{8} = 0$

2) 60 మంది విద్యార్థులు గల తరగతిలో ప్రతి అబ్బాయి, అమ్మాయిల సంఖ్యకు సమానమైన సొమ్మును చందాగా ఇచ్చారు. మొత్తం వసూలైన సొమ్ము 1600 రూ. అయిన తరగతిలో ఎంతమంది అబ్బాయిలు గలరు?

3) ఒక లంబకోణ త్రిభుజం యొక్క ఎత్తు దాని భూమి కంటే 7 సెం.మీ. తక్కువ. కర్ణము పొడవు 13 సెం.మీ. అయిన మిగిలిన రెండు భుజలను కనుగొనుము?

వర్గమును పూర్తి చేయుట ద్వారా సాధించుము.

4) రెండు వరుస ధన బేసి సంఖ్యల మొత్తము 290 అయిన ఆ సంఖ్యలను కనుగొనుము.

5) $x^2+5=-6x$ సాధించండి.

6) మౌళికకు గణితములో మరియు ఇంగ్లీషులో వచ్చిన మార్కుల మొత్తము 30. ఆమెకు ఒకవేళ గణితంలో 2 మార్కులు ఎక్కువగా, ఇంగ్లీషులో 3 మార్కులు తక్కువగా వచ్చి ఉంటే ఆ రెండింటి యొక్క లబ్ధము 210 అయి ఉండేది. అయిన ఆమెకురెండు సబ్జెక్టులలో వచ్చిన మార్కులు కనుగొనుము?

సూత్ర పద్ధతిలో సాధించుట.

7) $3x^2-4\sqrt{3}x+4=0$ సమీకరణ మూలాల స్వభావము తెలుపుము? వాస్తవ మూలాలు ఉంటే కనుగొనుము.

8) $kx(x-2)+6=0$ వర్గ సమీకరణములో రెండు సమాన వాస్తవ మూలాలు ఉంటే k విలువను కనుగొనుము.

9) చుట్టు కొలత 80 మీ., వైశాల్యము 400 చ.మీ. ఉండునట్లు ఒక దీర్ఘ చతురస్రాకార పార్కును తయారు చేయగలమా? చేయగలిగితే దాని పొడవు, వెడల్పులను కనుగొనుము?

2 మార్కులు, 1 మార్కు ప్రశ్నలు :

క్రింద ఇవ్వబడిన సమీకరణాలు వర్గ సమీకరణాలు అవునో కాదో నిర్ణయించండి.

1) $(x-3)(2x+1)=x(x+5)$

జ: $2x^2+x-6x-3=x^2+5x$

$2x^2-5x-3=x^2+5x$

$2x^2-5x-3-x^2-5x=0$

$x^2-10x-3=0$ ఇది వర్గ సమీకరణము

2) $(x+2)^3=2x(x^2-1)$

జ: $x^3+3.x^2.2+3.x.2^2+2^3=2x^3-2x$

$x^3+6x^2+12x+8=2x^3-2x$

$2x^3-2x-x^3-6x^2-12x-8=0$

$x^3-6x^2-14x-8=0$ ఇది వర్గ సమీకరణము కాదు.

3) రెండు వరుస ధనపూర్ణ సంఖ్యల లబ్ధము 306. అయిన ఆ సంఖ్యలను కనుగొనుటకు అవసరమయ్యే వర్గ సమీకరణము వ్రాయుము?

జ: రెండు వరుస ధనపూర్ణ సంఖ్యలు = $a, a+1$ అనుకొనిన

పై రెండు వరుస ధన పూర్ణ సంఖ్యల లబ్ధము=306

$$a(a+1)=306$$

$$a^2+a=306$$

$$a^2+a-306=0$$

4) 1 మరియు $\frac{3}{2}$ లు $2x^2-5x+3=0$ యొక్క మూలాలు అవునో, కాదో సరిచూడుము.

జ: మూలాలు కావున $x=1, x=\frac{3}{2}$

ఈ విలువలు పై సమీకరణములో ప్రతిక్షేపించిన సమీకరణపూరిత విలువ శూన్యం కావాలి.

$x=1$ అయిన $=2(1)^2-5(1)+3$

$=2-5+3=5-5=0$

కావున 1 విలువ మూలమవుతుంది.

$x=\frac{3}{2}$ అయిన $=2\left(\frac{3}{2}\right)^2-5\left(\frac{3}{2}\right)+3$

$$=\overset{1}{\cancel{2}}\left(\frac{9}{\cancel{4}_{2}}\right)-\frac{15}{2}+3$$

$$=\frac{9}{2}-\frac{15}{2}+3$$

$$=\frac{9-15+6}{2}=\frac{15-15}{2}=\frac{0}{2}=0$$

$\therefore \frac{3}{2}$ విలువ కూడా మూలమవుతుంది.

5) $x^2-3x-10=0$ కారణాంక పద్ధతిన మూలాలు కనుగొనుము.

జ : $x^2-3x-10=0$

$x^2-5x+2x-10=0$

$x(x-5)+2(x-5)=0$

$(x-5)(x+2)=0$

$x-5=0$ లేదా $x+2=0$

$x=5$ లేదా $x=-2$

6) మొత్తము 27. లబ్ధము 182 అయ్యే విధంగా రెండు సంఖ్యలను కనుగొనుము.

జ : రెండు సంఖ్యలు = a,b అనుకొనిన

రెండు సంఖ్యల మొత్తం = $a+b=27$.......(1)

రెండు సంఖ్యల లబ్ధం = $ab=182$.......(2)

$a+b=27$

$b=27-a$

b విలువ (2)లో ప్రతిక్షేపించగా

$a(27-a)=182$

$27a-a^2=182$

$a^2-27a+182=0$

$a^2-14a-13a+182=0$

$a(a-14)-13(a-14)=0$

$(a-14)(a-13)=0$

$182a^2$

$-14a \quad -13a$

$a-14=0, \ a-13=0$

$a=14, \ a-13=0$

$b=27-14$ $\qquad$ $b=27-13$

$=13$ $\qquad$ $=14$

రెండు సంఖ్యలు $=13, 14$

7) విచక్షణిని తెలుపుము. దాని వలన ఉపయోగమేమి?

జ : b^2-4ac విలువను వర్గ సమీకరణము యొక్క విచక్షణి అందురు. విచక్షణి విలువను కనుగొనడం ద్వారా వర్గ సమీకరణాన్ని సాధించకుండానే వాటి మూలాల లక్షణాలను తెలుసుకొన వచ్చును.

8) $2x^2-2\sqrt{2}\,x+1=0$ సమీకరణ మూలాల లక్షణాలు తెలుపుము?

జ: $a=2, b=-2\sqrt{2}, c=1$

$b^2-4ac=(-2\sqrt{2})^2-4(2)(1)=(4\times 2)-8=8-8=0$

$\therefore$ పై వర్గ సమీకరణ మూలాలు వాస్తవాలుగా ఉండి సమానంగా ఉంటాయి.

1/2 మార్కు బిట్స్ :

1) ఒక వర్గ సమీకరణ మూలాలు వాస్తవాలు కావు అయిన విచక్షణి ( )

a) $b^2-4ac=0$ b) $b^2-4ac>0$

c) $b^2-4ac<0$ d) $b^2=4ac$

2) $4x^2+4x+1=0$ మూలాలు ( )

a) 4,1 b) $\frac{3}{2},\frac{1}{2}$ c) 0.5, 2.5 d) $\frac{-1}{2},\frac{-1}{2}$

3) $ax^2+bx+c=0$ యొక్క మూలాల మొత్తం ( )

a) $\frac{-b}{a}$ b) $\frac{c}{a}$ c) $\frac{b}{c}$ d) $\frac{-a}{b}$

4) $5x^2-6x+1=0$ యొక్క మూలాల లబ్ధం ( )

a) $\frac{-6}{5}$ b) $\frac{1}{5}$ c) $\frac{5}{6}$ d) $-\frac{1}{6}$

5) $x^2-9=0$ కు ఎన్ని మూలాలు ఉంటాయి. ( )

a) 1 b) 2 c) 3 d) 9

6) వర్గ సమీకరణ సాధనా సూత్రం ....

7) $b^2-4ac>0$ అయిన ఆ వర్గ సమీకరణ విలువలతో గీసిన గ్రాఫు అక్షాన్ని .... చోట్ల ఖండిస్తుంది.

8) వర్గ సమీకరణ విలువలతో గీయబడిన గ్రాఫు అక్షాన్ని ఖండించక పోయిన b^2-4ac ....

9) b^2-4ac పేరు ....

10) వర్గ సమీకరణ సాధారణ రూపంలో $a=0$ అయిన ఆ సమీకరణము ....

6. శ్రేఢులు (Progressions)

ముఖ్యమైన సమాచారము (Important Formulae)

అంకశ్రేఢి : ఒక సంఖ్యల జాబితాలో మొదటి పదం తప్ప మిగిలిన అన్ని పదాలు వాని ముందున్న పదానికి ఏదో ఒక స్థిర సంఖ్యను కలపటం వల్ల వస్తూ వుంటే ఆ జాబితాను అంకశ్రేఢి అంటాము.

కలిపే స్థిర సంఖ్యను సామాన్య భేదము లేదా పదాంతరము (d) అంటారు.

$a_1, a_2, a_3, ...a_n$ లు ఒక అంకశ్రేఢిలోని పదాలయిన

$$d = a_2 - a_1 = a_1 - a_2 = a_4 - a_3 = ... = a_n - a_{n-1}$$

అంకశ్రేఢి యొక్క సామాన్య రూపము :

$$a, a+d, a+2d, a+3d, ...$$

* అంకశ్రేఢి యొక్క n వ పదము లేదా సాధారణ పదము లేదా చివరి పదము $a_n = l = a+(n-1)d$
* $a, a+d, a+2d, ...$ శ్రేఢిలో n పదాల మొత్తాన్ని కనుగొనుటకు సూత్రము

$$s_n = \frac{n}{2}\left[2a+(n-1)d\right]$$

లేదా $s_n = \frac{n}{2}\left[a+a_n\right]$

ఇక్కడ $a =$ మొదటి పదము

$a_n =$ చివరి పదము

* ఒక అంకశ్రేఢిలో మొదటి n పదాల మొత్తము s_n అయిన ఆ శ్రేఢి యొక్క n వ పదము $a_n = s_n - s_{n-1}$
* మొదటి n సహజ సంఖ్యల మొత్తము $s_n = \frac{n(n+1)}{2}$

$$1+2+3+4+..........+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

* మొదటి n సహజ సంఖ్యల వర్గాల మొత్తము $s_n = \frac{n(n+1)\,(2n+1)}{6}$

$$1^2+2^2+3^2+4^2+............+n^2 = \frac{n(n+1)\,(2n+1)}{6}$$

* మొదటి n సహజ సంఖ్యల ఘనాల మొత్తము

$$s_n = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 \text{ లేదా } \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$1^3+2^3+3^3+4^3+..........+n^3 = \left[\frac{n\left(n+1\right)}{2}\right]^2 = \frac{n^2\left(n+1\right)^2}{4}$$

* మొదటి n సహజ సంఖ్యల మొత్తము = s_1

మొదటి n సహజ సంఖ్యల వర్గాల మొత్తము $= s_2$ మరియు

మొదటి n సహజ సంఖ్యల ఘనాల మొత్తము = $= s_3$ అయిన

$9S_2^2 = S_3(1+8S_1)$ అగును. మరియు

$S_3 = S_1^2$ అగును.

* a,b,c లు $A.P.$ లో వుంటే $b = \frac{a+c}{2}$ అగును 'b'ను మరియు 'a','c'ల అంకమధ్యమం అంటారు.

గుణశ్రేఢి : ఒక జాబితాలో ప్రతిపదమును (మొదటి పదం తప్ప) దాని ముందున్న పదమునకు ఒక స్థిర సంఖ్యచే గుణించగా వచ్చు పదాల జాబితాను గుణశ్రేఢి అంటారు.

ఆ స్థిర సంఖ్యను సామాన్య నిష్పత్తి 'r' అంటాము.

* $a, ar, ar^2, ar^3, ...$ ను గుణశ్రేఢి సాధారణ రూపం అంటారు.

సామాన్య నిష్పత్తి $r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = ... = \frac{a_n}{a_{n-1}}$

* గుణశ్రేఢి యొక్క n వ పదము $a_n = ar^{n-1}$

* గుణశ్రేఢిలో n పదాల మొత్తము $s_n = \frac{a(r^n-1)}{r-1}\,(r>1)$

$$s_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}\,(r<1)$$

* గుణశ్రేఢిలో అనంత పదాల మొత్తము $s_\alpha = \frac{a}{1-r}$

* a,b,c లు $G.p$ లో వుంటే $b=\sqrt{ac}$ అగును మరియు 'b'ను 'a' మరియు 'c'ల గుణమధ్యమము అంటారు.

2 మార్కుల లెక్కలు :

1) $2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, ...$ శ్రేఢిలో సామాన్య భేదం మరియు తరువాత వచ్చే మూడు పదాలను కనుగొనుము.

జ: $2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, ...$

$a_1 = 2, a_2 = \frac{5}{2}$

సామాన్య భేదం $d = a_2 - a_1$

$= \frac{5}{2} - 2$

$= \frac{5-4}{2}$

$d = \frac{1}{2}$

సామాన్య పదము $a_n = a+(n-1)d$

$a_5 = a + 4d$

$$= 2 + 4\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$a_5 = 4$$

$$a_6 = a_5 + d$$

$$= 4 + \frac{1}{2}$$

$$a_6 = \frac{9}{2}$$

$$a_7 = a_6 + d$$

$$= \frac{9}{2} + \frac{1}{2}$$

$$a_7 = 5$$

$\therefore$ తరువాత వచ్చే మూడు పదాలు $= 4, \frac{9}{2}, 5$

2) 21,18,15,............. అంకశ్రేఢిలో ఎన్నవ పదము −81 అవుతుంది?

జ: 21,18,15............

ఇక్కడ $a = 21, d = a_2 - a_1 = 18 - 21 = -3$ మరియు $a_n = -81$

$$a_n = a + (n-1)d$$

$$-81 = 21 + (n-1)(-3)$$

$$-81 = 21 - 3n + 3$$

$$-81 = 24 - 3n$$

$$-81 - 25 = -3n$$

$$-105 = -3n$$

$$n = 35$$

$\therefore$ దత్త అంకశ్రేఢిలో 35వ పదము −81 అవుతుంది.

3) ఒక అంక శ్రేఢిలో 11వ పదము 38 మరియు 16వ పదము 73 అయిన 31వ పదమును కనుగొనుము.

జ: అంకశ్రేఢిలో nవ పదము $a_n = a + (n-1)d$

11వ పదము $a_{11} = 38$

$$a + 10d = 38........(1)$$

16వ పదము $a_{16} = 73$

$$a + 15d = 73.......(2)$$

(1) మరియు (2)లను సాధించగా

$$a + 15d = 73$$

$$a + 10d = 38$$

$$5d = 35$$

$$\boxed{d = 7}$$

$$(1) \Rightarrow a + 10(7) = 38$$

$$a + 70 = 38$$

$$a = 38 - 70$$

$$\boxed{a = -32}$$

nవ పదము $a_n = a + (n-1)d$

31వ పదము $a_{31} = a + 30d$

$$= -32 + 30(7)$$

$$= -32 + 210$$

$$a_{31} = 178$$

4) 24,21,18,........... అంకశ్రేఢిలో ఎన్ని పదాలను తీసుకున్న వాని మొత్తం 78 అవుతుంది?

జ. $a = 24, d = a_2 - a_1 = 21 - 24 = -3$

$$s_n = 78, n = ?$$

$$s_n = \frac{n}{2}\left[2a + (n-1)d\right]$$

$$78 = \frac{n}{2}\left[2(24) + (n-1)(-3)\right]$$

$$78 = \frac{n}{2}\left[48 - 3n + 3\right]$$

$$156 = n\left[51 - 3n\right]$$

$$156 = 51n - 3n^2$$

$$156 = 3(17n - n^2)$$

$$52 = 17n - n2$$

$$n^2 - 17n + 52 = 0$$

$$n^2 - 13n - 4n + 52 = 0$$

$$n(n-13) - 4(n-13) = 0$$

$$(n-4)(n-13) = 0$$

$n - 4 = 0$ లేదా $n - 13 = 0$

$n = 4$ లేదా $n = 13$

$\therefore$ పదాల సంఖ్య =4 లేదా 13.

5) $\frac{5}{2}, \frac{5}{4}, \frac{5}{8}$,........... గుణ శ్రేఢి యొక్క 20వ పదమును మరియు వ పదమును కనుగొనుము.

జ: $a = \frac{5}{2}, r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{5/4}{5/2} = \frac{5}{9} \times \frac{2}{5} = \frac{1}{2}$ ఇచ్చుట

గుణశ్రేఢిలో n వ పదము $a_n = ar^{n-1}$

20 వ పదము $a_{20} = ar^{19}$

$$= \frac{5}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{19}$$

$$= \frac{5}{2^{20}}$$

మరియు n వ పదము $a_n = ar^{n-1}$

$$= \frac{5}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$= \frac{5}{2^n}$$

6) $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, ...$ గుణశ్రేఢిలో ఎన్నవ పదము $\frac{1}{2187}$ అవుతుంది.

జ: గుణశ్రేఢి $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, ...$ లో

$$a = \frac{1}{3}, r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{1/9}{1/3} = \frac{1}{9} \times \frac{3}{1} = \frac{1}{3}$$

n వ పదము $a_n = \frac{1}{2187}$

$$ar^{n-1} = \frac{1}{2187}$$

$$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{1}{2187}$$

$$\frac{1}{3^n} = \frac{1}{2187}$$

$$3^n = 2187$$

$$3^n = 3^7$$

$$\therefore n = 7$$

గుణశ్రేఢిలో 7వ పదము $\frac{1}{2187}$ అవుతుంది.

7) ఒక గుణశ్రేఢిలో నాల్గవ పదము $\frac{2}{3}$ మరియు 7వ పదము $\frac{16}{81}$ అయిన ఆశ్రేఢిని కనుగొనుము.

జ : గుణశ్రేఢిలో n వ పదము $a_n = ar^{n-1}$

నాల్గవ పదము $a_4 = \frac{2}{3}$

$$ar^3 = \frac{2}{3} \rightarrow (1)$$

7వ పదము $a_7 = \frac{16}{81}$

$$ar^6 = \frac{16}{81} \rightarrow (2)$$

$$\frac{(2)}{(1)} \Rightarrow \frac{ar^6}{ar^3} = \frac{16/81}{2/3}$$

$$r^3 = \frac{8}{27}$$

$$r^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^3$$

$$\therefore \boxed{r = \frac{2}{3}}$$

$$\therefore (1) \Rightarrow ar^3 = \frac{2}{3}$$

$$a\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2}{3}$$

$$a \times \frac{8}{27} = \frac{2}{3}$$

$$a = \frac{2}{3} \times \frac{27}{8}$$

$$\boxed{a = \frac{9}{4}}$$

$$\therefore a_1 = a_8 = \frac{9}{4}$$

$$a_2 = ar = \frac{9}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{3}{2}$$

$$a_3 = ar^2 = \frac{9}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{9}{4} \times \frac{4}{9} = 1$$

$$a_4 = ar^3 = \frac{9}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{9}{4} \times \frac{8}{27} = \frac{2}{3}$$

$\therefore$ కావలసిన గుణశ్రేఢి $= \frac{9}{4}, \frac{3}{2}, 1, \frac{2}{3}, \ldots\ldots\ldots\ldots$

1 మార్కు లెక్కలు :

1) 3 చే భాగించబడే రెండంకెల సంఖ్యలు ఎన్ని?

జ : 3చే భాగించబడే రెండంకెల సంఖ్యల జాబితా : 12,15,18,....................99

ఇది ఒక అంకశ్రేఢి

ఇచ్చుట $a=12, d=a_2-a_1=15-12=3, a_n=99$

$$a_n=a+(n-1)d$$
$$99=12+(n-1)3$$
$$99-12=(n-1)3$$
$$87=(n-1)3$$
$$29=n-1$$
$$n=30$$

$\therefore$ 3చే భాగించబడే రెండంకెల సంఖ్యల సంఖ్య=30

2) 3,8,13,.....................253 అంకశ్రేఢి యొక్క చివరి నుంచి 20వ పదమును కనుగొనుము.

జ: దత్త అంకశ్రేఢి :3,8,13,............,253

253,....................13,8,3 తీసుకొనగా

$a=253$

$d-3-8=-5$

$\therefore n$ వ పదము $a_n=a+(n-1)d$

20వ పదము $a_{20}=a+19d$

$$=253+19(-5)$$
$$=253-95$$
$$a_{20}=158$$

3,8,13,............253 అంకశ్రేఢి యొక్క చివరి నుండి 20వ పదము =158

3) మొదటి 1000 ధనపూర్ణసంఖ్యల మొత్తమును కనుగొనుము.

జ: $S=1+2+3+..........+1000$

$$S_n=\frac{n}{2}\left[a+l\right]$$

$$S_{1000}=\frac{1000}{2}\left[1+1000\right]$$

$$=500\times1001$$
$$=500500$$

(లేదా)

మొదటి n సహజ సంఖ్యల మొత్తము $S_n=\frac{n(n+1)}{2}$

మొదటి 1000 సహజ సంఖ్యల మొత్తము $S_{1000} = \frac{1000(1000+1)}{2}$

$$= \frac{1000 \times 1001}{2}$$

$$= 500500$$

4) $a = 256,\ r = -\frac{1}{2}$ అయిన గుణశ్రేఢిని రాయుము?

జ: గుణశ్రేఢి సాధారణ రూపము= $a, ar, ar^2, ar^3, \ldots\ldots\ldots\ldots$

$$= 256, 256\left(-\frac{1}{2}\right), 256\left(-\frac{1}{2}\right)^2, 256\left(-\frac{1}{2}\right)^3 \ldots\ldots\ldots$$

$$= 256, -128, 64, -32, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

5) $x, x+2, x+6$ లు ఒక గుణశ్రేఢిలో మూడు వరుస పదాలైన x విలువను కనుగొనుము?

జ: గుణశ్రేఢిలో మూడు వరుస పదాలు $x, x+2, x+6$

గుణశ్రేఢిలో $\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2}$ అగును.

$$\therefore \quad \frac{x+2}{x} = \frac{x+6}{x+2}$$

$$(x+2)^2 = x(x+6)$$

$$x^2 + 4x + 4 = x^2 + 6x$$

$$4x + 4 = 6x$$

$$4 = 6x - 4x$$

$$4 = 2x$$

$$x = 2$$

6) $2, 2\sqrt{2}, 4, \ldots\ldots\ldots$ గుణశ్రేఢిలో ఎన్నవ పదము 128 అవుతుంది?

జ: $2, 2\sqrt{2}, 4, \ldots\ldots\ldots$

ఇచ్చట $a = 2, r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2},\ a_n = 128, n = ?$

$$a_n = ar^{n-1}$$

$$128 = 2\left(\sqrt{2}\right)^{n-1}$$

$$64 = \left(\sqrt{2}\right)^{n-1}$$

$$64 = \left(2^{1/2}\right)^{n-1}$$

$$64 = 2^{\frac{n-1}{2}}$$

$$2^6 = 2^{\frac{n-1}{2}}$$

$$6 = \frac{n-1}{2}$$

$$12 = n-1$$

$$n = 13$$

$\therefore$ గుణశ్రేఢిలో 13వ పదము 128 అవుతుంది.

7) గుణశ్రేఢిలో $25, -5, 1, -\frac{1}{5}$ యొక్క సామాన్య నిష్పత్తి కనుగొనుము.

జ: $25, -5, 1, -\frac{1}{5}$ గుణశ్రేఢిలో

సామాన్య నిష్పత్తి $r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{-5}{25} = -\frac{1}{5}$

4 మార్కుల లెక్కలు :

1) ఒక టెలివిజన్ తయారీ కంపెనీ 3వ సం॥లో 600 టెలివిజన్లు, 7వ సం॥ము 700 సెట్లను తయారు చేసింది. ఇది తయారు చేసే టెలివిజన్ల సంఖ్య ప్రతి సంవత్సరము స్థిరముగా పెరుగుతూ వుంటే

   i) 1వ సంవత్సరములో అది తయారు చేసిన టెలివిజన్ల సంఖ్య

   ii) 10వ సంవత్సరములో అది తయారు చేసిన టెలివిజన్ల సంఖ్య

   iii) మొదటి 7సంవత్సరాలలో అది తయారు చేసిన మొత్తం సెట్ల సంఖ్యను కనుగొనుము.

జ: కంపెని తయారు చేసే టెలివిజన్ల సంఖ్య ప్రతి సంవత్సరము స్థిరంగా పెరుగుతూ వుంటే ఈ జాబితా ఒక అంకశ్రేఢిని ఏర్పరుస్తుంది. n వ సంవత్సరములో తయారు చేసే టెలివిజన్ సెట్ల సంఖ్యను a_n అనుకొనిన

$$a_3 = 600$$

$$a + 2d = 600 ....(1)$$

$$a_7 = 700$$

$$a + 6d = 700 ....(2)$$

(1) మరియు (2) లను సాధించగా

$$a + 6d = 700$$

$$a + 2d = 600$$

$$4d = 100$$

$$\boxed{d = 25}$$

$$(1) \Rightarrow \quad a + 2d = 600$$

$$a + 2(25) = 600$$

$$a+50=600$$
$$a=600-50$$
$$\boxed{a=550}$$

i) 1వ సంవత్సరములో తయారైన టెలివిజన్ సెట్ల సంఖ్య =550

ii) 10వ సంవత్సరములో తయారైన టెలివిజన్ల సంఖ్య $a_{10}=a+9d$

$$=550+9(25)$$
$$=550+225$$
$$=775$$

$\therefore$ 10వ సంవత్సరములో తయారైన టెలివిజన్ల సంఖ్య=775

iii) మొదటి 7 సంవత్సరాలలో తయారు చేసిన మొత్తము టెలివిజన్ల సంఖ్య $s_n=\frac{n}{2}\left[2a+(n-1)d\right]$

$$s_7=\frac{7}{2}\left[2(550)+(7-1)25\right]$$
$$=\frac{7}{2}\left[1100+150\right]$$
$$=\frac{7}{2}\times 1250$$
$$=7\times 625$$
$$=4375$$

$\therefore$ మొదటి 7 సంవత్సరాలలో తయారు చేసిన మొత్తం టెలివిజన్ల సంఖ్య =4375

2) 162,54,18,................. గుణశ్రేఢి మరియు $\frac{2}{81},\frac{2}{27},\frac{2}{9}$......... గుణశ్రేఢుల nవ పదాలు సమానము అయిన n విలువను కనుగొనుము.

జ: 162,54,18,............. గుణశ్రేఢిలో

$$a=162, r=\frac{a_2}{a_1}=\frac{54}{162}=\frac{1}{3}$$

గుణశ్రేఢిలో nవ పదము $a_n=ar^{n-1}$

$$a_n=162\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$\frac{2}{81},\frac{2}{27},\frac{2}{9},$............. గుణశ్రేఢిలో

$$a=\frac{2}{81}, r=\frac{a_2}{a_1}=\frac{2/27}{2/81}=\frac{2}{27}\times\frac{81}{2}=3$$

గుణశ్రేఢిలో n పదము $a_n = ar^{n-1}$

$$a_n = \frac{2}{81}(3)^{n-1}$$

లెక్క ప్రకారం

$$162\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{2}{81}3^{n-1}$$

$$162 \times \frac{2}{81} = 3^{n-1} \times 3^{n-1}$$

$$81 \times 81 = 3^{2n-2}$$

$$3^8 = 3^{2n-2}$$

$$8 = 2n - 2$$

$$8 + 2 = 2n$$

$$10 = 2n$$

$$\boxed{n = 5}$$

3) ప్రతి గంటకు 3 రెట్లు అయ్యే ఒక బ్యాక్టీరియా కల్చర్‌లో మొదటి గంటలో 30 బ్యాక్టీరియాలు వున్న 4వ గంట సమయంలో వుండే బ్యాక్టీరియాల సంఖ్య ఎంత? 10వ గంటలో వుండే బ్యాక్టీరియాల సంఖ్య ఎంత? 20వ గంట సమయంలో వున్న బ్యాక్టీరియాల సంఖ్య ఎంత? nవ గంట సమయంలో వుండే బ్యాక్టీరియాల సంఖ్య ఎంత?

జ : మొదటి గంటలో బ్యాక్టీరియాల సంఖ్య=30

ప్రతి గంటకు బ్యాక్టీరియాల సంఖ్య 3 రెట్లు అయితే

రెండవ గంటలో బ్యాక్టీరియాల సంఖ్య =3×30=90

మూడవ గంటలో బ్యాక్టీరియాల సంఖ్య =3×90=270

నాల్గవ గంటలో బ్యాక్టీరియాల సంఖ్య = 3×270=810

$\therefore$ 30,90,270,810,................. ఒక గుణశ్రేఢిని ఏర్పరచును.

ఇక్కడ $a = 30, r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{90}{30} = 3$

nవ పదము $a_n = ar^{n-1}$

10వ గంటలో బ్యాక్టీరియాల సంఖ్య $a_{10} = ar^9$

$$= 30(3)^9$$

20వ గంటలో బ్యాక్టీరియాల సంఖ్య $a_{20} = ar^{19}$

$$= 30(3)^{19}$$

nవ గంటలో బ్యాక్టీరియాల సంఖ్య $a_n = ar^{n-1}$

$$= 30\,(3)^{n-1}$$

4) ఒక పాఠశాలలో విద్యా విషయక సంబంధిత విషయాలలో అత్యున్నత ప్రతిభ కనపరచిన వారికి మొత్తం 700

రూపాయలకు 7 బహుమతులు ఇవ్వాలని భావించారు. ప్రతి బహుమతి విలువ దాని ముందున్న దానికి రూ.20 తక్కువ అయిన ప్రతి బహుమతి విలువను కనుగొనుము?

జ: ప్రతి బహుమతి విలువలో మొదటిది = x అనుకొనిన

ప్రతి బహుమతి విలువ దాని ముందున్న దానికి రూ.20 తక్కువ

$\therefore$ తరువాత బహుమతులు $x-20, x-40, x-60$............ అగును.

7 బహుమతుల అంకశ్రేఢి : $x, x-20, x-40, x-60$............ అగును.

ఇక్కడ $a = x, d = a_2 - a_1 = x - 20 - x = -20$

$s_7 = 700, n = 7$

n పదాల మొత్తము $s_n = \frac{n}{2}\left[2a + (n-1)d\right]$

$$s_7 = \frac{7}{2}\left[2x + (7-1)(-20)\right]$$

$$700 = \frac{7}{2}\left[2x - 120\right]$$

$$1400 = 7 \times 2\left[x - 60\right]$$

$$100 = x - 60$$

$$x = 160$$

$\therefore$ 7 బహుమతులు విలువలు వరుసగా 160,140,120,100,80,60,40 అగును.

5) ఒక అంకశ్రేఢిలో 4వ మరియు 8వ పదాల మొత్తము 24 మరియు 6వ, 10వ పదాల మొత్తము 44 అయిన మొదటి మూడు పదాలను కనుగొనుము?

జ : అంకశ్రేఢిలో nవ పదము $a_n = a + (n-1)d$

4వ పదము $a_4 = a + 3d$

8వ పదము $a_8 = a + 7d$

లెక్క ప్రకారం

$$a_4 + a_8 = 24$$

$$a + 3d + a + 7d = 24$$

$$2a + 10d = 24$$

$$2(a + 5d) = 24$$

$$a + 5d = 12 \rightarrow (1)$$

6వ పదము $a_6 = a + 5d$

10వ పదము $a_{10} = a + ad$

లెక్క ప్రకారం

$$a_6 + a_{10} = 44$$

$$a + 5d + a + 9d = 44$$

$$2a + 14d = 44$$

$$2(a+7d)=44$$

$$a+7d=22 \rightarrow (2)$$

(1) మరియు (2)లను సాధించగా

$$a+7d=22$$

$$\underline{a+5d=12}$$

$$2d=10$$

$$\boxed{d=5}$$

$$(1) \Rightarrow a+5(5)=12$$

$$a+25=12$$

$$a=12-25$$

$$\boxed{a=-13}$$

మొదటి పదము $a=-13$

రెండవ పదము $a_2=a+d=-13+5=-8$

మూడవ పదము $a_3=a+2d=-13+2(5)=-13+10=-3$

$\therefore$ అంకశ్రేఢిలోని మొదటి మూడు పదాలు −13,−8,−3, అగును.

6) రెండు అంకశ్రేఢిల సామాన్య భేదం సమానము. వాని 100వ పదాల మధ్య భేదం 100 అయిన వాని 1000వ పదాల మధ్య భేదమెంత?

జ : రెండు అంకశ్రేఢుల సామాన్య భేదం= d అనుకొనుము.

1వ, 2వ అంకశ్రేఢులలో మొదటి పదాలు వరుసగా x మరియు y అనుకొనుము.

nవ పదము $a_n=a+(n-1)d$

1వ $A.P.$ లో 100వ పదము $=x+99d$

2వ $A.P.$ లో 100వ పదము $=y+99d$

లెక్క ప్రకారం

$$(x+99d)-(y+99d)=100$$

$$x+99d-y-99d=100$$

$$x-y=100 \rightarrow (1)$$

1వ $A.P.$ లో 1000వ పదము $=x+999d$

2వ $A.P.$ లో 1000వ పదము $=y+999d$

1వ, 2వ $A.P.$ లలో 1000వ పదాల బేధము

$$=(x+999d)-(y+999d)$$

$$=x+999d-y-999d$$

$$=x-y$$

సమీకరణ (1) నుండి

$$x - y = 100$$

$\therefore$ రెండు అంకశ్రేఢుల 1000వ పదాల మధ్య భేదము =100

PART-B

I) బహుళైచ్ఛిక ప్రశ్నలు

1) $\frac{1}{3}, \frac{5}{3}, \frac{9}{3}, \frac{13}{3}, \ldots\ldots$ అంకశ్రేఢి యొక్క సామాన్య భేదము ______ ( )

a) 4 b) $\frac{2}{3}$ c) $\frac{4}{3}$ d) $-\frac{3}{4}$

2) క్రింది వాటిలో అంకశ్రేఢి ఏది ______ ( )

a) $2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, \ldots\ldots$ b) $0.2, 0.22, 0.222, \ldots\ldots$

c) $a, a^2, a^3, a^4, \ldots\ldots$ d) $\sqrt{3}, \sqrt{6}, \sqrt{9}, \sqrt{12}, \ldots\ldots$

3) 5,1,−3,−7,........ అంకశ్రేఢి యొక్క 10వ పదము ______ ( )

a) -25 b) -12 c) 0 d) -31

4) ఒక అంకశ్రేఢిలో $a_1 = 2, a_3 = 26$ అయిన $a_2 =$ ______ ( )

a) 16 b) 14 c) 12 d) 18

5) క్రింది వానిలో గుణశ్రేఢి కానిది ______ ( )

a) 1,4,9,16,....... b) 1,-1,1,-1,1,.............

c) -4,-20,-100,-500,.......... d) $\frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{64}, \frac{1}{256}, \ldots\ldots$

6) ఒక గుణశ్రేఢిలో $a = 9, r = \frac{1}{3}$ అయితే $a_7 =$ ______ ( )

a) $\frac{1}{243}$ b) $\frac{1}{9}$ c) $\frac{1}{27}$ d) $\frac{1}{81}$

7) 2 మరియు 8ల యొక్క అంకమధ్యమము ______ ( )

a) 10 b) 16 c) 5 d) 4

8) $x + b, x + 3b, x + 5b, \ldots\ldots$ అంకశ్రేఢి యొక్క 6వ పదము ______ ( )

a) $x + 13b$ b) $x + 8b$ c) $x + 11b$ d) $x + 7b$

9) x, y, z లు అంకశ్రేఢిలో వుంటే $2y =$ ______ ( )

a) $x - z$ b) $x + z$ c) $\frac{x+z}{2}$ d) $\sqrt{xz}$

10) ఒక అంకశ్రేఢి యొక్క n వ పదము $2n+5$ అయితే మొదటి పదము______________ (   )

a) 9 b) 11 c) 5 d) 7

11) ఒక గుణశ్రేఢి యొక్క n వ పదము $2(0.5)^{n-1}$ అయితే సామాన్య నిష్పత్తి=__________ (   )

a) 2 b) 1 c) $n-1$ d) 0.5

12) a, b, c లు గుణశ్రేఢిలో వుంటే ______________ (   )

a) $b-a=c-b$ b) $b=a+c$ c) $b^2=ac$ d) $b=\frac{a+c}{2}$

II) ఖాళీలను పూరించండి.

1) $a+2, a, a-2$ ల అంకమధ్యమము ______________

2) $t_n=\frac{n}{n+1}$ అయితే $\frac{1}{9}=$______________

3) $\frac{x}{y}, \frac{1}{x}, \frac{y}{x^3}, \ldots\ldots\ldots\ldots$లో తరువాతి పదము______________

4) $2a-b, 4a-3b, 6a-5b, \ldots\ldots\ldots$ శ్రేఢి యొక్క సామాన్య భేదము______________

5) 0 మరియు 100 ల మధ్య గల బేసి సంఖ్యల సంఖ్య ______________

6) మొదటి n సరి సహజ సంఖ్యల మొత్తము______________

7) ఒక శ్రేఢి యొక్క n వ పదము $a_n=\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ అయిన మూడవ పదము______________

8) −3+6−12+24−48+………… శ్రేఢిలో 9వ పదము______________

9) $(a-1)+(a-2)+(a-3)+\ldots\ldots\ldots\ldots$ శ్రేఢి యొక్క n వ పదము______________

10) $1^3+2^3+3^3+4^3+5^3+\ldots\ldots\ldots+50^3=$______________

III) జత పరచుము.

	A		B
1)	అంకశ్రేఢిలో nవ పదము	( )	(a) $\frac{a(r^n-1)}{r-1}$
2)	గుణశ్రేఢిలో nవ పదము	( )	(b) ar^{n-1}
3)	అంకశ్రేఢిలో n పదాల మొత్తము	( )	(c) $a+(n-1)d$
4)	గుణశ్రేఢిలో n పదాల మొత్తము	( )	(d) $\frac{n}{2}\left[2a+(n-1)d\right]$

5) మొదటి n సహజ సంఖ్యల మొత్తము ( ) (e) $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(f) $\frac{n(n+1)}{2}$

(g) $\frac{a+b}{2}$

సమాధానాలు :

I) 1) c 2) a 3)d 4) b 5) a 6) d

7) c 8) c 9) b 10) d 11) d 12) c

II) 1) a 6) $n(n+1)$

2) $\frac{9}{10}$ 7) $\frac{1}{9}$

3) $\frac{y^2}{x^5}$ 8) -768

4) $2a-2b$ 9) $a-n$

5) 50 10) 1625625

III) 1) c

2) b

3) d

4) a

5) f

Prepared by :
K. Kiran Kumar Reddy
ZPHS, D.Nandyala

7. నిరూపక రేఖాగణితము

1. $(x_1,0),(x_2,2)$ బిందువుల మధ్య దూరము = $|x_2 - x_1|$
2. $(0,y_1),(0,y_2)$ బిందువులను కలిపే రేఖా ఖండం పొడవు= $|y_2 - y_1|$
3. $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$ బిందువుల మధ్య దూరం = $=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$
4. విభజన సూత్రం : $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$ బిందువులను కలిపే రేఖా ఖండాన్ని $m_1:m_2$ నిష్పత్తిలో అంతరంగా

   విభజించే బిందువు నిరూపకాలు $=\left(\dfrac{m_1x_2+m_2x_1}{m_1+m_2},\dfrac{m_1y_2+m_2y_1}{m_1+m_2}\right)$

   నిష్పత్తి $k:1$ అయితే నిరూపకాలు $=\left(\dfrac{kx_2+x_1}{k+1},\dfrac{ky_2+y_1}{k+1}\right)$
5. $(x_1,y_1),(x_2,y_2),(x_3,y_3)$లు శీర్షాలుగా గల
   త్రిభుజ మధ్యగత రేఖల మిళిత బిందువు= త్రిభుజ గురుత్వ కేంద్రము

   $$=\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$$
6. $(x_1,y_1),(x_2,y_2),(x_3,y_3)$లు శీర్షాలుగా గల త్రిభుజ వైశాల్యం

   $$=\frac{1}{2}|x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)|$$
7. హీరోన్ సూత్రము :

   త్రిభుజ వైశాల్యం $A=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, ఇచ్చట $s=\dfrac{a+b+c}{2}$
8. $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$ లను కలిపే రేఖ వాలు $m=\tan\theta=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

1 మార్కు ప్రశ్నలు :

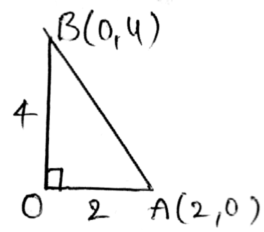
1. (−4,0), (6,0) బిందువుల మధ్య దూరం ఎంత?

సాధన : (−4,0), (6,0) బిందువుల మధ్య దూరం= $|x_2-x_1|=|6-(-4)|=|6+4|=10$ యూనిట్లు

2. $A(2,0),B(0,4)$ బిందువుల మధ్య దూరాన్ని కనుగొనండి.

సాధన : పైథాగరస్ సిద్ధాంతం ప్రకారం $AB^2=OA^2+OB^2$

$$=2^2+4^2$$
$$=4+16$$
$$=20$$



$\therefore AB=\sqrt{20}=\sqrt{4\times5}=2\sqrt{5}$ యూనిట్లు

మరొక పద్ధతి : $A(2,0), B(0,4)$

$$\text{మధ్యదూరం } AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(0-2)^2+(4-0)^2}$$

$$=\sqrt{(-2)^2+(4)^2}=\sqrt{4+16}=\sqrt{20}$$

3. (3,2) కేంద్రంగా కలిగి (−5,6) బిందువు గుండా పోయే వృత్త వ్యాసార్థాన్ని కనుకోండి.

సాధన : వృత్త వ్యాసార్థం = (3,2),(−5,6) ల మధ్య దూరం

$$\begin{array}{cc} (-5,6) & (3,2) \\ x_1 \; y_1 & x_2 \; y_2 \end{array}$$

$$=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

$$=\sqrt{[3-(-5)]^2+(2-6)^2}$$

$$=\sqrt{(3+5)^2+(-4)^2}=\sqrt{8^2+4^2}=\sqrt{64+16}=\sqrt{80}=\sqrt{16\times 5}=4\sqrt{5}$$

$\therefore$ వ్యాసార్థం $=4\sqrt{5}$ యూనిట్లు

4. (−4,6), (2,−2), (2,5) లు శీర్షాలుగా గల త్రిభుజ గురుత్వ కేంద్రం కనుక్కోండి.

సా : $(-4,6),(2,-2),(2,5)$ లు శీర్షాలుగా గల త్రిభుజ గురుత్వ కేంద్రం

$x_1 \; y_1 \; x_2 \; y_2 \; x_3 \; y_3$

$$=\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$$

$$=\left(\frac{-4+2+2}{3},\frac{6+(-2)+5}{3}\right)=\left(\frac{-4+4}{3},\frac{11-2}{3}\right)=\left(\frac{0}{3},\frac{9}{3}\right)$$

$$=(0,3)$$

5. $P(2,5), Q(x,3)$లను కలిపే రేఖ వాలు 2 అయితే x విలువ ఎంత?

సా : దత్త బిందువులు= $P(2,5), Q(x,3)$

$$PQ \text{ వాలు } =\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=2$$

$$\therefore \frac{3-5}{x-2}=2 \Rightarrow \frac{-2}{x-2}=2$$

$$\Rightarrow \frac{-2}{2}=x-2$$

$$\Rightarrow -1=x-2$$

$$\Rightarrow x=-1+2=1$$

$$\therefore x=1$$

2 మార్కుల ప్రశ్నలు :

1. $(x,7),(1,15)$ బిందువుల మధ్య దూరం 10 యూనిట్లు అయితే విలువను కనుక్కోండి.

సా : $(x,7),(1,15)$ ల మధ్య దూరం $=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=10$

$x_1 \; y_1 \; x_2 \; y_2$

$$\therefore \sqrt{(1-x)^2+(15-7)^2}=10$$

$$\Rightarrow \sqrt{(1-x)^2+8^2}=10$$

$$\Rightarrow \sqrt{(1-x)^2+64}=10$$

రెండు వైపులా వర్గం చేయగా

$$(1-x)^2+64=100$$

$$\therefore (1-x)^2=100-64=36$$

$$\therefore 1-x=\sqrt{36}=\pm 6$$

(a) $1-x=6$ అయితే $-x=6-1=5 \Rightarrow x=-5$

(a) $1-x=6$ అయితే $-x=-6-1=-7 \Rightarrow x=7$

2. (3,5), (8,10) బిందువులను కలిపే రేఖా ఖండాన్ని 2:3 నిష్పత్తిలో అంతరంగా విభజించే బిందువు నిరూపకాలను కనుక్కోండి.

సా : దత్త బిదువులు $=(3,5), (8,10),$ నిష్పత్తి $=2:3$

$x_1 \; y_1 \; x_2 \; y_2$ $\quad m_1 \; m_2$

కావలసిన బిందువు $=\left(\dfrac{m_1x_2+m_2x_1}{m_1+m_2}, \dfrac{m_1y_2+m_2y_1}{m_1+m_2}\right)$

$$=\left(\frac{2\times 8+3\times 3}{2+3}, \frac{2\times 10+3\times 5}{2+3}\right)$$

$$=\left(\frac{16+9}{5}, \frac{20+15}{5}\right)$$

$$=\left(\frac{25}{5}, \frac{35}{5}\right)$$

$$=(5,7)$$

3. $A(-6,10), B(3,-8)$ లను కలిపే రేఖా ఖండాన్ని (–4,6) బిందువు విభజించే నిష్పత్తి 2:7 అని లహరి, 7:2 అని రూప అన్నారు. వీరిలో నీవు ఎవరిని సమర్థిస్తావు? ఎందుకు?

సా : కావలసిన నిష్పత్తి $=m_1:m_2$ అనుకుందాం.

(–6,–0), (3,–8) లను కలిపే రేఖా ఖండాన్ని $m_1:m_2$ నిష్పత్తిలో విభజించే

బిందువు = $\left(\frac{m_1x_2+m_2x_1}{m_1+m_2}, \frac{m_1y_2+m_2y_1}{m_1+m_2}\right)=(-4,6)$

$$\therefore \left(\frac{m_1\times 3+m_2(-6)}{m_1+m_2}, \frac{m_1\times -8+m_2\times 10}{m_1+m_2}\right)=(-4,6)$$

$x-$ నిరూపకాలను సమానం చేయగా

$$\frac{3m_1-6m_2}{m_1+m_2}=-4 \Rightarrow 3m_1-6m_2=-4m_1-4m_2$$

$$\Rightarrow 3m_1+4m_1=-4m_2+6m_2$$

$$\Rightarrow 7m_1=2m_2$$

$$\Rightarrow \frac{m_1}{m_2}=\frac{2}{7}$$

$\therefore$ కావలసిన నిష్పత్తి = $2:7$

కావున నేను లహరిని సమర్థిస్తాను.

4. ఒక బిందువు నిరూపకాలు సమానం. ఆ బిందువు (1,0), (0,3) ల నుండి సమాన దూరంలో ఉంటే దాని నిరూపకాలను కనుక్కోండి.

సా : కావలసిన బిందువు = (x,x) అనుకుందాం.

$(x,x),(1,0)$ ($x_1\ y_1$ $x_2\ y_2$) ల మధ్య దూరం $=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

$$=\sqrt{(1-x)^2+(0-x)^2}$$

$$=\sqrt{(1-x)^2+x^2}$$

$(x,x),(0,3)$ ల మధ్య దూరం $=\sqrt{(0-x)^2+(3-x)^2}$

$$=\sqrt{x^2+(3-x)^2}$$

(x,x) బిందువు (1,0), (0,3) ల నుండి సమాన దూరంలో ఉంది.

$$\therefore \sqrt{(1-x)^2+x^2}=\sqrt{x^2+(3-x)^2}$$

ఇరువైపులా వర్గం చేయగా,

$$(1-x)^2+x^2=x^2+(3-x)^2$$

$$\therefore (1-x)^2-(3-x)^2=x^2-x^2=0$$

$$\therefore (1-x+3-x)(1-x-3+x)=0 \qquad \left[a^2-b^2=(a+b)(a-b)\right]$$

$$\therefore (4-2x)(-2)=0$$

$$\therefore 4-2x=0$$

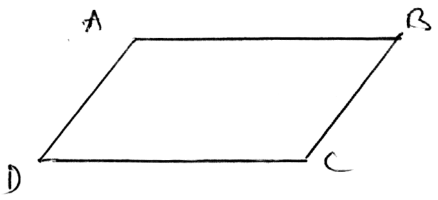
$$-2x = -4$$

$$x = \frac{-4}{-2} = 2$$

$\therefore$ కావలసిన బిందువు = $(2,2)$

5) శ్రీజకు తన ఇంటిలో ఒక నిధికి ఆధారమైన పాత మ్యాపు దొరికింది. పటం (మ్యాపు)లోని స్కేలు ప్రకారం $(3,5)$, $(-5,-4)$, $(7,10)$ బిందువులు సూచించే స్థానాలలోని విగ్రహాలు, నిధి స్థానం ఒక సమాంతర చతుర్భుజాన్ని ఏర్పరుస్తాయి. అయితే నిధి స్థానాన్ని సూచించే ప్రాంతంలో పటం పాడై పోయి వుంది. శ్రీజకు నిధి స్థానాన్ని నిర్ణయించేందుకు సహాయపడండి. (నిధి స్థానాన్ని సూచించే బిందువును కనుగొనండి).

సా : దత్త బిందువులు



$= A(3,5)$, $B = (-5,-4)$, $C = (7,10)$ అనుకుందాం.

నిధి స్థానాన్ని సూచించు బిందువు $D = (x, y)$ అనుకుందాం.

A, B, C, D లు సమాంతర చతుర్భుజాన్ని ఏర్పరుస్తాయి.

$\therefore AC$ మధ్య బిందువు = BD మధ్య బిందువు (కర్ణాల మధ్య బిందువులు)

AC మధ్య బిందువు $= \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$

$(3,5), (7,10)$
$x_1\ y_1\quad x_2\ \ y_2$

$$= \left(\frac{3+7}{2}, \frac{5+10}{2}\right) = \left(\frac{10}{2}, \frac{15}{2}\right)$$

BD మధ్య బిందువు $= \left(\frac{-5+x}{2}, \frac{-4+y}{2}\right)$

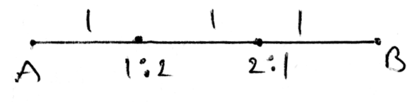
$(-5,-4), (x, y)$
$x_1\ \ y_1\quad x_2\ \ y_2$

లెక్క ప్రకారం $= \left(\frac{-5+x}{2}, \frac{-4+y}{2}\right) = \left(\frac{10}{2}, \frac{15}{2}\right)$

$\therefore \frac{-5+x}{2} = \frac{10}{2}$ మరియు $\frac{-4+y}{2} = \frac{15}{2}$

$\therefore -5 + x = 10$ మరియు $-4 + y = 15$

$\therefore x = 10 + 5 = 15$ మరియు $y = 15 + 4 = 19$



$\therefore$ నిధి స్థానాన్ని సూచించు బిందువు = $(15,19)$

6. $(-3,-5)$, $(-6,-8)$ లను కలిపే రేఖా ఖండానికి త్రిధాకరణ బిందువులను కనుక్కోండి.

సా : దత్త బిందువులు $= A(-3,-5)$, $B = (-6,-8)$ అనుకుందాం.

త్రిధాకరణ బిందువులు అనగా AB ని

$1:2$ మరియు $2:1$ నిష్పత్తిలో విభజించు బిందువులు

(a) $(-3,-5), (-6,-8)$, నిష్పత్తి $1:2$

$\therefore$ కావలసిన బిందువు $=\left(\frac{m_1x_2+m_2x_1}{m_1+m_2},\frac{m_1y_2+m_2y_1}{m_1+m_2}\right)$

$$=\left(\frac{1\times(-6)+2\times(-3)}{1+2},\frac{1\times(-8)+2\times(-5)}{1+2}\right)$$

$$=\left(\frac{-6-6}{3},\frac{-8-10}{3}\right)$$

$$=\left(\frac{-12}{3},\frac{-18}{3}\right)$$

$$=(-4,-6)$$

(b) $(-3,-5),(-6,-8)$, నిష్పత్తి $m_1:m_2=2:1$

6. కావలసిన బిందువు $=\left(\frac{2\times(-6)+1\times(-3)}{2+1},\frac{2\times(-8)+1\times(-5)}{2+1}\right)$

$$=\left(\frac{-12-3}{3},\frac{-16-5}{3}\right)$$

$$=\left(\frac{-15}{3},\frac{-21}{3}\right)$$

$$=(-5,-7)$$

$\therefore$ త్రిథాకరణ బిందువులు = (−4,−6), (−5,−7)

7. (1,−1), (4,1), (−2,−3) బిందువులు సరేఖీయాలని కీర్తన, త్రిభుజాన్ని ఏర్పరుస్తాయని సంయుక్త వాధిస్తున్నారు. ఎవరి వాదన సరైనదో తేల్చండి.

సా : దత్త బిందువులు $=(1,-1),(4,1),(-2,-3)$

$$x_1\ y_1\quad x_2\ y_2\quad x_3\ y_3$$

దత్త బిందువులతో ఏర్పడే త్రిభుజ వైశాల్యం

$$=\frac{1}{2}\left|x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)\right|$$

$$=\frac{1}{2}\left|1[1-(-3)]+4[-3-(-1)]+(-2)(-1-1)\right|$$

$$=\frac{1}{2}\left|1(1+3)+4(-3+1)-2(-2)\right|$$

$$=\frac{1}{2}\left|1(4)+4(-2)+4\right|$$

$$=\frac{1}{2}\left|4-8+4\right|$$

$$=\frac{1}{2}\left|0\right|$$

$\therefore$ దత్త బిందువులు సరేఖీయాలు.
కావున కీర్తన వాదన సరైనది.

8. $(k,k),(2,3),(4,-1)$ లు సరేఖీయాలైతే k విలువను కనుక్కోండి.

సా : $A=(k,k), B=(2,3), C=(4,-1)$ అనుకుందాం.

$$\triangle ABC \text{ వైశాల్యం } = \frac{1}{2}\left|x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)\right|$$

$$=\frac{1}{2}\left|k\left[3-(-1)\right]+2(-1-k)+4(k-3)\right|$$

$$=\frac{1}{2}\left|k(3+1)-2-2k+4k-12\right|$$

$$=\frac{1}{2}\left|4k-14+2k\right|$$

$$=\frac{1}{2}\left|6k-14\right|$$

A,B,C లు సరేఖీయాలు కావున వైశాల్యం $=0 \Rightarrow \frac{1}{2}\left|6k-14\right|=0$

$$\Rightarrow 6k-14=0$$

$$\Rightarrow k=\frac{14}{6}=\frac{7}{3}$$

9. $(5,-6)$, $(-1,-4)$ లను కలిపే రేఖా ఖండాన్ని y –అక్షం ఏ నిష్పత్తిలో విభజించును? విభజన బిందువును కూడా కనుక్కోండి.

సా : దత్త బిందువులు $=(5,-6), (-1,-4)$

$$\quad x_1 \quad y_1 \quad x_2 \quad y_2$$

y – అక్షం విభజించే నిష్పత్తి = $k:1$ అనుకుందాం.

$(5,-6)$, $(-1,-4)$ లను కలిపే రేఖా ఖండాన్ని $k:1$ నిష్పత్తిలో విభజించు బిందువు

$$=\left(\frac{kx_2+x_1}{k+1},\frac{ky_2+y_1}{k+1}\right)$$

$$=\left(\frac{k(-1)+5}{k+1},\frac{k(-4)+(-6)}{k+1}\right)$$

$$=\left(\frac{-k+5}{k+1},\frac{-4k-6}{k+1}\right)$$

ఈ బిందువు y అక్షంపై ఉంది కావున x నిరూపకం=0

$$\therefore \frac{-k+5}{k+1}=0 \Rightarrow -k+5=0$$

$$\Rightarrow k=5$$

$$\therefore k:1=5:1$$

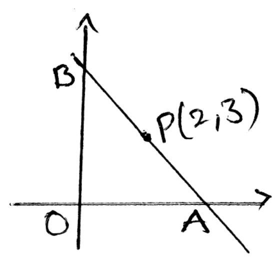
$\therefore$ కావలసిన నిష్పత్తి : $5:1$

$k=5$ ను ప్రతిక్షేపిస్తే, విభజన బిందువు $=\left(0,\dfrac{-4\times5-6}{5+1}\right)$

$$=\left(0,\frac{-20-6}{6}\right)$$

$$=\left(0,\frac{-26}{6}\right)$$

$$=\left(0,\frac{-13}{3}\right)$$



10. ప్రక్క పటంలో AB మధ్య బిందువు $=P(2,3)$ అయిన A,B ల నిర

సా: $A=(x,0),\ B=(0,y)$ అనుకుందాం.

AB మధ్య బిందువు $=\left(\dfrac{x_1+x_2}{2},\dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$

$$=\left(\frac{x+0}{2},\frac{0+y}{2}\right)$$

$$=\left(\frac{x}{2},\frac{y}{2}\right)$$

కానీ మధ్య బిందువు=(2,3)

$\therefore\left(\dfrac{x}{2},\dfrac{y}{2}\right)=(2,3)$

$\Rightarrow\dfrac{n}{2}=2$ మరియు $\dfrac{y}{2}=3$

$\Rightarrow x=4$ మరియు $y=6$

$\therefore A=(4,0),\ B=(0,6)$

11. (6,8), (2,4) ల మధ్య బిందువు నుండి (1,2)కు గల దూరం కనుగొనుము.

సా : (6,8), (2,4) ల మధ్య బిందువు $=\left(\dfrac{x_1+x_2}{2},\dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$

$$=\left(\frac{6+2}{2},\frac{8+4}{2}\right)$$

$$=\left(\frac{8}{2},\frac{12}{2}\right)$$

$$=(4,6)$$

$\therefore\underset{x_1\ \ y_1}{(4,6)}$ నుండి $\underset{x_2\ \ y_2}{(1,2)}$ కు గల దూరం $=\sqrt{\left(x_2-x_1\right)^2+\left(y_2-y_1\right)^2}$

$=\sqrt{(4-1)^2+(6-2)^2}$

$=\sqrt{3^2+4^2}$

$=\sqrt{9+16}$

$=\sqrt{25}$

$=5$ యూనిట్లు

12. $P(8,4), Q(6,7), R(9,0)$ బిందువులలో మూలబిందువుకు అతి దగ్గరగా గల బిందువు ఏది?

సా : $P(8,4)$, మూల బిందువు $(0,0)$ ల మధ్య దూరం $=\sqrt{a^2+b^2}$

$=\sqrt{8^2+4^2}$

$=\sqrt{64+16}$

$=\sqrt{80}$ యూనిట్లు

$Q(6,7), O(0,0)$ ల మధ్య దూరం $=\sqrt{6^2+7^2}=\sqrt{36+49}=\sqrt{85}$ యూనిట్లు

$R(9,0), (0,0)$ ల మధ్య దూరం $=\sqrt{9^2+0^2}=\sqrt{81}=9$ యూనిట్లు

$\sqrt{80}<\sqrt{81}<\sqrt{85}$

$\therefore P(8,4)$ బిందువు మూలబిందువుకు అతి దగ్గరగా ఉంటుంది.

4 మార్కుల ప్రశ్నలు :

1. ఒక బిందువు y – అక్షంపై కలదు. మైథిలి మరియు లీల ఈ బిందువు నుండి $(6,5)$, $(-4,3)$ బిందువులకు గల దూరాలను కొలిచి అవి సమానమని నిర్ధారించారు. బిందువుల మధ్య దూరం సూత్రాన్ని ఉపయోగించి ఆ బిందువును కనుగొనండి.

సా : y –అక్షంపై గల బిందువు $= P(o, y)$ అనుకుందాం.

దత్త బిందువులు $= A(6,5), B(-4,3)$ అనుకుందాం.

$PA=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ $\quad$ $(0,y)\ (6,5)$; $x_1\ y_1\ x_2\ y_2$

$=\sqrt{(6-0)^2+(5-y)^2}$

$=\sqrt{6^2+(5-y)^2}$

$=\sqrt{36+(5-y)^2}$

$PB=\sqrt{(-4-0)^2+(3-y)^2}$ $\quad$ $(0,y)\ (-4,3)$; $x_1\ y_1\ x_2\ y_2$

$$=\sqrt{\left(-4\right)^2+(3-y)^2}$$

$$=\sqrt{16+(3-y)^2}$$

$$PA=PB \Rightarrow \sqrt{36+(5-y)^2}=\sqrt{16+(3-y)^2}$$

రెండు వైపులా వర్గం చేయగా

$$36+(5-y)^2=16+(3-y)^2$$

$$(5-y)^2-(3-y)^2=16-36$$

$$(5-y+3-y)\,(5-y-3+y)=-20 \qquad \left[a^2-b^2=(a+b)(a-b)\right]$$

$$(8-2y)\,(2)=-20$$

$$\therefore 8-2y=\frac{-20}{2}=-10$$

$$-2y=-10-8=-18$$

$$\therefore y=\frac{-18}{-2}=9$$

$\therefore$ కావలసిన బిందువు=(0,9)

2. $A\left(a,0\right), B(-a,0), C(0,a\sqrt{3})$ బిందువులు సమబాహు త్రిభుజాన్ని ఏర్పరుస్తాయని చూపండి.

సా: దత్త బిందువులు $=A\left(a,0\right), B(-a,0), C(0,a\sqrt{3})$

$A\left(a,0\right), B(-a,0)$ ల మధ్య దూరం $=\left|x_2-x_1\right|=\left|-a-a\right|=\left|-2a\right|=2a$ యూనిట్లు

$\therefore AB=2a$ యూనిట్లు

$B(-a,0), C(0,a\sqrt{3})$ ల మధ్య దూరం $=\sqrt{a^2+b^2}$

$$=\sqrt{(-a)^2+(a\sqrt{3})^2}$$

$$=\sqrt{a^2+3a^2}$$

$$=\sqrt{4a^2}$$

$=2a$ యూనిట్లు

$\therefore BC=2a$ యూనిట్లు

$C(0,a\sqrt{3}), A\left(a,0\right)$ ల మధ్య దూరం $=\sqrt{a^2+b^2}$

$$=\sqrt{(a\sqrt{3})^2+a^2}$$

$$=\sqrt{3a^2+a^2}$$

$$=\sqrt{4a^2}$$

$$=2a$$

$\therefore CA = 2a$ యూనిట్లు

$\therefore AB = BC = CA$

$\therefore A, B, C$ సమబాహు త్రిభుజాన్ని ఏర్పరుస్తాయి.

3. $(-7,-3)$, $(5,10)$, $(15,8)$, $(3,-5)$లు సమాంతర చతుర్భుజ శీర్షాలని చూపండి. దాని వైశాల్యమును కూడా కనుగొనండి.

సా : $A = (-7,-5)$, $B = (5,10)$, $C = (15,8)$, $D(3,-5)$ అనుకుందాం.

AC కర్ణం మధ్య బిందువు $= \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$

$(-7,-3), (15,8)$
$x_1 \quad y_1 \quad x_2 \quad y_2$

$$= \left(\frac{-7+15}{2}, \frac{-3+8}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{8}{2}, \frac{5}{2}\right)$$

$$= \left(4, \frac{5}{2}\right)$$

BD కర్ణం మధ్య బిందువు $= \left(\frac{5+3}{2}, \frac{10+(-5)}{2}\right)$

$(5,10), (3,-5)$

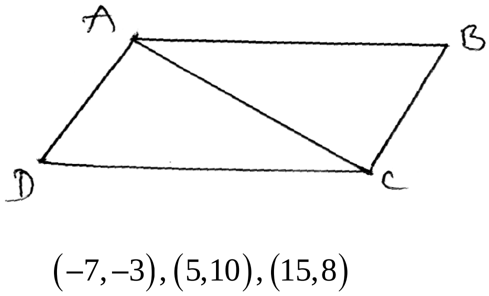
$$= \left(\frac{8}{2}, \frac{5}{2}\right)$$

$$= \left(4, \frac{5}{2}\right)$$

$\therefore$ కర్ణాల మధ్య బిందువులు సమానం.

కావున $ABCD$ ఒక సమాంతర చతుర్భుజం.

(భూజాల కొలతలు కనుగొని $AB = CD, BC = DA$ అని నిరూపించుట ద్వారా కూడా $ABCD$ సమాంతర చతుర్భుజమని నిరూపించవచ్చు)



వైశాల్యం :

$\triangle ABC$ వైశాల్యం

$$= \frac{1}{2}\left|x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\right|$$

$(-7,-3), (5,10), (15,8)$
$x_1 \quad y_1 \quad x_2 \quad y_2 \quad x_3 \quad y_3$

$$= \frac{1}{2}\left|-7(10-8) + 5(8-(-3)) + 15(-3-10)\right|$$

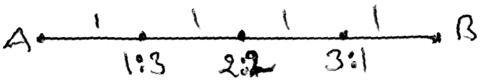
$$= \frac{1}{2}\left|-7(2) + 5(8+3)) + 15(-13)\right|$$

$$= \frac{1}{2}\left|-14 + 5 \times 11 + 15(-13)\right|$$

$= \frac{1}{2}\left|-14+55-195\right|$

$= \frac{1}{2}\left|-154\right| = \frac{1}{2}\times 154 = 77$ చ. యూనిట్లు

$\therefore ABCD$ సమాంతర చతుర్భుజ వైశాల్యం= $2\times\triangle ABC$



=2×77

=154 చ.యూనిట్లు

4. $A(-2,2), B(2,8)$ లను కలిపే రేఖా ఖండాన్ని 4 సమాన భాగాలుగా విభజించే బిందువుల నిరూపకాలను కనుక్కోండి.

సా. దత్త బిందువులు $A(-2,2), B(2,8)$

AB రేఖా ఖండాన్ని 4 సమాన భాగాలుగా

విభజించే బిందువులు

$= AB$ ని నిష్పత్తులలో 1:3. 2:2. 3:1 విభజించు బిందువులు.

a) $(x_1, y_1) = (-2,2), (x_2, y_2) = (2,8)$, నిష్పత్తి $= m_1 : m_2 = 1:3$

బిందువు $= \left(\frac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1+m_2}, \frac{m_1y_2+m_2y_1}{m_1+m_2}\right)$

$= \left(\frac{1\times 2 + 3\times(-2)}{1+3}, \frac{1\times 8 + 3\times 2}{1+3}\right)$

$= \left(\frac{2-6}{4}, \frac{8+6}{4}\right) = \left(\frac{-4}{4}, \frac{14}{4}\right) = \left(-1, \frac{7}{2}\right)$

b) $(-2,2), (2,8)$ నిష్పత్తి =2:2 = 1:1

$x_1 \quad y_1 \quad x_2 \; y_2$

బిందువు = AB మధ్య బిందువు

$= \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$

$= \left(\frac{-2+2}{2}, \frac{2+8}{2}\right) = \left(0, \frac{10}{2}\right) = (0,5)$

c) (−2,2), (2,8) నిష్పత్తి $m_1 : m_2 = 3:1$

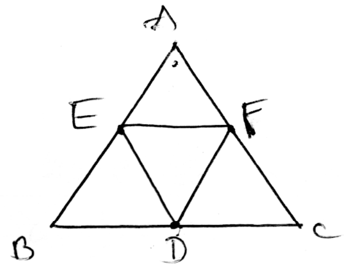
బిందువు $= \left(\frac{3\times 2 + 1\times(-2)}{3+1}, \frac{3\times 8 + 1\times 2}{3+1}\right)$

$= \left(\frac{6-2}{4}, \frac{24+2}{4}\right) = \left(\frac{4}{4}, \frac{26}{4}\right) = \left(1, \frac{13}{2}\right)$

$\therefore$ కావలసిన బిందువులు $= \left(-1, \frac{7}{2}\right), (0,5), \left(1, \frac{13}{2}\right)$

5. ప్రసాద్‌కు సమబాహు త్రిభుజ ఆకారంలో ఒక స్థలం కలదు. ఒకచోటు నుండి ఈ స్థల మూలాలను $(0,-1)$, $(2,1)$, $(0,3)$ అనే బిందువుల ద్వారా వ్యక్తపరచ వచ్చునని అతను గమనించాడు. స్థల అంచుట మధ్య బిందువులను కలుపుతూ ఒక ఈత కొలనును నిర్మించవలెనని తలచాడు. కొలను ఎంత స్థలాన్ని ఆక్రమిస్తుంది? కొలను, మొత్తం స్థలముల వైశాల్యాల నిష్పత్తి ఎంత?

సా: $A=(0,-1), B=(2,1), C=(0,3)$ అనుకుందాం



ABC వైశాల్యం $=\frac{1}{2}\left|x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)\right|$

$=\frac{1}{2}\left|0(1-3)+2(3-(-1))+0(-1-1)\right|$

$=\frac{1}{2}\left|0+2(3+1)+0\right|$

$=\frac{1}{2}\left|2\times 4\right|$

$=4$ చ.యూనిట్లు

$(1,2),(0,3)$
$x_1\ y_1\ \ x_2\ y_2$

BC మధ్య బిందువు $D=\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$

$=\left(\frac{2+0}{2},\frac{1+3}{2}\right)$

$=\left(\frac{2}{2},\frac{4}{2}\right)$

$=(1,2)$

$(0,-1),(2,1)$
$x_1\ y_1\ \ x_2\ y_2$

AB మధ్య బిందువు $E=\left(\frac{0+2}{2},\frac{-1+1}{2}\right)$

$=\left(\frac{2}{2},\frac{0}{2}\right)$

$=(1,0)$

$(0,-1),(0,3)$
$x_1\ y_1\ \ x_2\ y_2$

AC మధ్య బిందువు $F=\left(\frac{0+0}{2},\frac{-1+3}{2}\right)$

$=\left(\frac{0}{2},\frac{2}{2}\right)$

$=(0,1)$

$(1,2),(1,0),(0,1)$
$x_1\ y_1\ \ x_2\ y_2\ \ x_3\ y_3$

$\therefore$ ఈత కొలను వైశాల్యం $=\triangle DEF$ వైశాల్యం

$$=\frac{1}{2}\left|1(0-1)+1(1-2)+0(2-0)\right|$$

$$=\frac{1}{2}\left|1(-1)+1(-1)+0\right|$$

$$=\frac{1}{2}\left|-1-1\right|$$

$$=\frac{1}{2}\left|-2\right|$$

$$=\frac{1}{2}\times 2$$

= 1 చ.యూ.

$\therefore$ ఈతకొలను, స్థలం వైశాల్యముల నిష్పత్తి $=1:4$

6) $(1,2), 4, y), (x,6)$ మరియు $(3,5)$ లు సమాంతర చతుర్భుజ శీర్షాలైతే x, y విలువలను కనుక్కోండి.

సా : $A=(1,2), B=(4,y), C=(x,6), D=(3,5)$ అనుకుందాం.

$ABCD$ ఒక సమాంతర చతుర్భుజం కావున కర్ణాల మధ్య బిందువులు సమానం.

AC కర్ణం మధ్య బిందువు $=\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$ $\quad (1,2), (x,6)$ $\quad x_1\ y_1\ \ x_2\ y_2$

$$=\left(\frac{1+x}{2}, \frac{2+6}{2}\right)$$

$$=\left(\frac{1+x}{2}, \frac{8}{2}\right)=\left(\frac{1+x}{2}, 4\right)$$

BD కర్ణం మధ్య బిందువు $=\left(\frac{4+3}{2}, \frac{y+5}{2}\right)$ $\quad (4,y), (3,5)$ $\quad x_1\ y_1\ \ x_2\ y_2$

$$=\left(\frac{7}{2}, \frac{y+5}{2}\right)$$

$\therefore$ లెక్క ప్రకారం, $\left(\frac{1+x}{2}, 4\right)=\left(\frac{7}{2}, \frac{y+5}{2}\right)$

$\therefore\ \frac{1+x}{2}=\frac{7}{2}$ మరియు $4=\frac{y+5}{2}$

$\therefore\ 1+x=7$ మరియు $8=y+5$

$\therefore\ x=7-1=6$ మరియు $y=8-5=3$

$\therefore\ x=6$ మరియు $y=3$

ఇవి కూడా సాధన చేయండి :

1. $(2,-3),(10,y)$ ల మధ్య దూరం 10 యూనిట్లయితే y విలువ ఎంత?
2. $(7,1)$, $(3,5)$ ల నుండి (x,y) కి గల దూరాలు సమానమైతే x,y ల మధ్య సంబంధాన్ని కనుక్కోండి.
3. $(2,-5)$, $(-2,9)$ ల నుండి సమాన దూరంలో గల $x-$అక్షంపై బిందువును కనుక్కోండి.
4. $A(-5,7),B(-4,-5),C(-1,-6),D(4,5)$ లు శీర్షాలుగా గల చతుర్భుజ వైశాల్యం కనుక్కోండి.

   $[Hint: \triangle ABC$ వైశాల్యం $+ \triangle ACD$ వైశాల్యం $= ABCD$ వైశాల్యం]
5. $(-4,-7)$, $(-1,2)$, $(8,5)$, $(5,-4)$ లు రాంబస్ శీర్షాలని చూపి రాంబస్ వైశాల్యాన్ని కనుక్కోండి.

   (రాంబస్ వైశాల్యం = $\frac{1}{2}d,d_2 = \frac{1}{2}\times$కర్ణాల పొడవుల లబ్ధం)
6. $(2,3),(x,y),(3,-2)$ శీర్షాలుగా గల త్రిభుజ గురుత్వ కేంద్రం మూలబిందువు ఐతే (x,y)ను కనుక్కోండి.
7. $(2,-3)$ కేంద్రంగా గల వృత్త వ్యాసం $AB. B=(1,4)$ ఐతే A నిరూపకాలు కనుక్కోండి.
8. లు సరేఖీయాలైతే B విలువను కనుక్కోండి.
9. $(8,-5)$, $(-2,-7)$, $(5,1)$లతో ఏర్పడే త్రిభుజ వైశాల్యాన్ని హీరోన్ సూత్రం ద్వారా కనుక్కోండి.
10. $J(-2,-4), K(-2,1), L(6,7), M(6,-4)$ లు శీర్షాలుగా గల చతుర్భుజ చుట్టు కొలత కనుక్కోండి?

BITS

1. నిరూపక రేఖా గణితాన్ని ప్రవేశ పెట్టినది <u>రెనెడెకార్టె</u>
2. $(6,2)$, $(0,0)$,$(4,7)$ లతో ఏర్పడే త్రిభుజ గురుత్వ కేంద్రం $\left(\frac{10}{3},\frac{-5}{3}\right)$
3. $(a,0),(0,b)$ లతో ఏర్పడే రేఖ వాలు $-b/a$
4. $(0,0)$ కేంద్రంగా గల వృత్త వ్యాసం ఒక చివరి బిందువు $(3,2)$. మరో చివరి బిందువు <u>$(-3,-2)$</u>
5. $(7,-2),(5,1),(3,k)$లు ఒకే రేఖపై గల బిందువులైతే k విలువ <u>4</u>
6. $(-3,1)$, $(0,-2)$ లు రెండు శీర్షాలుగా గల త్రిభుజ గురుత్వ కేంద్రం మూలబిందువైతే మూడవ శీర్షం నిరూపకాలు <u>$(3,1)$</u>
7. $y-$అక్షంపై గల బిందువు …………… (D)

   ఎ) (2,3) బి) (2,0) సి) పై రెండూ డి) ఏదీ కాదు.
8. $(0,1)$ నుండి 5 యూనిట్ల దూరంలో గల బిందువు y నిరూపకం -3 ఐతే xనిరూపకం = ± 3
9. ఒక వృత్త వ్యాసం చివరి బిందువులు $(3,2)$, $(7,2)$ అయితే వృత్త వ్యాసార్థం = <u>2</u> యూనిట్లు

8. సరూప త్రిభుజాలు

జ్యామితి అధ్యయనాన్ని కొనసాగించుటకు, మీరు క్రింది తరగతులలో అభ్యసించిన జ్యామితి మౌళిక భావనల అవసరమున్నది. జ్యామితీ పటాల సర్వసమానత్వము, సదృశ్య కోణము, ఏకాంతర కోణము మొదలగు జ్యామితీ భావనల యందు పొందిన జ్ఞానమును తదుపరి జ్యామితీ అభ్యసనకు అవసరము.

a) రెండు సమాంతర రేఖలను ఒక తిర్యగ్రేఖ ఖండగా ఏర్పడు ఈ క్రింది కోణాలు సమానము.

i) సదృశ్య కోణాలు

ii) ఏకాంతర కోణాలు

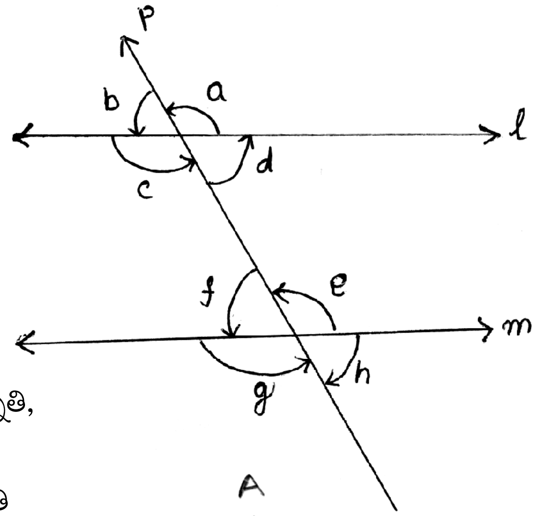
i.e. $l \parallel m$ మరియు p తిర్యగ్రేఖ

$\Leftrightarrow \underline{|a} = \underline{|e},\ \underline{|b} = \underline{|f},\ \underline{|c} = \underline{|g},\ \underline{|d} = \underline{|h}$

(సదృశ్య కోణాలు)

$\underline{|c} = \underline{|e},\ \underline{|d} = \underline{|f}$

(ఏకాంతర కోణాలు)

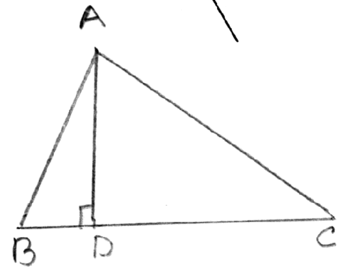


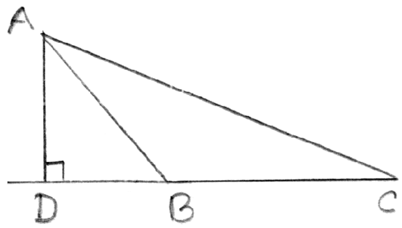
b) i) అల్పకోణ త్రిభుజమునకు త్రిభుజపు ఎత్తు లేదా ఉన్నతి, త్రిభుజానికి అంతరంగా ఉంటుంది.

ii) అధిక కోణ త్రిభుజానికి త్రిభుజపు ఎత్తు లేదా ఉన్నతి త్రిభుజానికి బాహ్యముగా ఉంటుంది.

iii) లంబకోణ త్రిభుజానికి, లంబకోణాన్ని ఏర్పాటు చేసే భుజాలలో ఒకటి ఉన్నతిగా తీసుకొనవచ్చు.

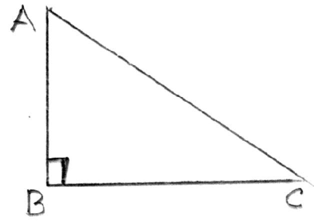
iv) ఏ త్రిభుజానికైనను, దాని వైశాల్యము = $\frac{1}{2}$ ×భూమి×ఉన్నతి.





c) సమద్విబాహు త్రిభుజంలో, సమాన భుజాలకు ఎదురుగా నున్న కోణాలు సమానము. సమాన కోణాలకు ఎదురుగా నున్న భుజాలు సమానము

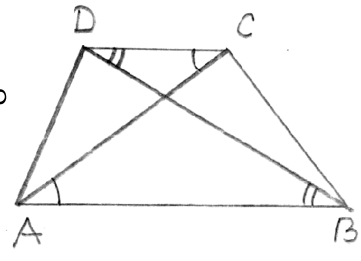
$i,e\ \triangle ABC$ లో $AB = AC \Leftrightarrow \underline{|B} = \underline{|C}$.



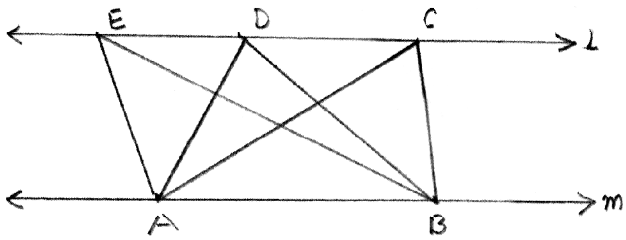
d) చతుర్భుజంలో ఒక జత అభిముఖ కోణాలు సమాంతరాలు అయితే ఆ చతుర్భుజమును ట్రెపీజియం లేదా సమలంబ చతుర్భుజము అంటారు.

$AB \parallel DC$ అయితే ABCD ఒక ట్రెపీజియం AC, BD లు దాని కర్ణాలు

$\left.\begin{array}{l} \therefore \underline{|ACD} = \underline{|BAC} \\ \underline{|BDC} = \underline{|ABD} \end{array}\right\}$ (ఏకాంతర కోణాలు)



e) ఒకే భూమి, ఒకే సమాంతర రేఖల మధ్య గల త్రిభుజాల వైశాల్యాలు సమానము.

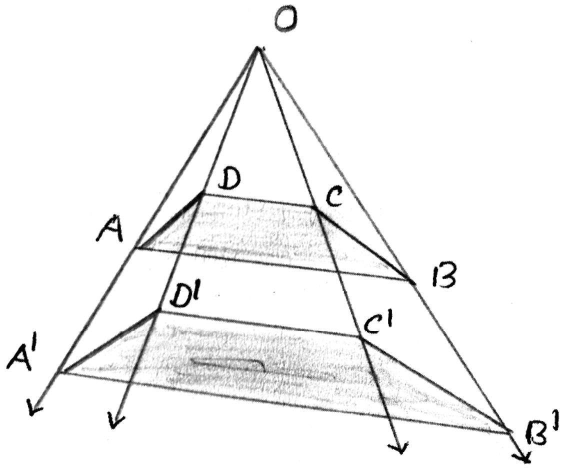


$\triangle ABC, \triangle ABD, \triangle ABE$ లు
ఒకే భూమి 'AB' మీదను,
మరియు ఒకే సమాంతర రేఖల మధ్య గలవు.
$\therefore ar(\triangle ABC) = ar(\triangle ABD) = ar(\triangle ABE)$

f) చలరాలు a, b, c లు మరియు చలరాశులు x, y, z లు అనుపాతంలో ఉంటే

$$\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$$

జ్యామితీ పటాల సరూపత



రెండు బహుభుజిలు (సమాన సంఖ్యలో భుజాలు గలవి) సరూపాలు కావడానికి

i) వాటి సదృశ్య కోణాలు సమానము కావాలి.

ii) సదృశ్య భుజాల నిష్పత్తులు సమానం కావాలి.
లేదా సదృశ్య భుజాలు అనుపాతంలో ఉండాలి.

Ex: ఒక బహు భుజాకార అట్టముక్కను బల్బు '0' మరియు టేబుల్ సమతలానికి మధ్యలో పటంలో చూపినట్లుంచుము.
బహుభుజి ABCD శీర్షాల ప్రతిబింబాలు A^1, B^1, C^1, D^1 అయితే బహుభుజి మరియు ABCD బహు భుజిలు సరూపాలు.

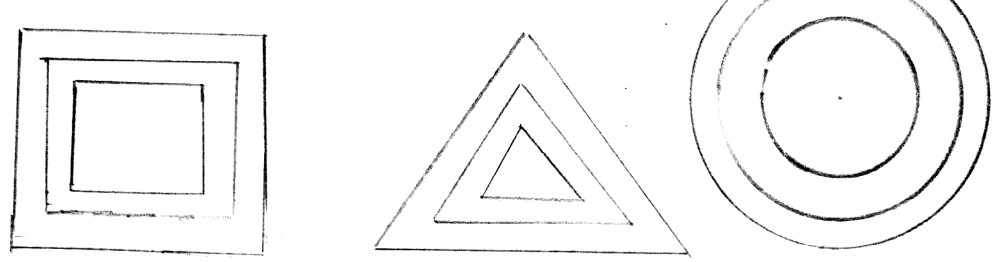
i) $\underline{|A} = \underline{|A^1}, \underline{|B} = \underline{|B^1}, \underline{|C} = \underline{|C^1}, \underline{|D} = \underline{|D^1}$

ii) $\frac{AB}{A^1B^1} = \frac{BC}{B^1C^1} = \frac{CD}{C^1D^1} = \frac{DA}{D^1A^1} =$

అని సరిచూడవచ్చు.

$\therefore \square ABCD \sim \square A^1B^1C^1D^1$

Note : 1) చతురస్రాలన్ని సరూపాలు
2) సమబాహు త్రిభుజాలు అన్ని సరూపాలు
3) అన్ని వృత్తాలు సరూపాలు.



త్రిభుజాల సరూపత : ఒక త్రిభుజంలోని మూడు కోణాలు మరొక త్రిభుజంలో సదృశ్య కోణాలకు సమానం అయితే ఆ త్రిభుజాలు సరూపాలు.

(లేదా)

సదృశ్య భుజాల నిష్పత్తులు సమానము అయిన త్రిభుజాలు సరూపాలు.

$i.e., \angle A = \angle P, \angle B = \angle Q, \angle C = \angle B \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle PQR$

$(or) \quad \frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{AC}{PR} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle PQR$

Note : సదృశ్య కోణాలు సమానము అయినా లేదా సదృశ్య భుజాల నిష్పత్తులు సమానము అయినా త్రిభుజాలకు సరూపతా ధర్మము వర్తిస్తుంది. అంటే ఆ త్రిభుజాల ఆకారాలు ఒక్కటే.

Note : సర్వసమానత్వ ధర్మము జ్యామితీ పటాల ఆకారము మరియు పరిమాణాల మీద ఆధారపడి ఉంటుంది.

1. **సరూపతా సిద్ధాంతము :** రెండు త్రిభుజాలలో ఒకదాని మూడు కోణాలు వరుసగా మరొక దాని మూడు కోణాలకు సమానమయిన ఆ రెండు త్రిభుజాలు సరూపాలు మరియు వాటి సదృశ్య భుజాల నిష్పత్తులు సమానము.

   $i.e., \angle A = \angle P, \angle B = \angle Q, \angle C = \angle R \Leftrightarrow \frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{AC}{PR}$

2. **సరూపతా సిద్ధాంతము :** రెండు త్రిభుజాలలో ఒకదాని రెండు కోణాలు. మరొక దాని రెండు కోణాలకు సమానమయిన ఆ రెండు త్రిభుజాలు సరూపాలు. మరియు వాటి భుజాలు అనుపాతంలో ఉంటాయి.

వివరణ : $\triangle ABC, \triangle DEF$ లలో $\angle A = \angle D, \angle B = \angle E$

$\angle A + \angle B + \angle C = 180^0, \angle D + \angle E + \angle F = 180^0$

$\Rightarrow \angle A + \angle B + \angle C = \angle D + \angle E + \angle F$

$\Rightarrow \angle D + \angle E + \angle C = \angle D + \angle E + \angle F$

$\therefore \angle C = \angle F$

$\therefore \triangle ABC \sim \triangle DEF$

Note : ఇక మీదట సరూపతా సిద్ధాంతమునకు బదుదుగా సరూపతా సిద్ధాంతాన్ని విరివిరిగా వినియోగిస్తాము.

Note : సరూపతా సిద్ధాంతము వలన త్రిభుజాలు సర్వసమానంగా ఉండవు.

3. **భు.భు.భు. సరూపతా సిద్ధాంతము :** రెండు త్రిభుజాలలోని సదృశ్య భుజాల నిష్పత్తులు సమానము అయిన ఆ త్రిభుజ సరూపాలు ఫలితంగా వాటి సదృశ్య కోణాలు సమానము.

   $i.e., \frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{AC}{PR} \Rightarrow \angle A = \angle P, \angle B = \angle Q, \angle L = \angle R$

4. **భు.కో.భు. సరూపతా సిద్ధాంతము :** రెండు త్రిభుజాలలో ఒకదాని రెండు భుజాలు, మరొక దాని రెండు భుజాలతో అనుపాతంలో ఉండి, మరియు వాటి మధ్య కోణాలు సమానము అయితే ఆ రెండు త్రిభుజాలు సరూపాలు.

   $i.e., \frac{AB}{PQ} = \frac{AC}{PR}$ మరియు $\angle A = \angle P \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle PQR$

ఉదాహరణ : ఒక గోపురము నుండి 87.6 మీటర్ల దూరంలో వుంచిన అద్దములో ఒక వ్యక్తి గోపుర శిఖరమును చూసెను. అద్దము నేలపై ఊర్ధ్వ దిశలో వుంచబడినది మరియు ఆ వ్యక్తి అద్దము నుండి 0.4 మీ. దూరములో వున్నాడు. అతని కంటి చూపు భూమి నుండి 1.5 మీటర్ల ఎత్తులో నున్న ఆ గోపురము ఎత్తును కనుగొనుము.

సాధన : $\angle ABC = \angle EDC = 90^0$

$\angle BCA = \angle DCE$

(పతన, పరావర్తన కోణాలు సమానము)

$\triangle ABC \sim \triangle EDC$

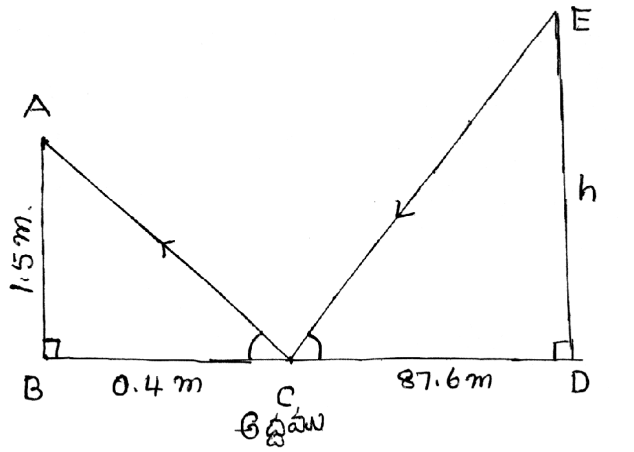
($\because AA$ సరూపతా సిద్ధాంతము నుండి)

$\therefore \dfrac{AB}{ED} = \dfrac{BC}{DC} \Rightarrow \dfrac{1.5}{h} = \dfrac{0.4}{87.6}$

$i.e., \dfrac{15}{10h} = \dfrac{4}{876}$

$40h = 15 \times 876$

$\therefore h = \dfrac{15 \times 876}{40} = 328.5m$



ఉదాహరణ : 1.65 మీ. పొడవు గల ఒక వ్యక్తి నీడ పొడవు 1.8 మీ. అదే సమయంలో ఒక దీప స్తంభము 5.4 మీ. పొడవు గల నీడను ఏర్పరచిన, ఆ దీప స్తంభము పొడవు ఎంత?

సాధన :

$AB =$ వ్యక్తి పొడవు = 1.65 మీ.

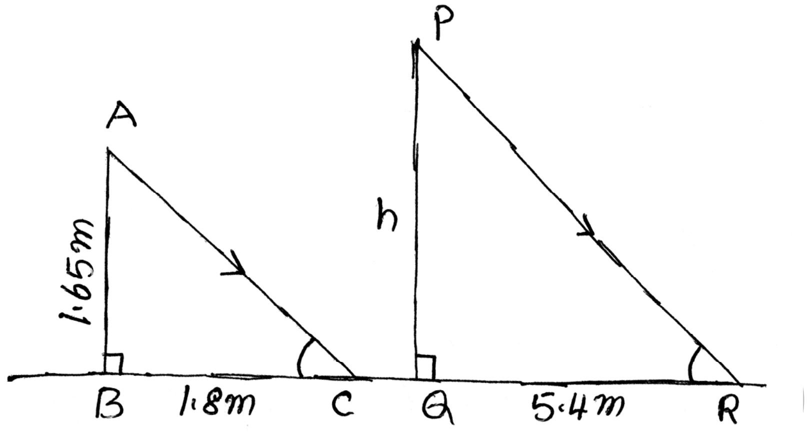
$BC =$ వ్యక్తి నీడ పొడవు=1.8 మీ.

$PQ =$ దీపపు స్తంభము ఎత్తు

$= h$ మీ. (అనుకొనుము)

$QR =$ దీపము స్తంభము నీడ

ఎత్తు = 5.4 మీ.



$\triangle ABC$ మరియు $\triangle PQR$ లలో

$\lfloor B = \lfloor Q = 90^0$

$\lfloor C = \lfloor R$ (ఏ సమయములోనైన సూర్యకిరణాలు ఒకదాని కొకటి సమాంతరాలు)

$\therefore \triangle ABC \sim \triangle PQR$ ($\therefore AA$ సరూపతా నియమము నుండి)

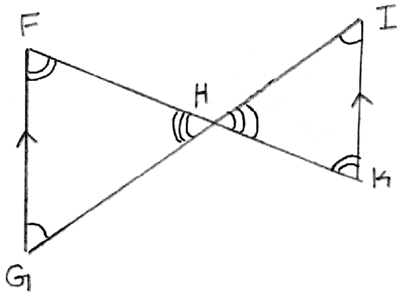
$\therefore \dfrac{AB}{PQ} = \dfrac{BC}{QR} \Rightarrow \dfrac{1.65}{PQ} = \dfrac{1.8}{5.4}$

$\therefore PQ = \dfrac{1.65 \times 5.4}{1.8} = 4.95m$

Note : సర్వసమాన జ్యామితీ పటాలు ఎల్లపుడు సరూపాలు.

ఉదాహరణ : క్రింది త్రిభుజాలు సరూపాలా? సరూపాలయితే ఏ నియమం ఆధారంగానో వివరించండి. త్రిభుజాల సరూపకతను గుర్తులను ఉపయోగించి వ్రాయండి.

i)



సాధన : పటము నుండి $GF \perp KI$

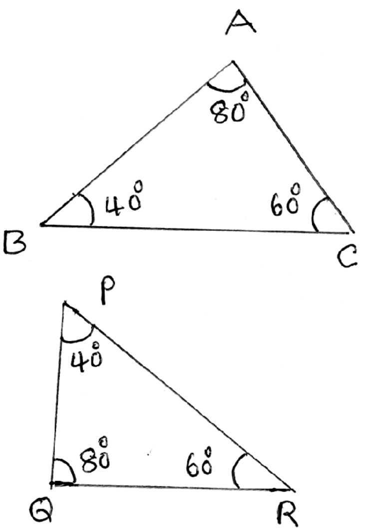
$\left.\begin{array}{l}\lfloor G = \lfloor I \\ \lfloor F = \lfloor K\end{array}\right\}$ (ఏకాంతర కోణాలు)

$\lfloor FHG = \lfloor IHK$ (శీర్షాభిముఖ కోణాలు)

కో.కో.కో. సరూపకతా నియమము నుండి

$\triangle FGH \sim \triangle KIH$

ii)



సాధన : $\angle A = \angle R = 80^0$

$\angle B = \angle P = 40^0$

$\angle C = \angle Q = 60^0$

కో.కో.కో. సరూపకతా నియమము నుండి

$\triangle ABC \sim \triangle RPQ$

Ex : (2) ఈ క్రింది త్రిభుజాలు ఎందుకు సరూపాలో వివరించి అపుడు 'x' విలువను కనుగొనండి.

సాధన : $AB \parallel ZY$ (దత్తాంశం)

$\angle A = \angle Z, \angle B = \angle Y$ (సదృశ్య కోణాలు)

కో.కో. సరూపకతా నియము నుండి

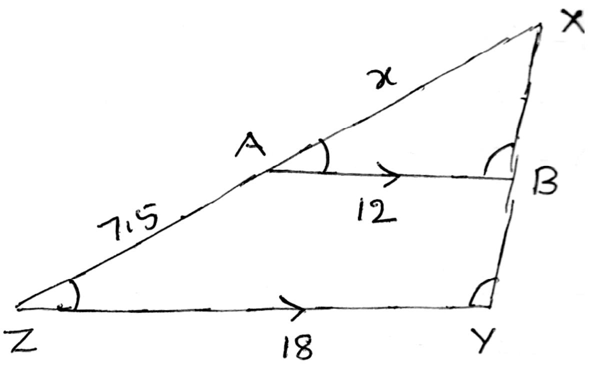
$\triangle \times AB \sim \triangle XZY$

$\therefore \frac{AX}{XZ} = \frac{AB}{ZY} \Rightarrow \frac{x}{7.5 + x} = \frac{12}{18}$

$\Rightarrow \frac{10x}{75 + 10x} = \frac{2}{3} \Rightarrow 30x = 150 + 20x$

$\Rightarrow 10x = 150$

$\Rightarrow x = 15$



ఉదాహరణ : రెండు సరూప త్రిభుజాల చుట్టు కొలతలు వరుసగా 30 సెం.మీ. మరియు 20 సెం.మీ. మొదటి త్రిభుజములోని ఒక భుజము కొలత 12 సెం.మీ. అయిన రెండవ త్రిభుజములో దాని అనురూప భుజము కొలతను కనుగొనండి.

సాధన : $BC = 12$ సెం.మీ. అందాం.

BC కి సదృశ్య భుజము EF ను గణించాలి.

$AB + BC + CA = 30 \rightarrow (1)$

$DE + EF + DF = 20 \rightarrow (2)$

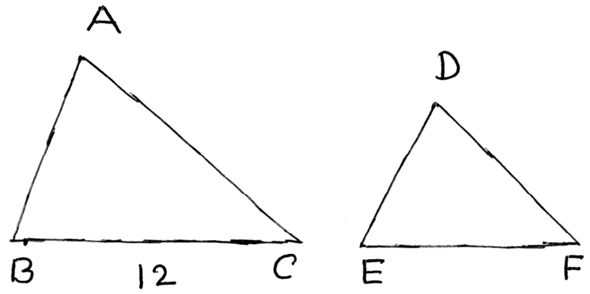
(దత్తాంశం నుండి)

$\triangle ABC \sim \triangle DEF$ కాబట్టి,

$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{DF}$

$\Rightarrow \frac{AB}{DE} = \frac{12}{EF} = \frac{CA}{DF}$

$\therefore AB = 12.\frac{DE}{EF}, CA = 12.\frac{DF}{EF}$



వీటిని (1)లో ప్రతిక్షేపించి, (2)ను వినియోగిస్తే,

$$=12\frac{DE}{EF}+12+12.\frac{DF}{EF}=30$$

$\Rightarrow 12\left(DE+EF+DF\right)=30EF$ (ఇరువైపులా EF చే గుణించగా)

$$\therefore 12\times 20=30EF$$

$$\therefore EF=\frac{12\times 20}{30}=8 \text{ సెం.మీ.}$$

ఉదాహరణ: 90 సెం.మీ. ఎత్తు గల ఒక బాలిక దీపపు స్తంభము నుండి దూరముగా 1.2 మీ./సె. వేగముతో నడుచున్నది. దీప స్తంభము ఎత్తు 3.6 మీ. అయిన 4 సెకండ్ల తర్వాత ఏర్పడే ఆ బాలిక నీడ పొడవును కనుగొనుము.

సాధన : ప్రారంభములో బాలిక 'B' వద్ద నిలబడి ఉన్నదనుకొందాం.

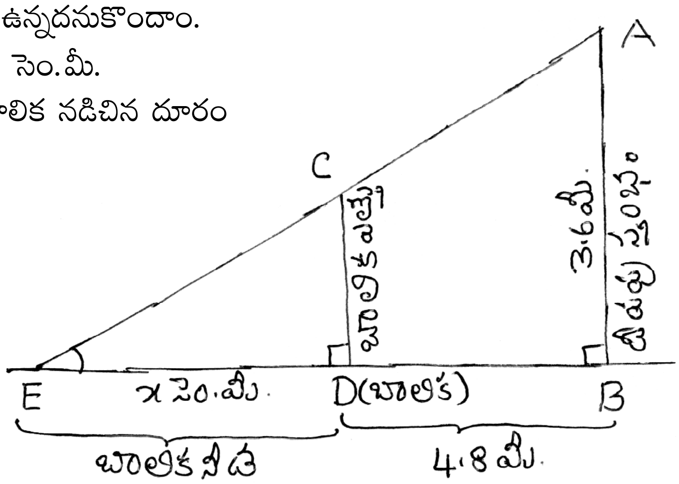
$AB =$ దీప స్తంభము ఎత్తు = 3.6 మీ=360 సెం.మీ.

$DB =$ 1.2 మీ/సె. వేగంతో 4 సెకనులలో బాలిక నడిచిన దూరం

= కాలం×వేగం

= 4×1.2.×100 సెం.మీ.

= 480 సెం.మీ.



ED = బాలిక 'D'వద్ద నిలబడి యున్నపుడు బాలిక నీడ పొడవు= x సెం.మీ. అనుకొనుము.

$\lfloor EDC=\lfloor EBA=90^0$

$\lfloor E=\lfloor E$ (ఉభయ సామాన్యము)

$\therefore \triangle ABE\sim\triangle CDE$ (కో.కో. సరూపకతా నియమము)

$$\frac{ED}{EB}=\frac{CD}{AB}\Rightarrow\frac{x}{ED+DB}=\frac{90}{360}$$

$$\Rightarrow\frac{x}{x+480}=\frac{1}{4}\Rightarrow 4x=x+480$$

$$\Rightarrow 3x=480$$

$\Rightarrow x=160$ సెం.మీ లేదా 1.6 మీ.

ఉదాహరణ: 4 మీ. పొడవు గల ఒక జెండా స్తంభము 6 మీ. పొడవు గల నీడను ఏర్పరచును. అదే సమయములో దగ్గరలో గల ఒక భవనం 24 మీ. పొడవు గల నీడను ఏర్పరచిన, ఆ భవనము ఎత్తు ఎంత?

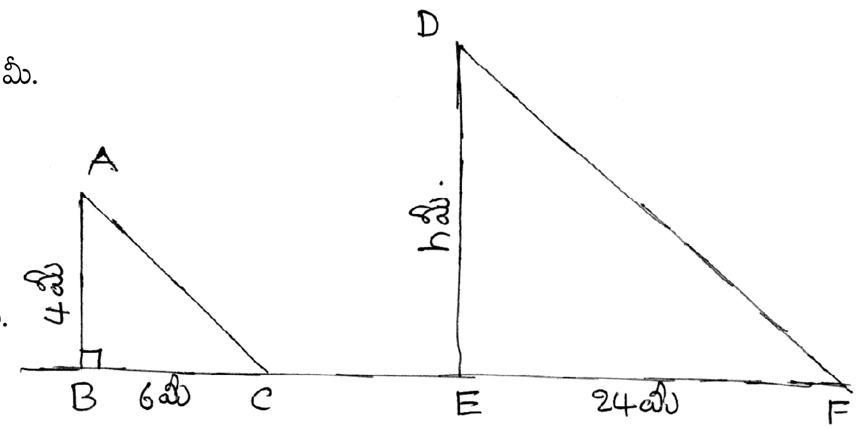
సాధన :

$AB =$ జెండా స్తంభము ఎత్తు = 4 మీ.

$BC =$ జెండా స్తంభము యొక్క నీడ పొడవు = 6 మీ.

$DE =$ భవనం ఎత్తు = h మీ.

$EF =$ భవనం నీడ పొడవు=24 మీ.



$\triangle ABC \sim \triangle DEF$ $\quad$ $(\because \lfloor B = \lfloor E = 90^0$
$\lfloor C = \lfloor F)$

$\Rightarrow \frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$

$\Rightarrow \frac{4}{h} = \frac{6}{24}$

$\therefore h = \frac{x \times 24}{6} = 16$ మీ.

$\therefore$ భవనం ఎత్తు =16 మీ.

ఉదాహరణ : ఇచ్చిన పటంలో $\lfloor ADE = \lfloor B$

(i) $\triangle ABC \sim \triangle ADE$ అని చూపండి.

(ii) $AD = 3.8$ సెం.మీ. $AE = 3.6$ సెం.మీ.

$BE = 2.1$ సెం.మీ. $BC = 4.2$ సెం.మీ.

అయిన DE పొడవును కనుగొనండి.

సాధన : (i) $\lfloor ADE = \lfloor B$ (దత్తాంశం)

$\lfloor A = \lfloor A$ (ఉభయ సామాన్యము)

$\therefore$ కో.కో. సరూపకతా నియమము నుండి

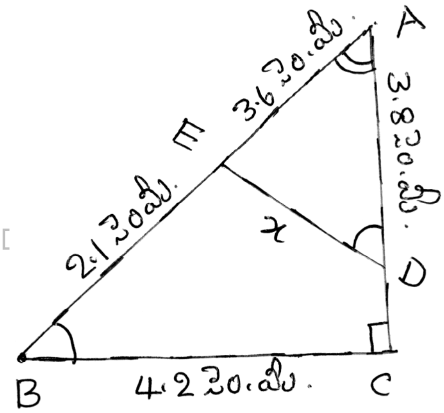
$\triangle ABC \sim \triangle ADE$

(ii) $\frac{ED}{BC} = \frac{AD}{AB}$ (భాగం (i) నుండి)

$\Rightarrow \frac{x}{4.2} = \frac{3.8}{5.7}$

$x = \frac{3.8 \times 4.2}{5.7} = 2.8$ సెం.మీ.

$\therefore DE = 2.8$ సెం.మీ.



ఉదాహరణ : ట్రెపీజియం $ABCD$ లో $AB \parallel DC$. కర్ణములు AC మరియు BD లు బిందువు '0' వద్ద ఖండించుకొనును. త్రిభుజముల సరూప నియమాలను ఉపయోగించుకొని $\frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD}$ అని చూపండి.

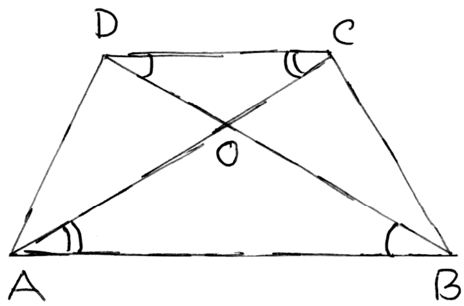
సాధన : $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ (దత్తాంశం)

$\left.\begin{array}{l} \therefore \lfloor ODC = \lfloor OBA \\ \lfloor OCD = \lfloor OAB \end{array}\right\}$ (ఏకాంతర కోణాలు)

$\therefore \triangle OCD \sim \triangle OAB$

(కో.కో. సరూపకతా నియమము)

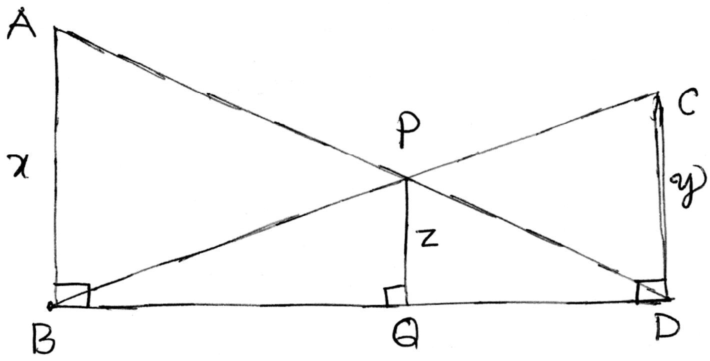
$\therefore \frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD}$



(సదృశ్య భుజాల నిష్పత్తులు సమానం)

ఉదాహరణ : Ab, CD, PQ లు BD కి గీసిన లంబాలు. $AB = x, CD = y$ మరియు $PQ = z$ అయిన $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{z}$ అని చూపండి.

సాధన : $\triangle ABD \sim \triangle PQD$ (కో.కో)



$$\therefore \frac{PQ}{AB}=\frac{QD}{BD}$$

$$\Rightarrow \frac{z}{x}=\frac{QD}{BD} \rightarrow (1)$$

ఇదే విధంగా,

$\triangle PQB \sim \triangle CDB$ (కో.కో)

$$\therefore \frac{PQ}{CD}=\frac{BQ}{BD}$$

$$\Rightarrow \frac{z}{y}=\frac{BQ}{BD} \rightarrow (2)$$

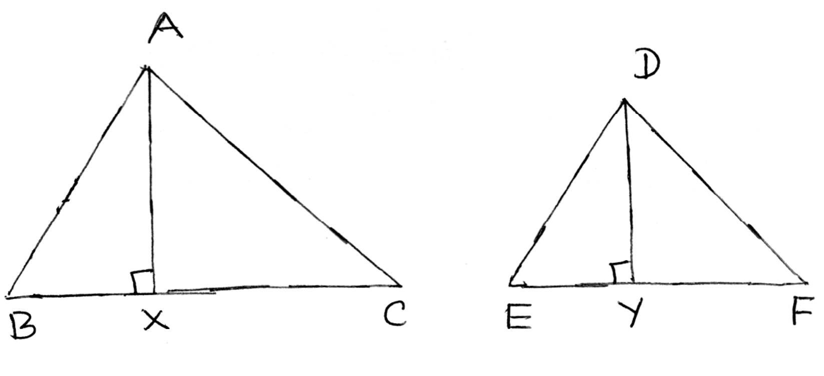
$$(1)+(2) \Rightarrow \frac{z}{x}+\frac{z}{y}=\frac{BQ+QD}{BD}=\frac{BD}{BD}=1$$

$$z\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{z}$$

ఉదాహరణ : $\triangle ABC$ మరియు $\triangle DEF$ సరూప త్రిభుజాలలో గీసిన లంబాలు 'AX' మరియు 'DY' అయిన $AX : DY = AB : DE$ అని చూపండి.

సాధన :



$\triangle ABC \sim \triangle DEF$

(దత్తాంశము)

$\therefore \underline{|B} = \underline{|E}$

$(\because \triangle ABC \sim \triangle DEF)$

$\underline{|A} \times B = \underline{|D}YE = 90^0$

$(\because A\times \perp BC \,\&\, DY \perp EF)$

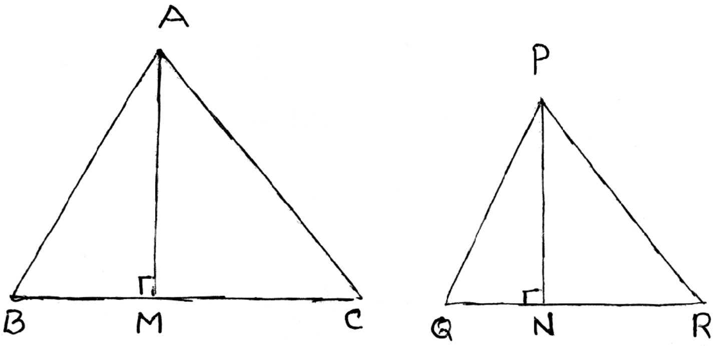
$\therefore \triangle AB\times \sim \triangle DEY$ (కో.కో. సరూపకతా నియమము)

$$\therefore \frac{AB}{DE}=\frac{AX}{DY}$$

$$\Rightarrow AX : DY = AB : DE$$

సిద్ధాంతము : రెండు సరూప త్రిభుజాల వైశాల్యాల నిష్పత్తి, వాటి సదృశ్య భుజాల వర్గాల నిష్పత్తికి సమానము.

దత్తాంశము : $\triangle ABC \sim \triangle PQR$



సారాంశము :

$$\frac{ar(\triangle ABC)}{ar(\triangle PQR)} = \left(\frac{AB}{PQ}\right)^2 = \left(\frac{BC}{QR}\right)^2 = \left(\frac{AC}{PR}\right)^2$$

నిర్మాణము : $AM \perp BC$ మరియు $PN \perp QR$ అగునట్లు AM మరియు PN లను గీయుము.

ఉపపత్తి : $$\frac{ar(\triangle ABC)}{ar(\triangle PQR)} = \frac{\frac{1}{2}\times BC\times AM}{\frac{1}{2}\times QR\times PN} = \frac{BC}{QR}.\frac{AM}{PN}........(1)$$

$\triangle ABM, \triangle PQN$ లలో

$\underline{|B} = \underline{|Q}$ $(\triangle ABC \sim \triangle PQR)$

$\underline{|AMB} = \underline{|PNQ} = 90^0$ (నిర్మాణము)

$\therefore \triangle ABM \sim \triangle PQN$ ($\therefore$ కో.కో. సరూప సిద్ధాంతము)

$$\therefore \frac{AB}{PQ} = \frac{AM}{PN} \to (2)$$

(1) నుండి,

$$\frac{ar(\triangle ABC)}{ar(\triangle PQR)} = \frac{BC}{QR}.\frac{AB}{PQ}$$

$$= \frac{AB}{PQ}.\frac{AB}{PQ} \qquad \left(\because \triangle ABC \sim \triangle PQR \Rightarrow \frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR}\right)$$

$$= \left(\frac{AB}{PQ}\right)^2 \to (3)$$

$$\triangle ABC \sim \triangle PQR \Rightarrow \frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{AC}{PR}$$

$\therefore$ (3) నుండి

$$\frac{ar(\triangle ABC)}{ar(\triangle PQR)} = \left(\frac{AB}{PQ}\right)^2 = \left(\frac{BC}{QR}\right)^2 = \left(\frac{AC}{PR}\right)^2$$

ఉదాహరణ : రెండు సరూప త్రిభుజాల వైశాల్యాలు సమానమయితే ఆ త్రిభుజాలు సర్వసమానము అని చూపండి.

సాధన : $\triangle ABC \sim \triangle PQR$ మరియు $ar(\triangle ABC) = ar(\triangle PQR)$ (దత్తాంశము)

$$\frac{ar(\triangle ABC)}{ar(\triangle PQR)} = \left(\frac{AB}{PQ}\right)^2 = \left(\frac{BC}{QR}\right)^2 = \left(\frac{AC}{PR}\right)^2$$

$$ar(\triangle ABC) = ar(\triangle PQR) \Rightarrow \frac{ar(\triangle ABC)}{ar(\triangle PQR)} = 1$$

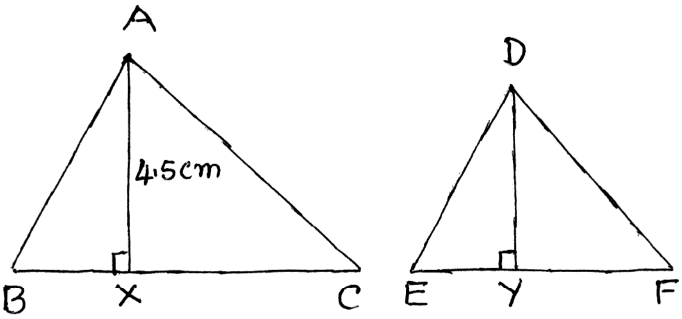
$$\therefore \left(\frac{AB}{PQ}\right)^2 = \left(\frac{BC}{QR}\right)^2 = \left(\frac{AC}{PR}\right)^2 = 1$$

$$\therefore AB^2 = PQ^2,\ BC^2 = QR^2,\ AC^2 = PR^2$$

$$AB = PQ,\ BC = QR,\ AC = PR$$

$\therefore \triangle ABC \cong \triangle PQR$ (భు.భు.భు. సర్వసమానత్వ స్వీకృతం)

ఉదాహరణ: రెండు సరూప త్రిభుజాల వైశాల్యాలు 81 సెం.మీ.^{2} మరియు 49 సెం.మీ.^{2}. వాటిలో పెద్ద త్రిభుజం ఉన్నతి (ఎత్తు) 4.5 సెం.మీ అయిన చిన్న త్రిభుజంలో సదృశ్య ఉన్నతి ఎంత?



సాధన : $ar(\triangle ABC) = 81cm^2$

$ar(\triangle DEF) = 49cm^2$

AX, DY లు వరుసగా

$\triangle ABC, \Delta DEF$ ల ఉన్నతులు.

$\triangle ABC, \Delta DEF$ కన్నా పెద్ద త్రిభుజం.

$\triangle AB\times \sim \triangle DEY$ ($\lfloor B = \lfloor E, \lfloor A \times B = \lfloor DYE = 90^0$)

(మరియు AA సరూప సిద్ధాంతం నుండి)

$$\therefore \frac{AB}{DE} = \frac{AX}{DY}$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{DE} = \frac{4.5}{DY} \rightarrow (1)$$

$$\frac{ar(\triangle ABC)}{ar(\triangle DEF)} = \left(\frac{AB}{DE}\right)^2$$

($\because$ సరూప త్రిభుజాల వైశాల్యాల నిష్పత్తి, వాని సదృశ్య భుజాల నిష్పత్తికి సమానము)

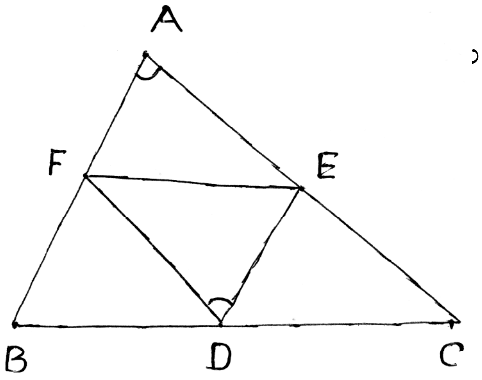
$$\therefore \frac{81}{49} = \left(\frac{AB}{DE}\right)^2 \Rightarrow \frac{AB}{DE} = \sqrt{\frac{81}{49}} = \frac{9}{7}$$

(1) నుండి, $\frac{9}{7} = \frac{4.5}{Dy} \Rightarrow Dy = \frac{4.5 \times 7}{9} = 3.5cm$

మాదిరి: $\triangle ABC \sim \triangle DEF$. $BC = 3cm,\ EF = 4cm$ మరియు $\triangle ABC$ వైశాల్యం $54\,cm^2$ అయిన $\triangle DEF$ వైశాల్యం ఎంత?

సూచన : $\frac{ar(\triangle ABC)}{ar(\triangle DEF)} = \left(\frac{BC}{EF}\right)^2$ ను ఉపయోగించండి.

మాదిరి : $\triangle ABC$ లో BC, CA, AB ల మధ్య బిందువులు $D, E,$
నిష్పత్తి ఎంత?



సాధన : $DE \parallel FA$ మరియు $DE = \frac{1}{2}AB$

$$= \frac{1}{2}FA \rightarrow (1)$$

($\therefore$ త్రిభుజంలో, రెండు భుజాల మధ్య బిందువులను కలుపు రేఖా ఖండము, మూడవ భుజానికి సమాంతరము మరియు అందులో సగము ఉండును)

$\therefore AEDF$ ఒక సమాంతర చతుర్భుజము.

($\because$ ఒక చతుర్భుజంలో ఒక జత ఎదుటి భుజాలు సమాంతరము మరియు సమానము అయిన ఆ చతుర్భుజము సమాంతర చతుర్భుజము)

$\therefore \angle A = \angle D$ ($\parallel gm\ AEDF$ లో ఎదుకోణాలు)

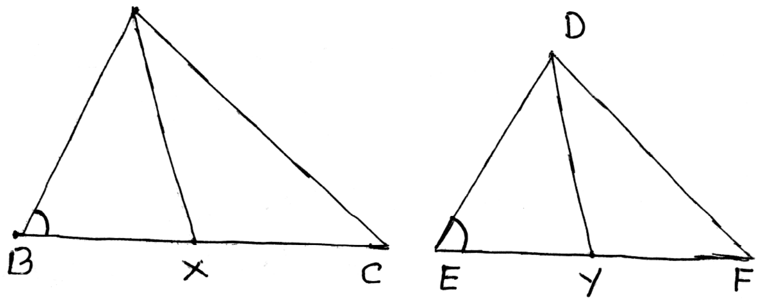
ఇదే విధంగా $BDEF$, $DCEF$ లు సమాంతర చతుర్భుజాలు.

$\therefore \angle B = \angle E$ మరియు $\angle C = \angle F$

$\therefore \triangle ABC \sim \triangle DEF$

$$\frac{ar(\triangle DEF)}{ar(\triangle ABC)} = \left(\frac{DE}{AB}\right)^2 = \frac{DE^2}{(2DE)^2} = \frac{1}{4}(u\sin g(1))$$

మాదిరి : రెండు సరూప త్రిభుజాల వైశాల్యాల నిష్పత్తి, వాటి సదృశ్య మధ్యగతల వర్గాల నిష్పత్తికి సమానము.



సాధన : $\triangle ABC \sim \triangle DEF$

$\Rightarrow \frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$ మరియు $\angle B = \angle E$

$\Rightarrow \frac{AB}{DE} = \frac{2BX}{2EY}$ మరియు $\angle B = \angle E$

($\because AX, DY$ లు

వరుసగా BC, EF ల మధ్యగతలు)

$\therefore \frac{AB}{DE} = \frac{BX}{EY}$ మరియు $\angle B = \angle E$

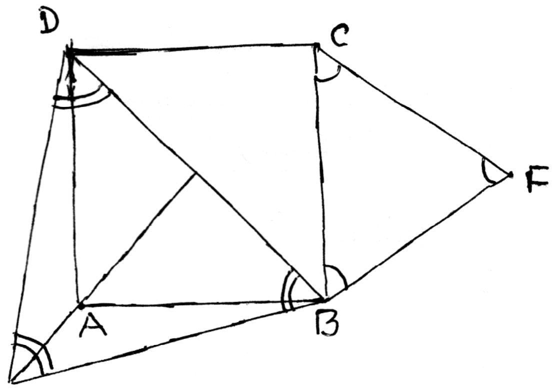
$\therefore \triangle ABX \sim \triangle DEY$ ($\because$ భు.కో.భు. సరూప సిద్ధాంతము)

$\therefore \frac{AB}{DE} = \frac{AX}{DY} \rightarrow (1)$

$$\therefore \frac{ar(\triangle ABC)}{ar(\triangle DEF)} = \left(\frac{AB}{DE}\right)^2$$

$$= \left(\frac{AX}{DY}\right)^2 (u\sin g(1))$$

మాదిరి : ఒక చతురస్రము భుజముపై గీసిన సమబాహు త్రిభుజ వైశాల్యము, ఆ చతురస్ర కర్ణము పై గీసిన సమబాహు త్రిభుజ వైశాల్యములో సగము ఉంటుందని చూపండి.



సాధన : $ABCD$ ఒక చతురస్రము.

కర్ణము BD పై దానిని భుజంగా నిర్మించిన సమబాహు త్రిభుజం BDE.

భుజం BC పై BC భుజంగా నిర్మించబడిన మరొక సమబాహు త్రిభుజం BCF.

$$\therefore ar(\triangle BDE) = \frac{\sqrt{3}}{4} \times BD^2$$

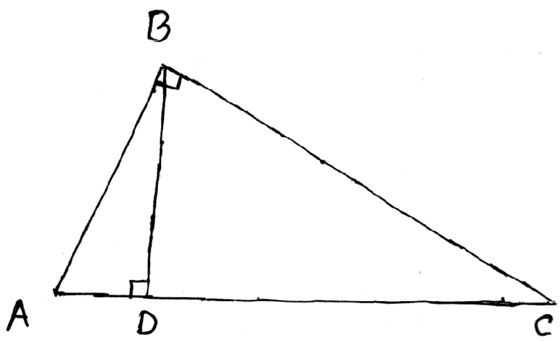
చతురస్రంలో కర్ణము = $\sqrt{2} \times$ చతురస్ర భుజం.

$$\therefore ar(\triangle BDE) = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\sqrt{2} \times BC\right)^2 = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{4}BC^2\right) = 2ar(\triangle BCF)$$

$$\therefore ar(\triangle BDE) = \frac{1}{2}ar(\triangle BDE)$$

సిద్ధాంతము : ఒక లంబకోణ త్రిభుజములో, లంబకోణము కలిగిన శీర్షము నుండి కర్ణానికి లంబము గీసిన, ఆ లంబానికి ఇరువైపులా ఏర్పడిన త్రిభుజాలు, ఇచ్చిన త్రిభుజానికి సరూపాలు మరియు అవి ఒకదాని కొకటి కూడా సరూపాలు.

దత్తాంశము : $\triangle ABC$ లో $\underline{|B} = 90^0$ మరియు $BD \perp AC$.



సారాంశము : (i) $\triangle ADB \sim \triangle ABC$

(ii) $\triangle BDC \sim \triangle ABC$

మరియు (iii) $\triangle ADB \sim \triangle BDC$

ఉపపత్తి : (i) $\underline{|A} = \underline{|A}$ ($\because \triangle ABC, \triangle ADB$ లలో ఉమ్మడి కోణాలు)

$\underline{|ADB} = \underline{|ABC} = 90^0$ (దత్తాంశము)

$\therefore \triangle ADB \sim \triangle ABC \rightarrow (1)$

($\because AA$ సరూప సిద్ధాంతము)

(ii) $\underline{|C} = \underline{|C}$ ($\triangle ABC, \triangle BDC$ లలో ఉమ్మడి కోణాలు)

$\underline{|BDC} = \underline{|BAC} = 90^0$ (దత్తాంశము)

$\therefore \triangle BDC \sim \triangle ABC$ ($\because AA$ సరూప సిద్ధాంతము) $\rightarrow (2)$

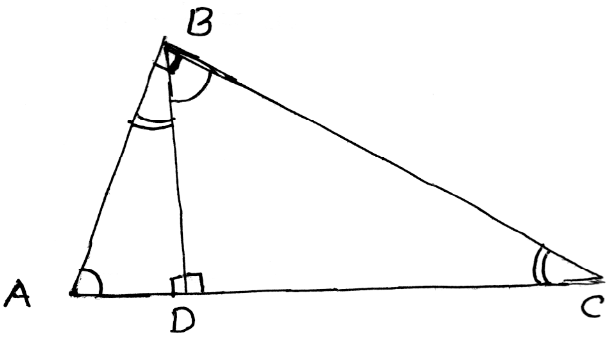
(1), (2)ల నుండి $\triangle ADB \sim \triangle ABC$, $\triangle BDC \sim \triangle ABC$

$$\therefore \triangle ADB \sim \triangle BDC$$

(ఒకే త్రిభుజానికి సరూపాలు అయిన త్రిభుజాలు సరూపాలు)

పైథాగరస్ సిద్ధాంతము (బౌధాయన సిద్ధాంతము)

సిద్ధాంతము : ఒక లంబకోణ త్రిభుజములో కర్ణము మీది వర్గము, మిగిలిన రెండు భుజాల వర్గాల మొత్తానికి సమానము.



దత్తాంశము : $\triangle ABC$ లో $\angle B = 90^0$

సారాంశము : $AC^2 = AB^2 + BC^2$

నిర్మాణము : $BD \perp AC$ గీయుము.

ఉపపత్తి : $\angle A = \angle A$ (సామాన్య కోణము)

$\angle ADB = \angle B = 90^0$

(దత్తాంశం మరియు నిర్మాణము)

$\therefore \triangle ADB \sim \triangle ABC$ (కో.కో. సరూప సిద్ధాంతము)

$\therefore \dfrac{AD}{AB} = \dfrac{AB}{AC}$ (సదృశ్య భుజాలు అనుపాతంలో ఉంటాయి)

$\therefore AD.AC = AB^2 \rightarrow (1)$

ఇట్లే, $\triangle BDC \sim \triangle ABC$

$\therefore \dfrac{DC}{BC} = \dfrac{BC}{AC}$

$\therefore DC, AC = BC^2 \rightarrow (2)$

(1)+(2) చేయగా, $AD.AC + DC.AC = AB^2 + BC^2$

$$\Rightarrow (AD + DC)AC = AB^2 + BC^2$$

$$\Rightarrow AC, AC = AB^2 + BC^2$$

$$\Rightarrow AC^2 = AB^2 + BC^2$$

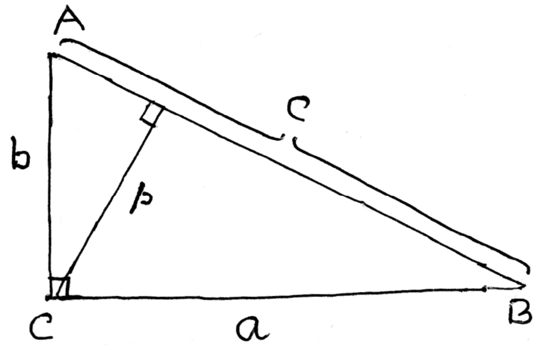
పైథాగరస్ సిద్ధాంత అనువర్తనాలు :

మాదిరి : ABC త్రిభుజములో C వద్ద లంబకోణమున్నది. $BC = a, CA = b, AB = c$ మరియు AB మీదికి C నుండి గీచిన లంబము పొడవు 'p' అయితే (i) $pc = ab$ (ii) $\dfrac{1}{p^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2}$ అని చూపండి.

సాధన : $ar(\triangle ABC) = \dfrac{1}{2} \times b \times h$

$$= \frac{1}{2} \times a \times b$$

$$= \frac{1}{2} ab$$



$$ar(\triangle ABC) = \frac{1}{2} \times AB \times CD$$

$$= \frac{1}{2} \times C \times P$$

$$= \frac{1}{2} CP$$

$ar(\triangle ABC) = ar(\triangle ABC)$ కాబట్టి

$$\frac{1}{2} ab = \frac{1}{2} cp$$

$\Rightarrow ab = cp$ లేదా $c = \dfrac{ab}{p}$

(ii) పైథాగరస్ సిద్ధాంతము నుండి,

$c^2 = a^2 + b^2$ ($\triangle ABC$ లంబకోణ త్రిభుజం కాబట్టి)

దీనిలో $c = \dfrac{ab}{p}$ ని రాసిన,

$$\left(\frac{ab}{p}\right)^2 = a^2 + b^2$$

$$\Rightarrow \frac{a^2 b^2}{p^2} = a^2 + b^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{p^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2 b^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{p^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$$

పైథాగరస్ సిద్ధాంత విపర్యయము :

సిద్ధాంతము: ఒక త్రిభుజంలో ఒక భుజము మీది వర్గము మిగిలిన రెండు భుజముల వర్గాల మొత్తానికి సమానమైన, మొదటి దానికి ఎదురుగా నున్న కోణము లంబకోణము అనగా ఆ త్రిభుజము లంబకోణ త్రిభుజము అగును.

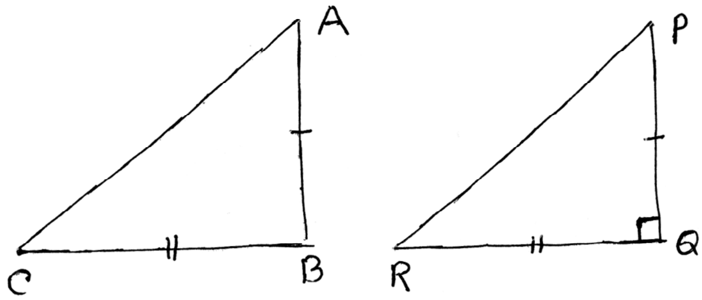
దత్తాంశము: $\triangle ABC$ లో $AC^2 = AB^2 + BC^2$

సారాంశము: $\angle B = 90^0$

నిర్మాణము: $PQ = AB, QR = BC$

మరియు $\angle Q = 90^0$ అగునట్లు

$\triangle PQR$ ను నిర్మించుము.



ఉపపత్తి : $PR^2 = PQ^2 + QR^2$ ($\triangle PQR$ లంబకోణ త్రిభుజం)

$= AB^2 + BC^2$ (నిర్మాణము)

$= AC^2$ (దత్తాంశము)

$\therefore PR = AC$

$\triangle ABC$ మరియు $\triangle PQR$ లలో

$\left.\begin{array}{l} AB = PQ \\ BC = QR \end{array}\right\}$ (నిర్మాణము)

$AC = PR$ (నిరూపించబడినది)

$\therefore \triangle ABC \cong \triangle PQR$ (భు.భు.భు సర్వ సమానత్వ స్వీకృతం నుండి)

$\therefore \underline{|B} = \underline{|Q}$ కానీ $\underline{|Q} = 90^0$

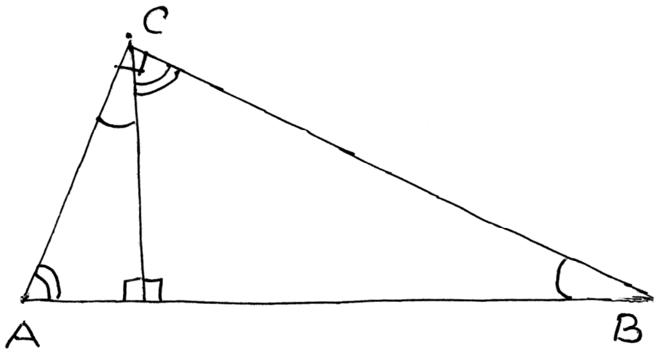
$\therefore \underline{|B} = 90^0$

ఉదాహరణ : $\triangle ABC$ లో $\underline{|C} = 90^0$ మరియు $CD \perp AB$ అయితే

$$\frac{BC^2}{AC^2} = \frac{BD}{AD}$$

సాధన : $\triangle ADC \sim \triangle ACB$ మరియు

$\triangle CDB \sim \triangle ACB$ అని చూపినాము



$\therefore \triangle ADC \sim \triangle CDB$

$\therefore \frac{AD}{CD} = \frac{CD}{BD} = \frac{AC}{BC}$

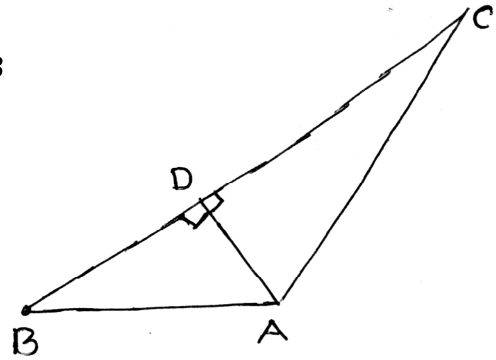
వీటి నుంచి,

$\frac{AD}{CD} = \frac{CD}{BD} \Rightarrow CD^2 = AD.BD \to (1)$

మరియు $\frac{CD}{BD} = \frac{AC}{BC} \Rightarrow \frac{AC^2}{BC^2} = \frac{CD^2}{BD^2} = \frac{AD.BD}{DB^2} (u\sin g(1))$

$$\frac{AC^2}{BC^2} = \frac{AD}{DB}$$

ఉదా॥ : ప్రక్క పటంలో $AD \perp BC$, అయితే $AB^2 + CD^2 = B$



సాధన : $\triangle ABD$ లో $\underline{|ADB} = 90^0$ $(\because AD \perp BC)$

$\therefore AD^2 = AB^2 - BD^2 \to (1)$ ($\therefore$ పై॥సి॥ నుండి)

$\triangle ACD$ లో $\underline{|ADC} = 90^0$ $(\because AD \perp BC)$

$\therefore AD^2 = AC^2 - CD^2 \to (2)$ (పై॥సి॥ నుండి)

(1), (2)ల నుండి,

$$AB^2 - BD^2 = AC^2 - CD^2$$

$$\Rightarrow AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2$$

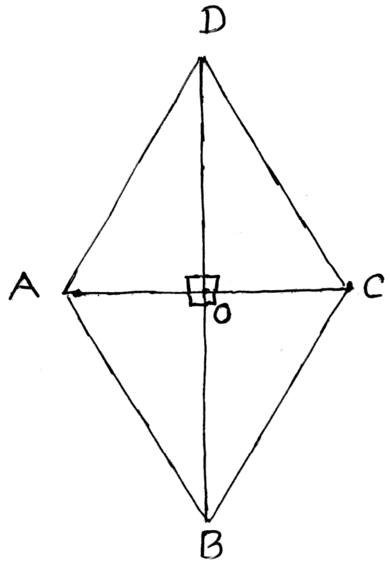
ఉదాహరణ: ఒక రాంబస్‌లో భుజాల వర్గాల మొత్తము, దాని కర్ణముల వర్గముల మొత్తమునకు సమానమని చూపండి.

సాధన: $ABCD$ రాంబస్ లేదా సమచతుర్భుజము

$\therefore AB = BC = CD = DA$ మరియు

$$OB = OD = \frac{1}{2}BD$$

$$OA = OC = \frac{1}{2}AC$$



$\triangle OAB$ ఒక లంబకోణ త్రిభుజము,

$$AB^2 = OA^2 + OB^2$$

$$4AB^2 = 4OA^2 + 4OB^2$$

$$AB^2 + AB^2 + AB^2 + AB^2 = (2OA)^2 + (2OB)^2$$

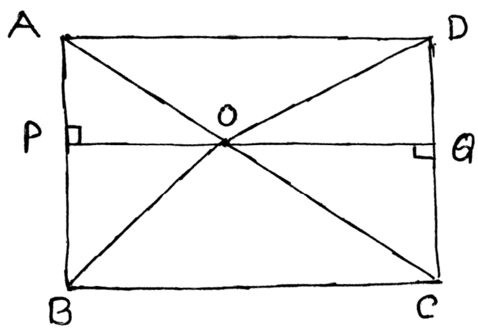
$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2$$

మాదిరి: $ABCD$ దీర్ఘ చతురస్ర అంతరంలో '0' ఏదేని ఒక బిందువు. అయితే $OB^2 + OD^2 = OA^2 + OC^2$ అని చూపండి.

సాధన: '0' గుండా $PQ \parallel BC$ అగునట్లు

గీచిన రేఖ AB ని 'P' వద్ద

DC ని Q వద్ద ఖండించినది.



$PQ \parallel BC \Rightarrow PQ \perp AB$ మరియు

$$PQ \perp CD$$

$\because \underline{|A} = \underline{|B} = \underline{|C} = \underline{|D} = 90^0$

$\therefore \triangle OPB$ లంబకోణ త్రిభుజం నుండి,

$$OB^2 = OP^2 + PB^2 \rightarrow (1)$$

ఇట్లే $\quad OD^2 = OQ^2 + QD^2 \rightarrow (2)$

$$OA^2 = OP^2 + PA^2 \rightarrow (3)$$

$$OC^2 = OQ^2 + QC^2 \rightarrow (4)$$

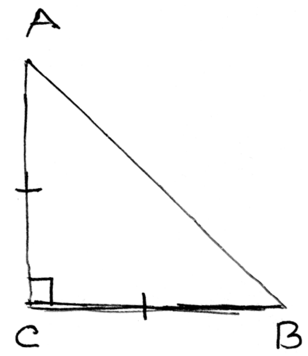
$$(1) + (2) \Rightarrow OB^2 + OD^2 = OP^2 + PB^2 + OQ^2 + QD^2 \qquad (\therefore PB = QC, QD = PA)$$

$$= (OP^2 + QC)^2 + (OQ^2 + PA^2)$$

$$= (OP^2 + PA)^2 + (OQ^2 + QC^2)$$

$$= OA^2 + OC^2 (\therefore u \sin g (3) \,\&\, (4))$$

ఉదాహరణ : సమద్విబాహు త్రిభుజములో ABC లంబకోణము C వద్ద కలదు.
అయిన $AB^2 = 2AC^2$ అని చూపండి.



సాధన : $\lfloor C = 90^0$ మరియు

$AC = BC$ అని ఇవ్వబడింది.

పైథాగరస్ సిద్ధాంతము నుండి,

$AB^2 = AC^2 + BC^2$

$= AC^2 + AC^2$ (దత్తాంశం)

$AB^2 = 2AC^2$

ఉదాహరణ : సమబాహు త్రిభుజము ABC లో, భుజం BC పై బిందువు 'D' ఇంకా $BD = \frac{1}{3}BC$ అయిన

$9AD^2 = 7AB^2$ అని చూపండి.

సాధన : $AE \perp BC$ అగునట్లు 'AE' ని గీయుము.

$\therefore BC$ ని AE రేఖా ఖండము E వద్ద సమద్వి ఖండించును.

$\therefore BE = CE = \frac{1}{2}BC \rightarrow (1)$

$\triangle ADE$ లో $\lfloor AED = 90^0$ (నిర్మాణము)

$\Rightarrow AE^2 = AD^2 - DE^2$ (పైథాగరస్ సిద్ధాంతం నుండి)

$= AD^2 - (BE - BD)^2$

$= AD^2 - (\frac{1}{2}BC - \frac{1}{3}BC)^2$ ((1)ని వాడుకొంటే)

$= AD^2 - \frac{1}{36}BC^2$

$\therefore AE^2 = AD^2 - \frac{1}{36}AB^2 \rightarrow (2)$ ($\therefore \triangle ABC$ సమబాహు త్రిభుజం)

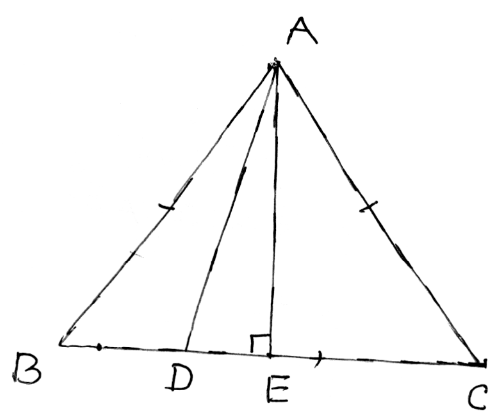
$\triangle ABE$ లో $\lfloor AEB = 90^0$ (నిర్మాణము)

$AE^2 = AB^2 - BE^2$ (పైథాగరస్ సిద్ధాంతం నుండి)

$= AB^2 - \left(\frac{1}{2}BC\right)^2$

$= AB^2 - \frac{1}{4}AB^2$ ($\triangle ABC$ సమబాహు త్రిభుః

$AE^2 = \frac{3}{4}AB^2 \rightarrow (3)$



(2),(3)ల నుండి, $AD^2 - \frac{1}{36}AB^2 = \frac{3}{4}AB^2$

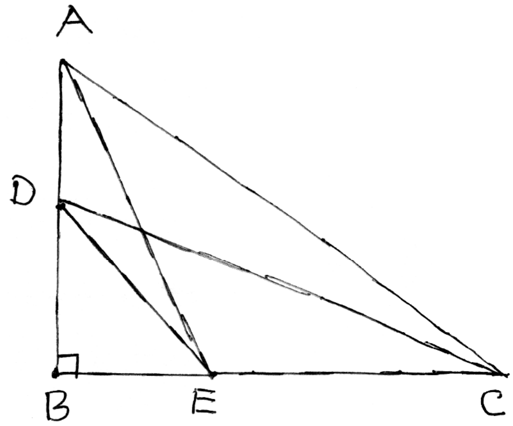
$$\Rightarrow 36AD^2 - AB^2 = 27AB^2$$

$$\Rightarrow 36AD^2 = 28AB^2$$

$$\Rightarrow 9AD^2 = 7AB^2$$

ఉదాహరణ : $\triangle ABC$ లో B వద్ద లంబకోణము కలదు. 'AB' మరియు 'BC' భుజాలపై 'D' మరియు 'E'లు వరుసగా రెండు భుజాలు. అయితే $AE^2 + CD^2 = AC^2 + DE^2$ అని చూపండి.

సాధన : $\triangle ABE$ లో $\underline{|B} = 90^0$ (దత్తాంశం)



$\therefore AE^2 = AB^2 + BE^2$ (పైథా॥సి॥ నుండి) ..... (1)

$\triangle CBD$ లో $\underline{|B} = 90^0$ (దత్తాంశం)

$\therefore CD^2 = BC^2 + BD^2$ (పైథా॥సి॥ నుండి) ..... (2)

(1)+(2) చేయగా,

$$AE^2 + CD^2 = (AB^2 + BC^2) + (BE^2 + BD^2)$$

$$= AC^2 + DE^2$$

($\because \triangle ABC, \triangle DBE$ లంబకోణ త్రిభుజాలు కాబట్టి)

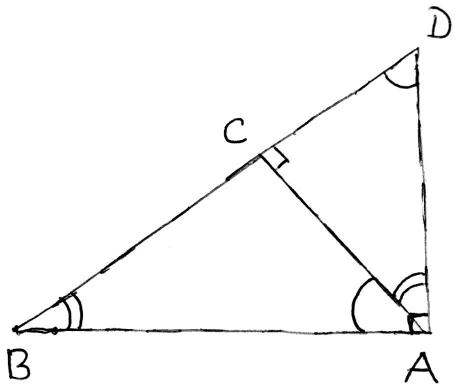
ఉదాహరణ : $\triangle ABD$ లో A వద్ద లంబకోణము కలదు. మరియు $AC \perp BD$ అని చూపండి.

(i) $AB^2 = BC.BD$

(ii) $AC^2 = BC.DC$

(iii) $AD^2 = BD.CD$ అని చూపండి.

సాధన : $\underline{|B} = \underline{|B}$ (ఉభయ సామాన్య కోణము)



$\underline{|ACB} = \underline{|BAD} = 90^0$

($AC \perp BD$ మరియు $\underline{|A} = 90^0$)

$\therefore \triangle ABD \sim \triangle CBA$ (కో.కో)

$\therefore \frac{AB}{BD} = \frac{BC}{AB}$ (సరూప త్రిభుజాలలో సదృశ్య భుజాలు అనుపాతంలో ఉంటాయి.)

$\therefore AB^2 = BC.BD \rightarrow (i)$

$\underline{|D} = \underline{|D}$ (ఉభయ సామాన్య కోణము)

$\underline{|ACD} = \underline{|BAD} = 90^0$ ($\because AC \perp BD$ మరియు $\underline{|A} = 90^0$)

$\therefore \triangle ABD \sim \triangle CAD$ (కో.కో)

$$\frac{AD}{CD} = \frac{BD}{AD}$$

$$\therefore AD^2 = BD.CD \rightarrow (ii)$$

భాగం (i), భాగం (ii) ల నుండి $\triangle CBA \sim \triangle CAD$

$$\therefore \frac{AC}{DC} = \frac{BC}{AC} \Rightarrow AC^2 = BC.DC \rightarrow (iii)$$

ఉదాహరణ : ఇచ్చిన పటంలో, $\triangle ABC$ ఒక లంబకోణ త్రిభుజము శీర్షము 'B' వద్ద లంబకోణము కలదు. BC భుజాన్ని D మరియు E బిందువులు సమత్రి ఖండన చేయును. అయిన $8AE^2 = 3AC^2 + 5AD^2$ అని చూపండి.

సాధన : $BD = DE = EC = \frac{1}{3}BC$

($\because$ 'D', E బిందువులు BC ని త్రిధాకరిస్తున్నాయి.)

$L.H.S. = 8AE^2$

$= 8(AB^2 + BE^2)$

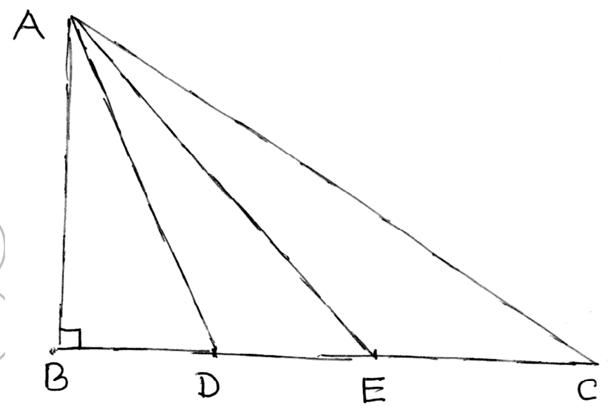
($\because \triangle ABE$ లం॥త్రి॥లో పై॥సి॥నుండి)

$= 8AB^2 + 8 \times (2BD)^2$

$= 8AB^2 + 32BD^2$

$= 8AB^2 + 32\left(\frac{1}{3}BC\right)^2$

$= 8AB^2 + \frac{32}{9}BC^2$



$R.H.S. = 3AC^2 + 5AD^2$

$= 3(AB^2 + BC^2) + 5(AB^2 + BD^2)$ ($\because \triangle ABD, \triangle ABC$ లంబకోణ త్రిభుజాలలో పై॥సి॥ నుండి)

$= 8AB^2 + 3BC^2 + 5 \times \left(\frac{1}{3}BC\right)^2$

$= 8AB^2 + 3BC^2 + \frac{5}{9}BC^2$

$= 8AB^2 + \frac{32}{9}BC^2$

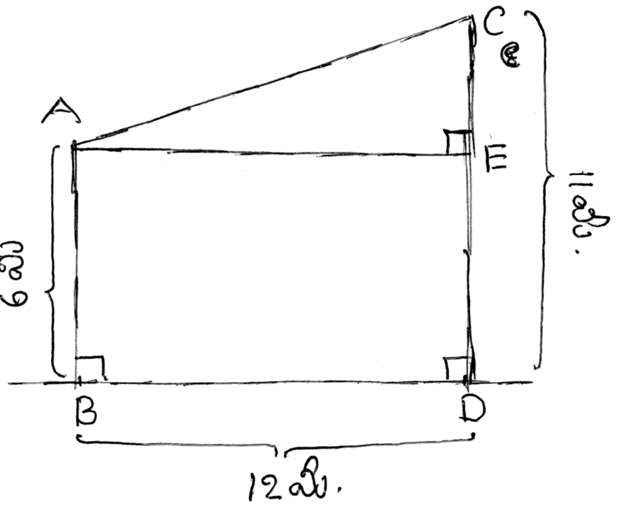
$\therefore L.H.S = R.H.S$

ఉదాహరణ : 6 మీ మరియు 11 మీ. పొడవు గల స్తంభం ఒక చదునైన నేలపై కలవు. నేలపై ఆ రెండు స్తంభాల అడుగుల మధ్య దూరము 12 మీ. అయిన ఆ రెండు స్తంభాల పై కొనల మధ్య దూరం ఎంత?

సాధన : AB = పొట్టి స్తంభం ఎత్తు=6 మీ.

CD =పొడుగు స్తంభం ఎత్తు = 11మీ.

BD రెండు స్తంభాల మధ్య దూరం=12 మీ.



$CE = CD - DE$

$= CD - AB \quad (\because DE = AB)$

=11−6=5 మీ.

$AC^2 = AE^2 + CE^2$

($\because \triangle AEC$ లంబకోణ త్రిభుజంలో పైౖ।సి॥ నుండి)

$= BD^2 + CE^2$ ($\because ABDE$ దీర్ఘ చతురస్రం)

$= 12^2 + 5^2 = 144 + 25$

$AC^2 = 169 \Rightarrow AC = \sqrt{169} = 13$

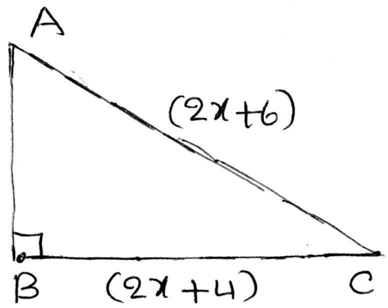
రెండు స్తంభాల పైకొనల మధ్యదూరం=13 మీ.

ఉదాహరణ : ఒక లంబకోణ త్రిభుజములో కర్ణము, దాని చిన్న భుజము రెట్టింపు కన్నా 6 మీ. ఎక్కువ. మూడవ భుజము కర్ణము కన్నా 2 మీ. తక్కువ అయిన ఆ త్రిభుజ భుజాలను కనుగొనుము.

సాధన : $AB =$ కనిష్ఠ భుజం పొడవు = x మీ.

$BC =$ మూడవ భుజం పొడవు

$AC =$ కర్ణము పొడవు



దత్తాంశము నుండి, $AC = (2AB + 6)$ మీ.

$= (2x + 6)$ మీ.

$BC = (AC - 2)$ మీ.

$= (2x + 6 - 2)$ మీ.

$= (2x + 4)$ మీ.

$\triangle ABC$ లంబకోణ త్రిభుజం నుండి, పైౖ।సి॥ ప్రకారం,

$$AB^2 + BC^2 = AC^2$$

$$\Rightarrow x^2 + (2x+4)^2 = (2x+6)^2$$

$$\Rightarrow 5x^2 + 16x + 16 = 4x^2 + 24x + 36$$

$$\Rightarrow x^2 - 8x - 20 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 10x + 2x - 20 = 0$$

$$\Rightarrow x(x-10) + 2(x-10) = 0$$

$$\therefore x = 10,\ x = -2$$

$AB = 10$ మీ., $BC = (2\times 10 + 4) = 24$ మీ., $AC = (2\times 10 + 6) = 26$ మీ.

ఉదాహరణ : 15 మీటర్ల పొడవు గల ఒక నిచ్చెన రోడ్డుపై ఒక వైపునున్న భవనంపై నేల నుంచి 9 మీటర్ల ఎత్తున గల కిటికీని తాకును. నిచ్చెన అడుగు భాగమును అదే ప్రదేశములో వుంచి నిచ్చెనను రోడ్డుకు అవతలి వైపున్న భవనము వైపుకు త్రిప్పిన దానిపై నేల నుండి 12 మీ. ఎత్తున గల కిటికీని తాకును. రోడ్డు వెడల్పు ఎంత?

సాధన :

$CE = AE =$ నిచ్చెన ఎత్తు

$=15$ మీ.

A, C లు కిటికీలు ఉన్న ప్రదేశాలు.

$AB = 9$ మీ. $CD = 12$ మీ.

$\triangle ABE$ త్రిభుజంలో B వద్ద లంబకోణము ఉన్నది.

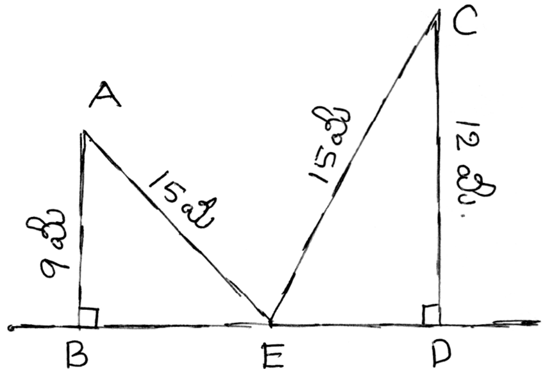
$BE^2 = AE^2 - AB^2$ (పైా॥సి॥ నుండి)

$= 15^2 - 9^2$

$= 225 - 81$

$= 144$

$BE = \sqrt{144} = 12$ మీ.



$\triangle CDE$ త్రిభుజంలో D వద్ద లంబకోణము ఉన్నది.

$\therefore DE^2 = CE^2 - CD^2$ (పైా॥సి॥ నుంచి)

$= 15^2 - 12^2$

$= 225 - 144$

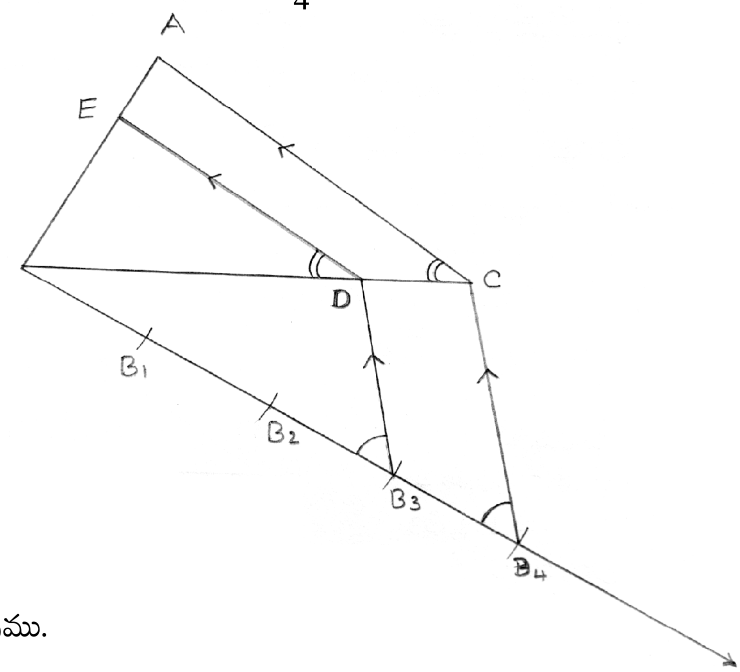
$= 81$

$DE = \sqrt{81} = 9$ మీ.

రోడ్డు వెడల్పు $= BE + DE = 12 + 9 = 21$ మీ.

ఇచ్చిన స్కేలు ప్రకారం ఇచ్చిన త్రిభుజానికి సరూప త్రిభుజాన్ని నిర్మించుట :

నిర్మాణము: $\triangle ABC$ కి సరూపంగా వుంటూ $\triangle ABC$ భుజాలలో వంతు $\frac{3}{4}$ వుండేటట్లు అనురూప భుజాలు కలిగిన త్రిభుజాన్ని నిర్మించుము.



నిర్మాణ సోపానాలు :

(i) ఇచ్చిన కొలతలతో $\triangle ABC$ ని నిర్మించుము.

(ii) కిరణం $\overrightarrow{BX}$ ను గీయుము

(iii) B_1, B_2, B_3 మరియు B_4 బిందువులను కిరణం $\overrightarrow{BX}$ పై $BB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B_4$ అగునట్లు గుర్తించుము. B_4C బిందువులను కలుపుము.

(iv) B_3 గుండా B_4C కి సమాంతరంగా ఒక రేఖను గీయుము.
దీని వలన BC పై ఖండన బిందువు 'D'గా గుర్తించుము.

(v) 'D' గుండా CA కి సమాంతరముగా ఒక రేఖను గీయుము.
ఇది AB పై చేయు ఖండన బిందువును E గా గుర్తించుము.
$\triangle BDE$ నిర్మించ తలపెట్టిన సరూప త్రిభుజము.

ఉపపత్తి : $BD : BC = 3 : 4$ (నిర్మాణము)

$DE \parallel CA$ (నిర్మాణము)

$\angle C = \angle D, \angle A = \angle E$ (సదృశ్య కోణాలు)

$\therefore \triangle ABC \sim \triangle EBD$ (కో.కో)

$\therefore \frac{EB}{AB}, \frac{BD}{BC} = \frac{ED}{AC}$ (సదృశ్య భుజాల నిష్పత్తులు సమానము)

కానీ, $\frac{BD}{BC} = \frac{3}{4}$ కాబట్టి $\frac{EB}{AB} = \frac{BD}{BC} = \frac{ED}{AC} = \frac{3}{4}$

$\therefore EB = \frac{3}{4}AB, BD = \frac{3}{4}BC, \ ED = \frac{3}{4}AC$

గమనిక : స్కేలు గుణకము <1 అయితే నిర్మించబడిన సరూప త్రిభుజము, ఇచ్చిన త్రిభుజం కంటే పరిమాణాత్మంగా చిన్న త్రిభుజమగును. స్కేలు గుణకము >1 అయితే నిర్మించబడిన సరూప త్రిభుజము ఇచ్చిన త్రిభుజం కంటే పరిమాణాత్మంగా పెద్ద త్రిభుజమగును.

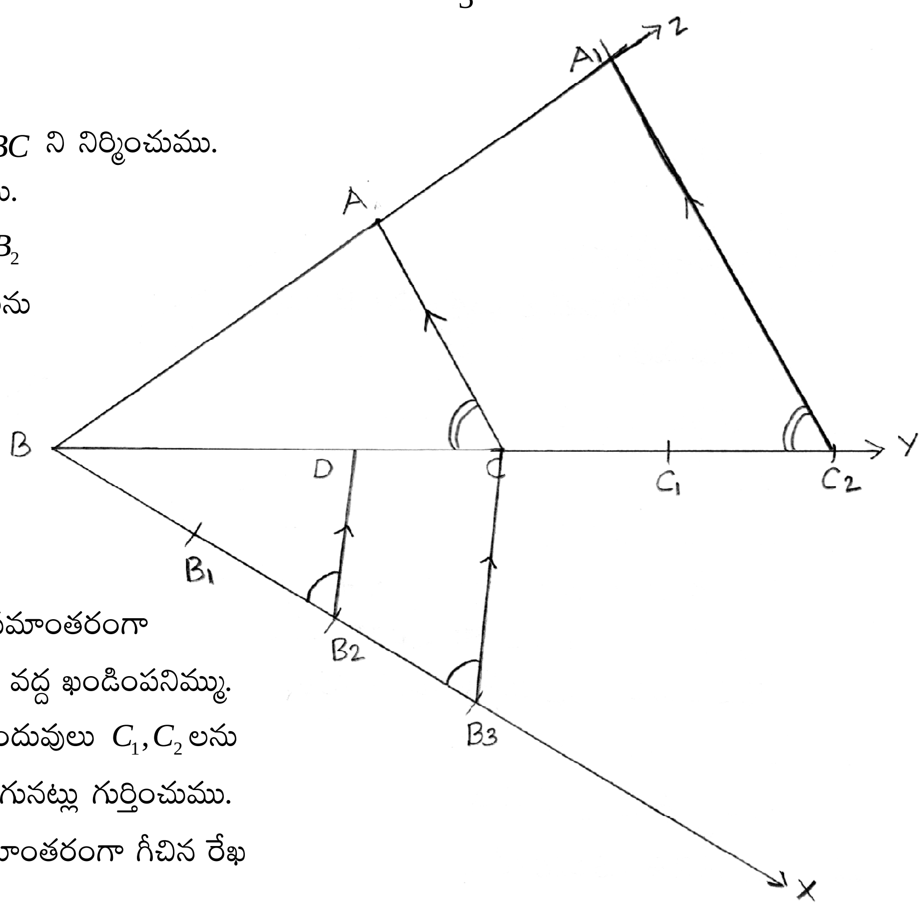
నిర్మాణము (2) : ఇచ్చిన స్కేలు ప్రకారము ఇచ్చిన త్రిభుజ భుజాలకు $\frac{5}{3}$ రెట్లు భుజాలు గల సరూప త్రిభుజాన్ని నిర్మించుము.

నిర్మాణ సోపానాలు :

(i) ఇచ్చిన కొలతలతో $\triangle ABC$ ని నిర్మించుము.

(ii) $\overrightarrow{BX}$ కిరణాన్ని గీయుము.

(iii) కిరణము $\overrightarrow{BX}$ పై B_1, B_2 మరియు B_3 బిందువులను
$BB_1 = B_1B_2$
$= B_2B_3$
అగునట్లు గుర్తించుము.



(iv) B_3, C బిందువులను కలుపుము.

(v) B_2 గుండా B_3, C కి సమాంతరంగా గీచిన రేఖ BC ని 'D' వద్ద ఖండింపనిమ్ము.

(vi) BC పై మరి రెండు బిందువులు C_1, C_2 లను $CC_1 = C_1C_2 = CD$ అగునట్లు గుర్తించుము.

(vii) C_2 గుండా CA కి సమాంతరంగా గీచిన రేఖ

పొడిగించిన 'BA'ను A_1 వద్ద ఖండింపనిమ్ము.

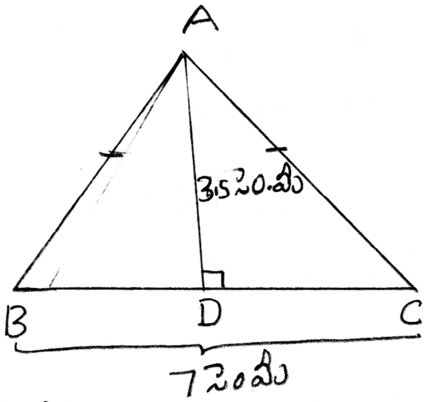
$\therefore \triangle A_1BC_2$ నిర్మింప తలపెట్టిన సరూప త్రిభుజం.

$\frac{5}{3} > 1$ కనుక నిర్మించబడిన సరూప త్రిభుజం పరిమాణాత్మకంగా పెద్దది.

$\triangle ABC \sim \triangle A_1BC_2$

$$\Rightarrow \frac{A_1B}{AB} = \frac{BC^2}{BC} = \frac{A_1C_2}{AC} = \frac{5}{3}$$

నిర్మాణము : భూమి 7 సెం.మీ. మరియు దానికి గీచిన లంబము 3.5 సెం.మీ. వుందునట్లు ఒక సమద్విబాహు త్రిభుజమును గీయండి. ఈ త్రిభుజాలకు $1\frac{1}{2}$ రెట్లు అనురూప భుజముల పొడవులు కలిగి ఇచ్చిన త్రిభుజానికి సరూపంగా వుండేటట్లు వేరొక త్రిభుజాన్ని నిర్మించండి.



సోపానాలు : ఈ సమస్యకు స్కేలు గుణకము $= 1\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

1) $BC = 7$ సెం.మీ, $AD = 3.5$ సెం.మీ. ఉందునట్లు ABC సమద్విబాహు త్రిభుజమును నిర్మించుము.

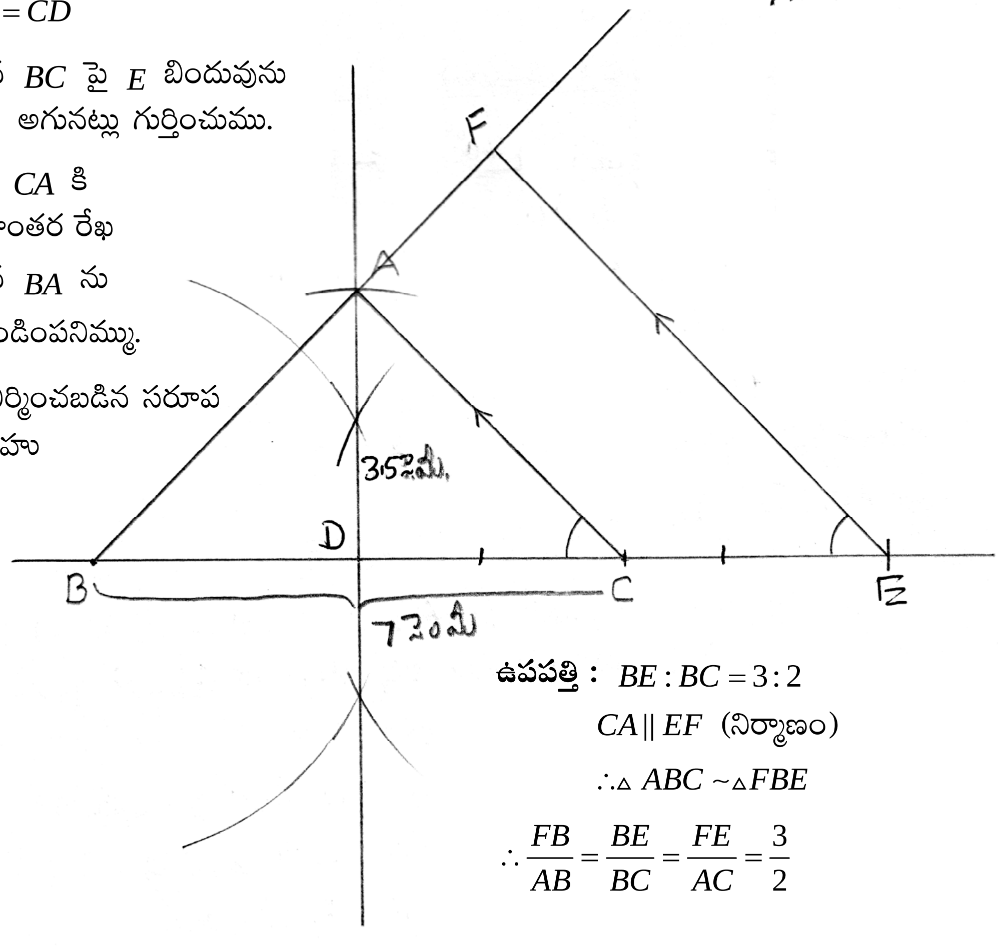
2) BC ని 'D' వద్ద సమద్వి ఖండింప చేయుము

$\therefore BD = CD$

3) పొడిగించిన BC పై E బిందువును $CD = CE$ అగునట్లు గుర్తించుము.

4) E గుండా CA కి గీచిన సమాంతర రేఖ పొడిగించిన BA ను F వద్ద ఖండింపనిమ్ము.

5) $\triangle BEF$ నిర్మించబడిన సరూప సమద్వి బాహు త్రిభుజము.



ఉపపత్తి : $BE : BC = 3 : 2$

$CA \parallel EF$ (నిర్మాణం)

$\therefore \triangle ABC \sim \triangle FBE$

$$\therefore \frac{FB}{AB} = \frac{BE}{BC} = \frac{FE}{AC} = \frac{3}{2}$$

$$\therefore FB = \frac{3}{2}AB,\ BE = \frac{3}{2}BC,\ EF = \frac{3}{2}AC$$

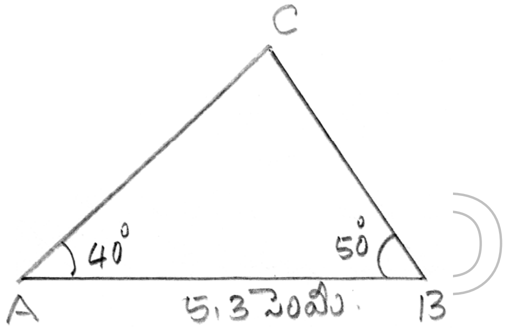
అభ్యాసము :

1) భుజాలు వరుసగా 4 సెం.మీ, 5 సెం.మీ మరియు 6 సెం.మీ. ఉండునట్లు ఒక త్రిభుజాన్ని నిర్మించండి. దాని ప్రతిభుజంలో $\frac{3}{2}$ వంతు భుజాలు గల ఒక సరూప త్రిభుజాన్ని నిర్మించండి.

2) భూమి 8 సెం.మీ. మరియు దానికి గీసిన లంబము 4 సెం.మీ. వుండునట్లు ఒక సమద్విబాహు త్రిభుజమును గీయండి. ఈ త్రిభుజ భుజాలకు $1\frac{1}{2}$ రెట్లు అనురూప భుజాల పొడవులు కలిగి, ఇచ్చిన త్రిభుజానికి సరూపంగా వుండేటట్లు వేరొక త్రిభుజాన్ని నిర్మించండి.

3) $AB = 5$ సెం.మీ, $\angle A = 60^0$, $AC = 4.5$ సెం.మీ. కొలతలతో ఒక త్రిభుజాన్ని నిర్మించండి. $\frac{5}{4}$ స్కేలు గుణానికి ఒక సరూపత్రిభుజాన్ని గీయండి.

మాదిరి : $AB = 5.3$ సెం.మీ, $\angle A = 40^0, \angle B = 50^0$ కొలతలతో ఒక త్రిభుజాన్ని నిర్మించండి. దీని ప్రతి భుజంలో $\frac{3}{7}$ వంతు భుజాలు గల మరొక త్రిభుజాన్ని నిర్మించండి.

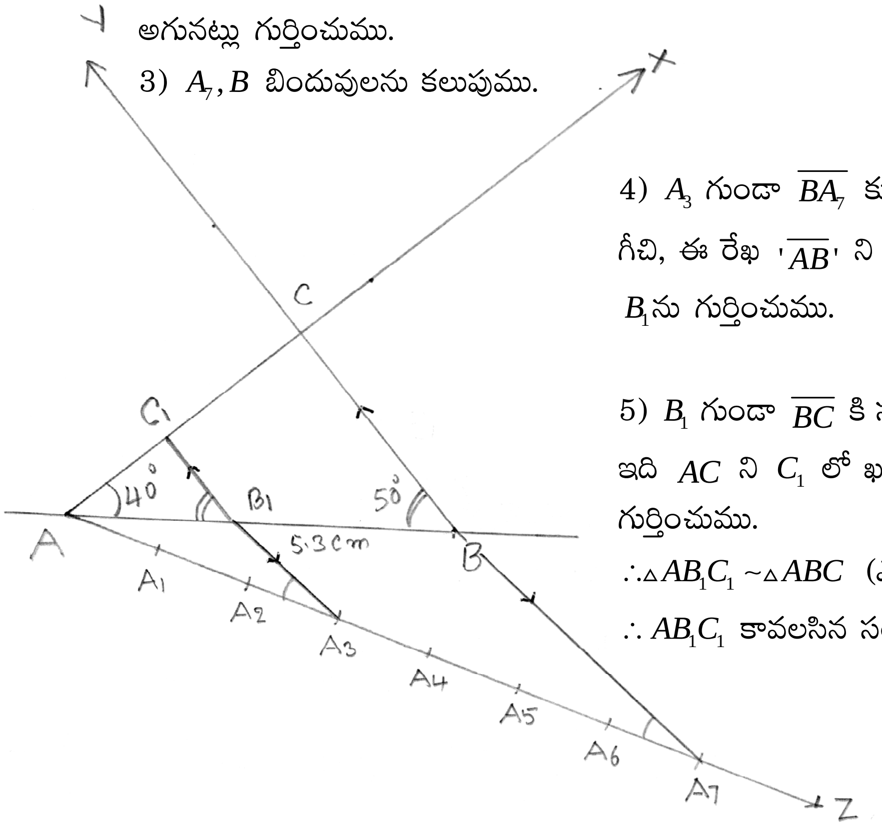


సోపానాలు :

1) $AB = 5.3$ సెం.మీ., $\angle A = 40^0, \angle B = 50^0$ కొలతలతో $\triangle ABC$ ని నిర్మించుము.

2) $\overrightarrow{AZ}$ కిరణాన్ని గీచి, దానిపై $A_1, A_2, A_3, ...A_7$ బిందువులను వరుసగా $AA_1 = A_1A_2 = ... = A_6A_7$ అగునట్లు గుర్తించుము.

3) A_7, B బిందువులను కలుపుము.



4) A_3 గుండా $\overline{BA_7}$ కు సమాంతరంగా ఒక రేఖను గీచి, ఈ రేఖ '$\overline{AB}$' ని 'B_1' లో ఖండించునట్లు B_1ను గుర్తించుము.

5) B_1 గుండా $\overline{BC}$ కి సమాంతర రేఖను గీయుము. ఇది AC ని C_1 లో ఖండించునట్లు 'C_1' ను గుర్తించుము.

$\therefore \triangle AB_1C_1 \sim \triangle ABC$ (ఎట్లు?)

$\therefore AB_1C_1$ కావలసిన సరూప త్రిభుజము.

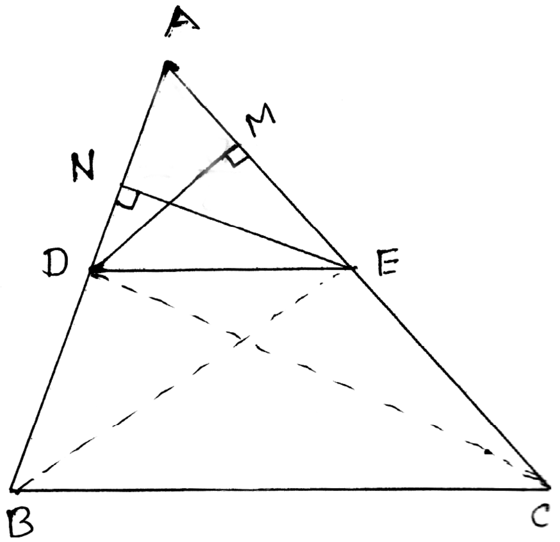
ప్రాథమిక అనుపాత సిద్ధాంతము (థేల్స్ సిద్ధాంతము)

సిద్ధాంతము : ఒక త్రిభుజంలో ఒక భుజానికి సమాంతరంగా గీసిన రేఖ మిగిలిన రెండు భుజాలను వేరు వేరు బిందువులలో ఖండించిన, ఆ మిగిలిన రెండు భుజాలు ఒకే నిష్పత్తిలో విభజించబడతాయి.

దత్తాంశము : $\triangle ABC$ లో $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$

సారాంశము : $\dfrac{AD}{BD} = \dfrac{AE}{CE}$ అని చూపాలి.

నిర్మాణము : $DM \perp AC$ మరియు $EN \perp AB$



ఉపపత్తి : $\triangle BDE, \triangle CED$ త్రిభుజాలు ఒకే భూమి DE మీదను, ఒకే సమాంతర రేఖలు $\overleftrightarrow{DE}, \overleftrightarrow{BC}$ ల మధ్య ఉన్నవి.

$$\therefore ar(\triangle BDE) = ar(\triangle CED)$$

ఇరువైపులా $ar(\triangle ADE)$ చే భాగించిన,

$$\therefore \frac{ar(\triangle BDE)}{ar(\triangle ADE)} = \frac{ar(\triangle CED)}{ar(\triangle ADE)}$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{1}{2}\times BD\times EN}{\frac{1}{2}\times AD\times EN} = \frac{\frac{1}{2}\times CE\times DM}{\frac{1}{2}\times AE\times DM}$$

$$\Rightarrow \frac{BD}{AD} = \frac{CE}{AE}$$

విలోమము చేయగా, $\dfrac{AD}{BD} = \dfrac{AE}{CE}$

గమనిక : ప్రాథమిక అనుపాత సిద్ధాంతాన్ని ఈ క్రింది విధంగా సాంకేతికంగా రాయవచ్చు.

$$(1)\ \frac{AD}{BD} = \frac{AE}{CE}$$

$$\Rightarrow 1 + \frac{AD}{BD} = 1 + \frac{AE}{CE}$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{BD} = \frac{AC}{CE}$$

$$(or)\quad \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$$

గమనిక : ప్రాథమిక అనుపాత సిద్ధాంతమును "సరూపత" అనే నియమాన్ని ఉపయోగించి ఋజువు చేయవచ్చును.

పై పటంలో $DE \parallel BC \Rightarrow \underline{|B} = \underline{|D}$ మరియు $\underline{|C} = \underline{|E}$

$\therefore \triangle ADE \sim \triangle ABC$ (కో.కో)

$$\therefore \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} \rightarrow (1)$$

ఇంకా $$1 - \frac{AD}{AB} = 1 - \frac{AE}{AC}$$

$$\frac{AB - AD}{AB} = \frac{AC - AE}{AC}$$

$$\frac{BD}{AB} = \frac{CE}{AC} \rightarrow (2)$$

(1) ని (2)చే భాగించగా,

$$\frac{AD}{AB} \times \frac{AB}{BD} = \frac{AE}{AC} \times \frac{AC}{CE}$$

$$\Rightarrow \frac{AD}{BD} = \frac{AE}{CE}$$

అంటే ప్రాథమిక అనుపాత సిద్ధాంతము నిరూపితము.

ప్రాథమిక అనుపాత సిద్ధాంత విపర్యయము : త్రిభుజంలోని ఏ రెండు భుజాలనైనా ఒకే నిష్పత్తిలో విభజించు రేఖ మూడవ భుజానికి సమాంతరము. $\triangle ABC$ లో DE రేఖ AB, AC భుజాలను $\frac{AD}{BD} = \frac{AE}{CE}$ అగునట్లు విభజించిన $DE \parallel BC$

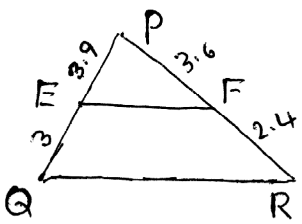
ఉదాహరణ : 'E' మరియు 'F' బిందువులు $\triangle PQR$ భుజాలైన PQ, PR లపై వరుసగా రెండు బిందువులు. $EF \parallel QR$ అగునా? కాదా?

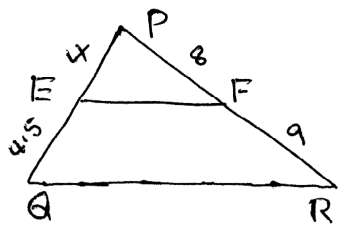
(i) $PE = 3.9$ సెం.మీ, $EQ = 3$ సెం.మీ, $PF = 3.6$ సెం.మీ. మరియు $FR = 2.4$ సెం.మీ.

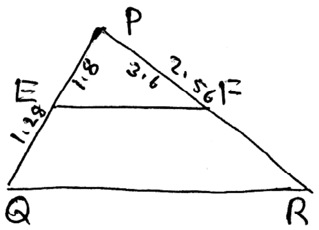
(ii) $PE = 4$ సెం.మీ. $QE = 4.5$ సెం.మీ. $PF = 8$ సెం.మీ. మరియు $RF = 9$ సెం.మీ.

(iii) $PQ = 1.28$ సెం.మీ, $PR = 2.56$ సెం.మీ., $PE = 1.8$ సెం.మీ. మరియు $PF = 3.6$ సెం.మీ.

సాధన :







$$\frac{PE}{EQ} = \frac{PF}{FR}$$

$$\Rightarrow \frac{3.9}{3} \neq \frac{3.6}{2.4}$$

$$\frac{PE}{QE} = \frac{PF}{RF}$$

$$\Rightarrow \frac{4}{4.5} = \frac{8}{9}$$

$$\frac{PE}{PQ} = \frac{PF}{PR}$$

$$\Rightarrow \frac{1.8}{1.28} = \frac{3.6}{2.56}$$

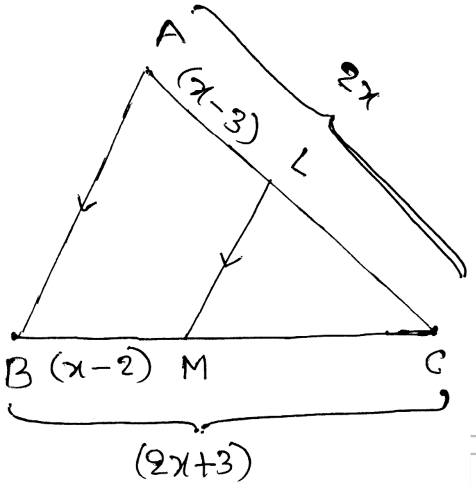
$$\Rightarrow \frac{39}{30} \neq \frac{36}{24}$$
$$\Rightarrow \frac{13}{10} \neq \frac{3}{2}$$
$$\Rightarrow EF \nparallel QR$$

$$\Rightarrow \frac{40}{45} = \frac{8}{9}$$
$$\Rightarrow \frac{8}{9} = \frac{8}{9}$$
$$\Rightarrow EF \parallel QR$$

$$\Rightarrow \frac{180}{128} = \frac{360}{256}$$
$$\Rightarrow \frac{45}{32} = \frac{45}{32}$$
$$\Rightarrow EF \parallel QR$$

(పై మూడింటిని థేల్స్ సిద్ధాంత విపర్యయము నుండి సాధించినాము)

ఉదాహరణ : ప్రక్క పటంలో $LM \parallel AB.$ $AL = (x-3), AC = 2x, BM = (x-2)$ మరియు $BC = (2x+3)$ అయిన x విలువను కనుగొనుము.



సాధన : $LM \parallel AB.$ (దత్తాంశం)

$$\therefore \frac{AL}{AC} = \frac{BM}{BC}$$ (థేల్స్ సిద్ధాంతము నుండి)

$$\Rightarrow \frac{x-3}{2x} = \frac{x-2}{2x+3}$$

$$\Rightarrow (x-3)\,(2x+3) = 2x(x-2)$$

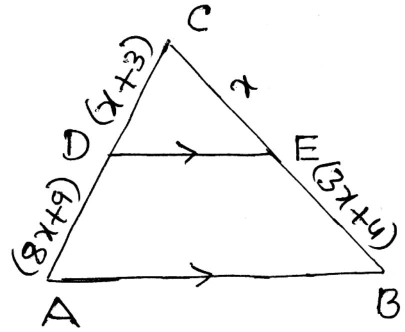
$$\Rightarrow 2x^2 + 3x - 6x - 9 = 2x^2 - 4x$$

$$\Rightarrow -3x - 9 = -4x$$

$$\Rightarrow x = 9$$

ఉదాహరణ : ప్రక్క పటంలో దత్తాంశము ప్రకారం x యొక్క ఏ విలువకు $DE \parallel AB$ అగును.
$AD = (8x+9), CD = (x+3), BE = (3x+4), CE = x$

సాధన : $DE \parallel AB$ (అనుకొనుము)



$$\therefore \frac{AD}{CD} = \frac{BE}{CE}$$ (థేల్స్ సిద్ధాంతం నుండి)

$$\Rightarrow \frac{8x+9}{x+3} = \frac{3x+4}{x}$$

$$\Rightarrow 8x^2 + 9x = (x+3)(3x+4)$$

$$\Rightarrow 8x^2 + \cancel{9x} = 3x^2 + 4x + \cancel{9x} + 12$$

$$\Rightarrow 5x^2 - 4x - 12 = 0$$

$$\Rightarrow 5x^2 - 10x + 6x - 12 = 0$$

$$\Rightarrow 5x(x-2) + 6(x-2) = 0$$

$$\Rightarrow (x-2) + (5x+6) = 0$$

$\therefore x = 2$ లేదా $x = \frac{-6}{5}$

అభ్యాసము : $\triangle ABC$ లో $DE \parallel BC, AD = x, DB = (x-2), AE = (x+2)$ మరియు $EC = (x-1)$ అయిన x విలువను కనుగొనుము.

సూచన : థేల్స్ సిద్ధాంతమును వినియోగించి $x = 4$ అని రాబట్టుము.

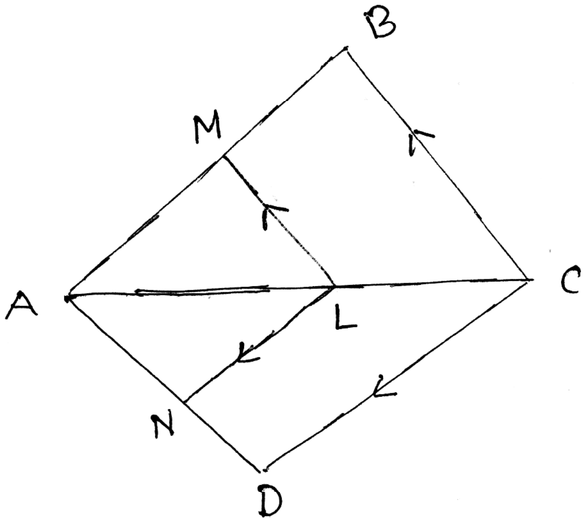
ఉదాహరణ : ఇవ్వబడిన పటంలో $LM \parallel CB$ మరియు $LN \parallel CD$ అయితే $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AD}$ అని చూపుము.

సాధన : $\triangle ABC$ లో $LM \parallel CB$ (దత్తాంశం)

$\therefore \frac{AM}{AB} = \frac{AL}{AC} \rightarrow (1)$ (థేల్స్ సిద్ధాంతం నుండి)

$\triangle ACD$ లో $LN \parallel CD$ (దత్తాంశం)

$\therefore \frac{AN}{AD} = \frac{AL}{AC} \rightarrow (2)$ (థేల్స్ సిద్ధాంతం నుండి)



(1), (2)ల నుండి, $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AD}$

ఉదాహరణ : ప్రక్క పటంలో $AB \parallel CD \parallel EF$.

$AB = 7.5$ సెం.మీ., $DC = y$ సెం.మీ.,

$EF = 4.5$ సెం.మీ., $BC = x$ సెం.మీ., అయిన x, y విలువలను గణించుము.

$AB \parallel FE$ (దత్తాంశం)

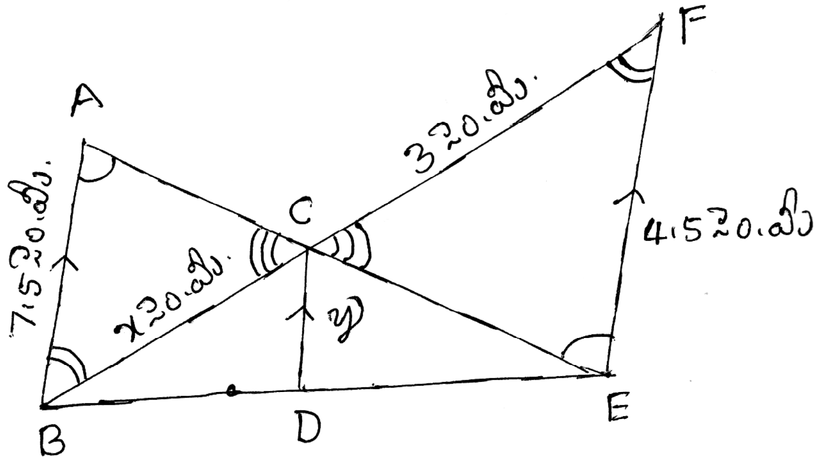
సాధన : $\lfloor BAC = \lfloor CEF$

$\lfloor ABC = \lfloor CFE$

(ఏకాంతర కోణాలు)

$\lfloor ACB = \lfloor ECF$

(శీర్షాభిముఖ కోణాలు)



$\therefore \triangle ABC \sim \triangle EFC$

$\therefore \frac{AB}{EF} = \frac{BC}{FC} = \frac{AC}{EC}$

$\therefore \frac{7.5}{4.5} = \frac{x}{3} \Rightarrow x = \frac{75}{45} \times 3 = 5$

$\triangle BEF$ లో $CD \parallel FE$ (దత్తాంశం)

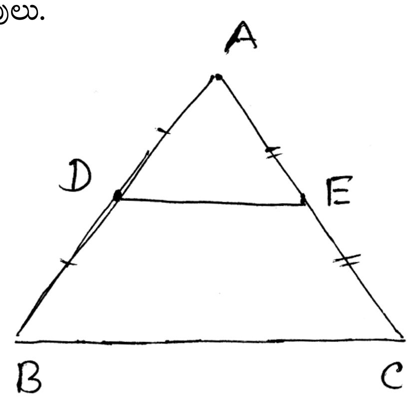
$\frac{BC}{BF} = \frac{CD}{FE} (\therefore \triangle BDC \sim \triangle BEF)$

$\frac{x}{x+3} = \frac{y}{4.5} \Rightarrow \frac{5}{8} = \frac{y}{4.5} \; (\because x = 5)$

$\therefore y = \frac{4.5 \times 5}{8} = 2.8125$

ఉదాహరణ : త్రిభుజంలో ఏ రెండు భుజాల మధ్య బిందువులను కలుపు రేఖా ఖండము మూడవ భుజానికి సమాంతరు. ఋజువు చేయండి.

సాధన : D, E బిందువులు వరుసగా AB, AC భుజాల మధ్య బిందువులు.



$$AD = BD \Rightarrow \frac{AD}{BD} = 1$$

మరియు

$$AE = CE \Rightarrow \frac{AE}{CE} = 1$$

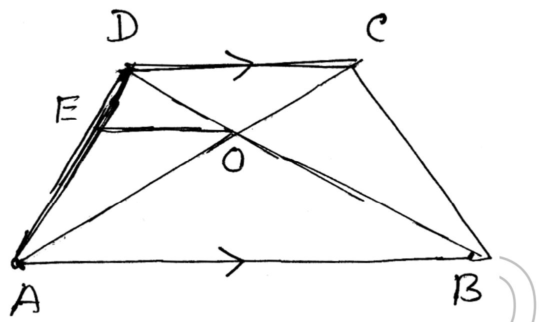
వీటి నుండి, $\frac{AD}{BD} = \frac{AE}{CE}$

$\therefore DE \parallel BC$ (ప్రాథమిక అనుపాత సిద్ధాంత విపర్యయము నుండి)

ఉదాహరణ : $ABCD$ ట్రెపీజియంలో $AB \parallel DC$ మరియు దీని కర్ణాలు '0' వద్ద ఖండించు కొంటే

$\frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO}$ అని చూపండి.

సాధన : EO ను AB కి సమాంతరముగా గీయుము.



$\triangle ABD$ లో $EO \parallel AB$ (నిర్మాణం)

$\therefore \frac{AE}{DE} = \frac{BO}{DO} \rightarrow (1)$ (ప్రా॥అ॥సి॥ నుండి)

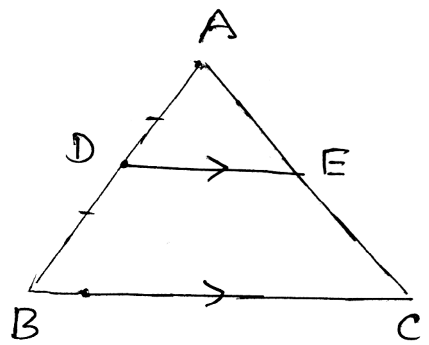
$\triangle ADC$ లో $EO \parallel DC$

$\therefore \frac{AE}{DE} = \frac{AO}{CO} \rightarrow (2)$ (ప్రా॥అ॥సి॥ నుండి)

(1), (2) ల నుండి $\frac{BO}{DO} = \frac{AO}{CO}$ (లేదా) $\frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO}$

ఉదాహరణ : త్రిభుజంలో ఏదేని ఒక భుజం మధ్య బిందువు నుండి మరొక భుజానికి సమాంతరంగా గీచిన రేఖ మూడవ భుజాన్ని సమద్వి ఖండన చేస్తుందని చూపండి.

సాధన : AB భుజం మధ్య బిందువు 'D' అని అనుకొందాం.



$DE \parallel BC$ (దత్తాంశం)

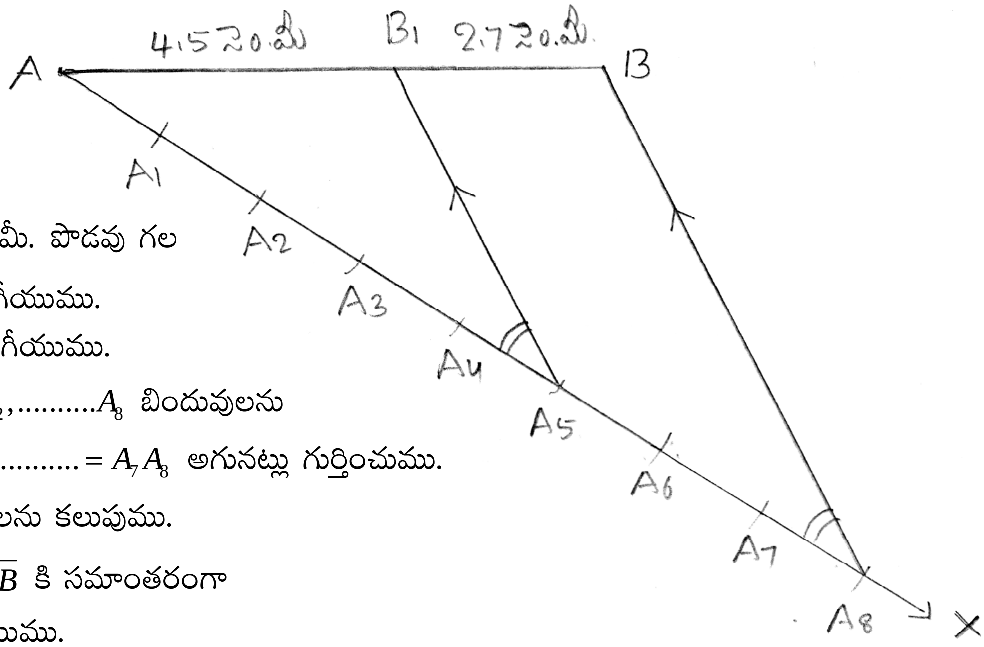
$$\therefore \frac{AE}{CE} = \frac{AD}{DB}$$

$$\Rightarrow \frac{AE}{CE} = 1 \qquad (\because AD = DB)$$

$\because AE = CE$

$\because \overline{AC}$ మధ్య బిందువు E అగును.

నిర్మాణము : 72 సెం.మీ. పొడవు గల రేఖా ఖండాన్ని గీచి దానిని 5:3 నిష్పత్తిలో విభజించుము. ఆ ఖండాల పొడవులను కొలిచి నీ జవాబును సరి పోల్చుకొనుము.



నిర్మాణ సోపానాలు :

1. $AB = 7.2$ సెం.మీ. పొడవు గల రేఖా ఖండాన్ని గీయుము.
2. $\overrightarrow{AX}$ కిరణాన్ని గీయుము.
3. $\overrightarrow{AX}$ పై $A_1, A_2, ...A_8$ బిందువులను $AA_1 = A_1A_2 = ... = A_7A_8$ అగునట్లు గుర్తించుము.
4. A_8B బిందువులను కలుపుము.
5. A_5 గుండా $\overline{A_8B}$ కి సమాంతరంగా ఒక రేఖను గీయుము.

   దీనిచే AB పై ఏర్పడు ఖండన బిందువు B_1 అనుకొనుము.

   $\therefore AB_1 : BB_1 = 5:3$

ఉపపత్తి : $\triangle ABA_8$ లో $A_5B_1 \parallel A_3B$ (నిర్మాణం)

$$\therefore \frac{AB_1}{B_1B} = \frac{AA_5}{A_5A_8} = \frac{5}{3}$$ (థేల్స్ సిద్ధాంతం నుండి)

కొలచిన తర్వాత $AB_1 = 4.5$ సెం.మీ., $BB_1 = 2.7$ సెం.మీ.,

9. వృత్తము - స్పర్శరేఖ - ఛేదన రేఖ

ఒక సమతలంలో ఒక వృత్తము, ఒక రేఖ ఉన్నట్లైతే వాటిని ఈ క్రింది మూడు విధములుగా వర్ణించవచ్చు.

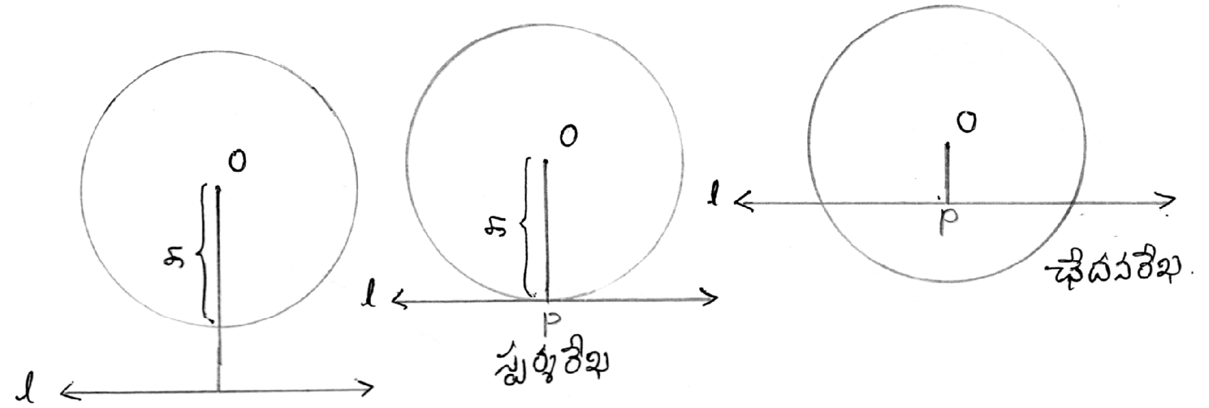
(i) వృత్తానికి, రేఖకు ఉమ్మడి బిందువు లేకుండుట.

(ii) వృత్తానికి, రేఖకు ఒకే ఉమ్మడి బిందువు ఉండుట

(iii) వృత్తానికి, రేఖకు ఖచ్చితంగా రెండు ఉమ్మడి బిందువులుండుట.

సందర్భము (ii) లో వృత్తానికి, రేఖను స్పర్శరేఖగా నిర్వచించవచ్చును.

సందర్భము (iii) లో వృత్తానికి, రేఖను ఛేదన రేఖగా నిర్వచించవచ్చును.

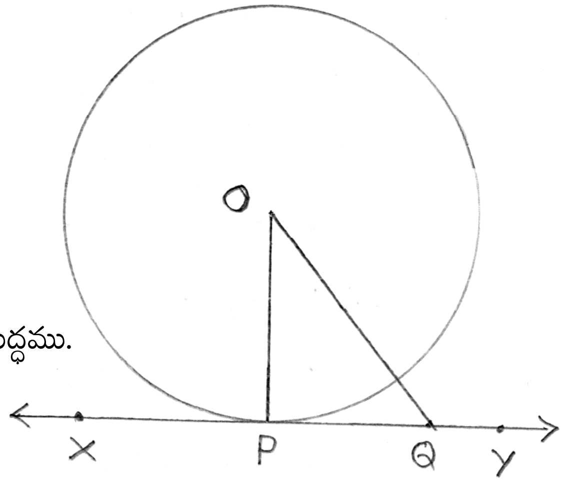


$(i)\ op > r$ $(ii)\ op = r$ $(iii)\ op < r$

సిద్ధాంతము : ఒక వృత్తముపై గల ఏవైనా బిందువు గుండా గీయబడిన స్పర్శరేఖ, ఆ స్పర్శ బిందువు వద్ద వ్యాసార్థానికి లంబముగా ఉంటుందని చూపండి.

దత్తాంశము : $'O'$ కేంద్రముగా గల వృత్తానికి స్పర్శరేఖ xy, స్పర్శబిందువు $'p'$ గుండా గీయబడింది.

సారాంశము : $OP \perp XY$ అని చూపాలి.



ఉపపత్తి : $OP \perp XY$ కాదనుకొందాం.
బిందువు వృత్తానికి బాహ్య బిందువు అయి వుండాలి. అట్లుకాక బిందువు వృత్తానికి అంతర బిందువు అయితే అపుడు xy రేఖ వృత్తానికి ఛేదన రేఖ అవుతుంది. ఇది xy రేఖ స్పర్శరేఖ అనే దత్తాంశానికి విరుద్ధము.

$\therefore Q$ బిందువు వృత్తానికి బాహ్య బిందువై ఉండాలి.

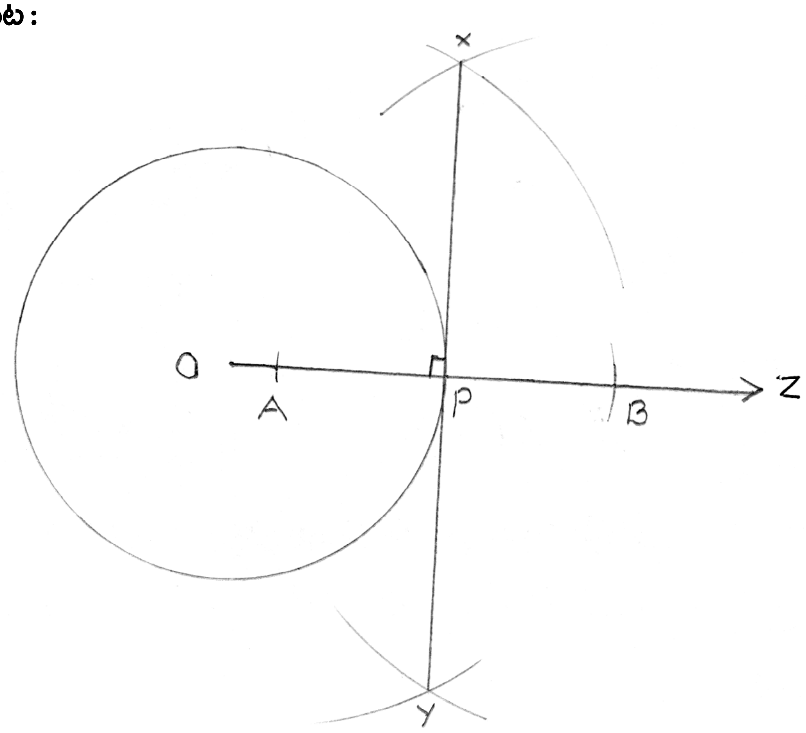
అపుడు $OQ > OP$

$\Rightarrow$ $'O'$ నుండి xy పైకి గీయబడిన అన్ని రేఖా ఖండాలలో OP కనిష్ఠము అంటే మన పరికల్పన అసత్యము.

$\therefore OP \perp XY$

గమనిక : పై సిద్ధాంతమునుపయోగించి, వృత్తానికి దానిపై గల బిందువు గుండా స్పర్శరేఖను గీయవచ్చును.

స్పర్శరేఖను నిర్మించుట :



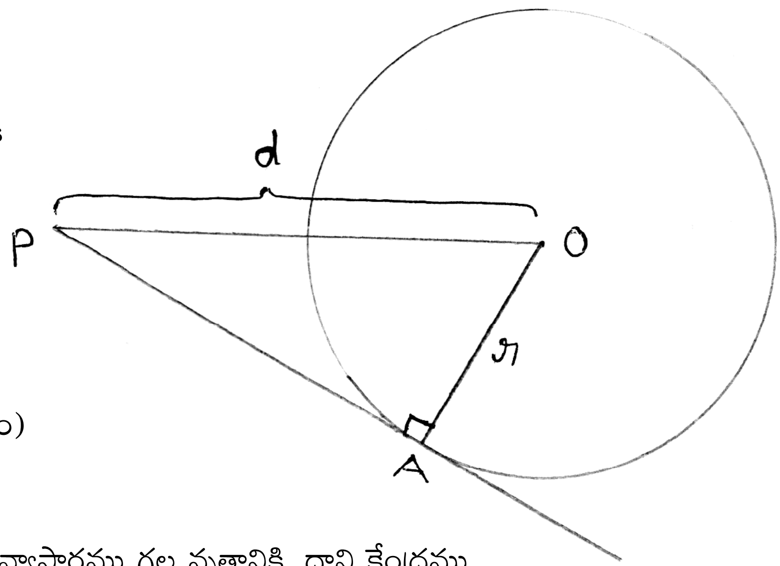
నిర్మాణ సోపానాలు :

1. 'O' కేంద్రంగా 'OP' వ్యాసార్థముతో ఒక వృత్తాన్ని గీయుము.
2. $\overrightarrow{OZ}$ మీద A, B బిందువులను $AP = BP$ అగునట్లు గుర్తించుము.
3. $\therefore$ 'P' బిందువు $\overline{AB}$ కి మధ్య బిందువగును.
4. $\overline{AB}$ కి లంబ సమద్వి ఖండన రేఖను గీయుము. ఇది 'p' గుండా పోవునని గమనించుము.

   $\therefore OP \perp XY \Rightarrow XY$ స్పర్శరేఖ.

స్పర్శరేఖ పొడవు :

$OP =$ 'O' నుండి బాహ్య బిందువు 'p'కి గల దూరం= d



$OA =$ వ్యాసార్థం $= r$

AP బాహ్య బిందువు 'p' నుండి వృత్తానికి గీచిన స్పర్శరేఖ పొడవు

$AP^2 = OP^2 - OA^2$ (పైథాగరస్ సిద్ధాంతం)

$AP = \sqrt{d^2 - r^2}$

ఉదాహరణ : 'O' కేంద్రము 6 సెం.మీ. వ్యాసార్థము గల వృత్తానికి, దాని కేంద్రము నుండి 10 సెం.మీ. దూరంలో గల 'P' బిందువు నుండి వృత్తానికి గీచిన స్పర్శరేఖ పొడవు ఎంత?

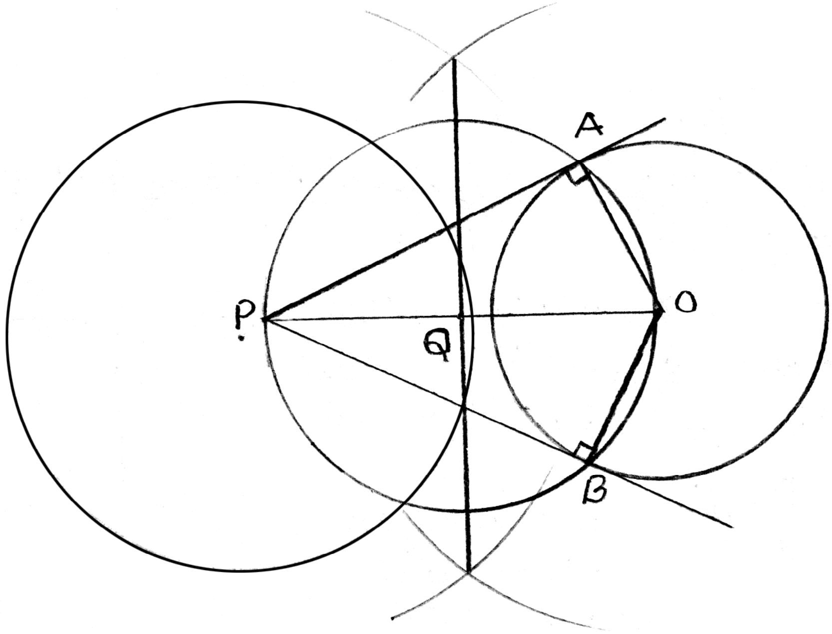
సాధన : $OP = d = 10$ సెం.మీ.

$OA = r = 6$ సెం.మీ.

$\therefore$ స్పర్శరేఖ పొడవు $AP = \sqrt{d^2 - r^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = \sqrt{100 - 36}$

$= \sqrt{64} = 8$ సెం.మీ.

బాహ్య బిందువు నుండి వృత్తానికి స్పర్శరేఖలను నిర్మించుట :



నిర్మాణ సోపానాలు :

1. దత్త వ్యాసార్థముతో 'O' కేంద్రముగా ఒక వృత్తాన్ని గీయుము. ఈ వృత్తానికి 'p' బాహ్య బిందువు అయితే $op > r$ అగును.

2. $\overline{op}$ కి లంబ సమద్వి ఖండన రేఖను గీయుము. ఇది $\overline{op}$ ని వద్ద ఖండించినదనుకొందాం.

3. 'Q' కేంద్రంగా $\frac{1}{2}OP = PQ = OQ$ వ్యాసార్థంగా గీచిన వృత్తం దత్త వృత్తాన్ని A, B లలో ఖండించి నదనుకొందాం.

4. P, A బిందువులను; P, B బిందువులను కలుపుము.

   $\therefore PA, PB$ లు రెండు స్పర్శరేఖలు.

ఉపపత్తి : $\underline{|OAP} = 90^0$ (అర్థ వృత్తంలోని కోణం)

$\therefore OA \perp PA$ (చివరగా, వ్యాసార్థానికి లంబంగా గీచిన రేఖ వృత్తానికి స్పర్శరేఖ అగును)

ఇదే విధంగా $\underline{|OBP} = 90^0$

$\therefore OB \perp PB$

$\therefore PA, PB$ లు 'P' నుండి వృత్తానికి గీచిన రెండు స్పర్శరేఖలు,

ఇంకా, $PA^2 = OP^2 - OA^2$

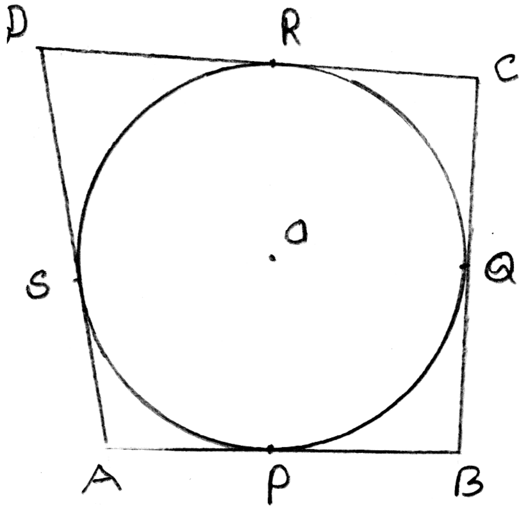
$= OP^2 - OB^2 \qquad (OA = OB)$

$= PB^2$

$\therefore PA = PB$

$\therefore$ వృత్తానికి దాని బాహ్య బిందువు నుండి గీచిన స్పర్శరేఖల పొడవులు సమానము.

ఉదాహరణ : $ABCD$ చతుర్భుజ భుజాలను అంతరంగా P, Q, R మరియు 'S' లలో ఒక వృత్తం తాకితే $AB + CD = BC + DA$ అని చూపండి.



సాధన : $AP = AS$

$BP = BQ$

$CR = CQ$

$DR = DS$

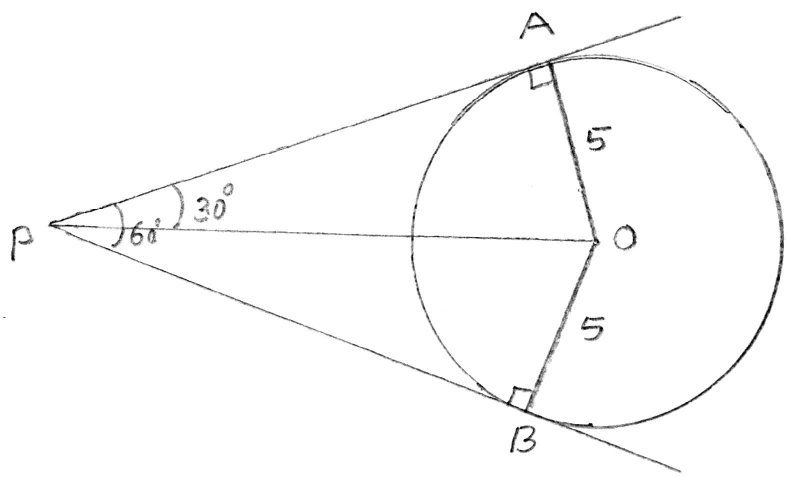
(బాహ్య బిందువులు A, B, C మరియు 'D' ల నుండి వృత్తానికి గీయబడిన స్పర్శరేఖలు కాబట్టి)

$\therefore AP + BP + CR + DR = AS + BQ + CQ + DS$

$\Rightarrow (AP + BP) + (CR + DR) = (AS + DS) + (BQ + CQ)$

$AB + CD = AD + BC$

ఉదాహరణ : వృత్త వ్యాసార్థము 5 సెం.మీ. మరియు రెండు స్పర్శరేఖల మధ్య కోణము 60^0 అయిన ఆ వృత్తానికి స్పర్శరేఖలను గీయండి.



సాధన : స్పర్శరేఖలను గీయుటకు బాహ్య బిందువు 'P' ని గుర్తించాలి.

అంటే వృత్త కేంద్రం 'O' నుండి 'P' కి గల దూరము 'OP'ని కనుగొనాలి.

$OA = OB$ (వ్యాసార్థాలు)

$OP = OP$ (ఉభయ సామాన్య భుజం)

$PA = PB$ (స్పర్శరేఖల పొడవులు)

$\therefore \triangle OAP \cong \triangle OBP$ (భు.భు.భు. సర్వసమానత్వము)

$\therefore \angle APO = \angle BPO = \frac{1}{2} \angle APB$

$$= \frac{1}{2} \times 60^0$$

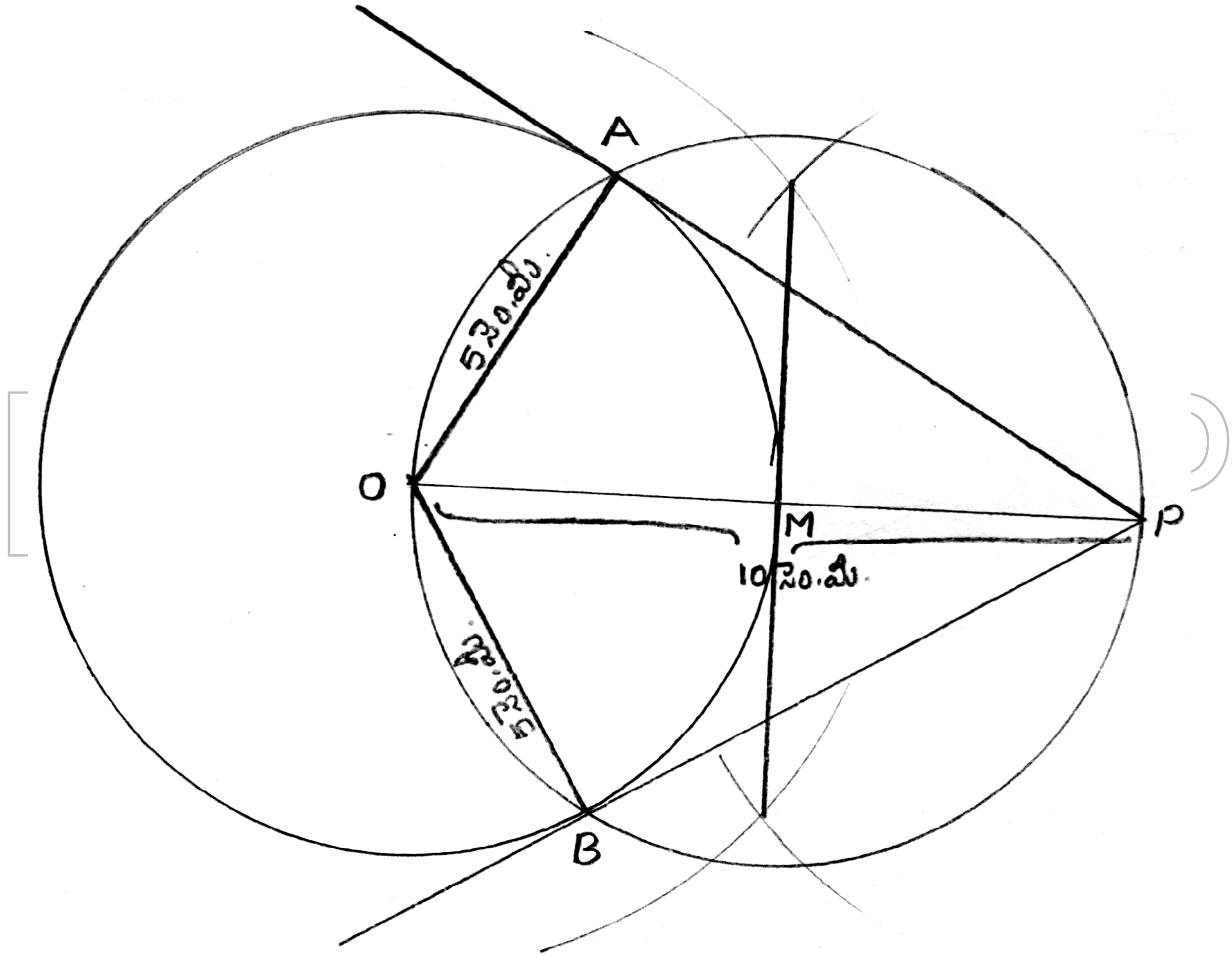
$$= 30^0$$

$\triangle OAP$ లో $OA \perp PA$

$$\therefore Sin\, 30^0 = \frac{30^0 \text{ ల కోణానికి ఎదుటి భుజం}}{\text{కర్ణము}} = \frac{OA}{OP}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{5}{OP} \qquad \left(\therefore Sin\, 30^0 = \frac{1}{2} \right)$$

$\Rightarrow \quad OP = 10$ సెం.మీ.



నిర్మాణ సోపానాలు :

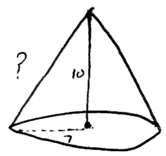
1. $'O'$ కేంద్రంగా $OA = OB = 5$ సెం.మీ. వ్యాసార్థంతో ఒక వృత్తాన్ని గీయుము.
2. $'P'$ బిందువును $OP = 10$ సెం.మీ. అగునట్లు గుర్తించుము.
3. $'OP'$ కి లంబ సమద్విఖండన రేఖను గీయుము. ఇది $\overline{'OP'}$ ని M వద్ద ఖండింపనిమ్ము.
4. M కేంద్రంగా $\frac{1}{2}OP = 5$ సెం.మీ. వ్యాసార్థంతో ఒక వృత్తాన్ని గీయుము. ఇది ముందు గీచిన వృత్తాన్ని A, B లలో ఖండింపనిమ్ము.
5. P, A బిందువులను మరియు P, B బిందువులను వరుసగా కలుపుము. PA, PB లు నిర్మించబడ్డ స్పర్శరేఖలు.

10. క్షేత్రమితి

4 మార్కుల ప్రశ్నలు :

1. శంఖాకారంలో వున్న గుడారము యొక్క భూ వ్యాసార్థము 7 మీటర్లు. గుడారము నిర్మించడానికి కావలసిన గుడ్డ పొడవును గుడ్డ యొక్క వెడల్పు 2 మీటర్లుగా ఉన్నప్పుడు కనుగొనండి. ($\Pi = \frac{22}{7}$ గా తీసుకొనుము).

సా॥ గుడారము (శంకువు) వ్యాసార్థము (r) = 7 మీ.



ఎత్తు (h)= 10 మీ.

ఏటవాలు ఎత్తు (l)= ?

$$l^2 = r^2 + h^2$$

$$l = \sqrt{r^2 + h^2}$$

$$= \sqrt{7^2 + 10^2}$$

$$= \sqrt{49 + 100}$$

$$= \sqrt{149} = 12.2 \text{ మీ.}$$

గుడారము ఉపరితల వైశాల్యము $= \Pi rl$

$$= \frac{22}{7} \times 7 \times 12.2\ m^2$$

$$= 268.4\ m^2$$

ఉపయోగించిన గుడ్డ వైశాలం=గుడారము ఉపరితల వైశాల్యం $= 268.4\ m^2$

గుడ్డ వెడల్పు =2 మీ.

$$\therefore \text{ పొడవు} = \frac{\text{వైశాల్యం}}{\text{వెడల్పు}} = \frac{268.4}{2} = 134.2 \text{ మీ.}$$

2. స్థూపాకృతిలో నున్న నూనె పీపా 2 మీటర్ల భూ వ్యాసార్థము, 7 మీటర్ల ఎత్తును కల్గి వున్నది. పీపాకు రంగు వేయడానికి పెయింటర్ 1 చదరపు మీటరునకు 3రూ. లను తీసుకొంటుంటే, 10 నూనె పీపాలకు రంగు వేయడానికి ఎంత ఖర్చువుతుంది?

సా॥ నూనె పీపా (స్థూపము) భూ వ్యాసము $(d) = 2$ మీ.

$$\text{వ్యాసార్థము } (r) = \frac{d}{2} = \frac{2}{2} = 1 \text{మీ.}$$

ఎత్తు $(h) = 7$ మీ.

నూనె పీపా సంపూర్ణతల వైశాల్యము $= 2\Pi r(r+h)$

$$= 2 \times \frac{22}{7} \times 1(1+7)$$

$$= 2 \times \frac{22}{7} \times 8$$

$$= \frac{352}{7} = 50.28\ m^2$$

1 చ.మీ రంగు వేయడానికి అయ్యే ఖర్చు= రూ. 3

$\therefore$ 10 పీపాలకు రంగు వేయడానికి అయ్యే మొత్తం ఖర్చు =

50.28×3×10

రూ. 1508.40

3. ఒక గోళము, ఒక స్థూపము, ఒక శంఖువు ఒకే ఎత్తు, ఒకే వ్యాసార్థమును కల్గి వున్నాయి. అయినచో వాటి యొక్క వక్రతల వైశాల్యముల నిష్పత్తి ఎంత?

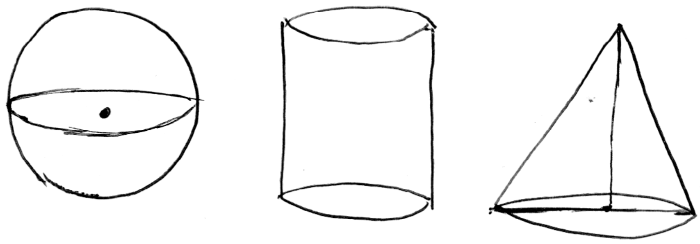
సా॥ గోళం, స్థూపం, శంఖువు వ్యాసార్థము 'x' అనుకుందాం.

గోళము ఎత్తు = దాని వ్యాసము= $2x$

లెక్క ప్రకారము,

శంఖువు ఎత్తు = $2x$ మరియు

స్థూపము ఎత్తు = $2x$



శంఖువు ఏటవాలు ఎత్తు $(l) = \sqrt{r^2 + h^2}$

$$= \sqrt{x^2 + (2x)^2}$$

$$= \sqrt{x^2 + 4x^2}$$

$$= \sqrt{5x^2}$$

$$= \sqrt{5}x$$

గోళము ఉపరితల వైశాల్యము $= 4\Pi r^2 = 4\Pi x^2$

స్థూపము ఉపరితల వైశాల్యము $= 2\Pi rh = 2\Pi x.2x$

$$= 4\Pi x^2$$

శంఖువు ఉపరితల వైశాల్యము $= \Pi rl$

$$= \Pi.x.\sqrt{5}x = \sqrt{5}\,\Pi x^2$$

ఈ మూడింటి ఉపరితల వైశాల్యముల నిష్పత్తి $= 4\cancel{\Pi x^2} : 4\Pi \cancel{x^2} : \sqrt{5}\ \cancel{\Pi x^2}$

$$= 4 : 4 : \sqrt{5}$$

4. 250వ పేజిలోని అభ్యాసం 10.1 లోని 5వ లెక్క.

5. ఒక ధాన్యపు రాశి 12 మీటర్ల భూ వ్యాసము మరియు 8 మీటర్ల ఎత్తు కల్గిన శంఖువువలె యున్నది. అయినచో దాని ఘనపరిమాణం ఎంత? ఆ ధాన్యపురాశిని కప్పడానికి కావలసిన గుడ్డ పరిమాణము ఎంత? ($\Pi = 3.14$ గా తీసుకొనుము.

సా॥. ధాన్యపు రాశి (శంఖువు) భూ వ్యాసము $(d) = 12$ మీ.

$$\text{భూ వ్యాసార్థము } (r) = \frac{12}{2} = 6 \text{ మీ.}$$

$$\text{ఎత్తు } (h) = 8$$

$$\text{ఏటవాలు ఎత్తు } (l) = \sqrt{r^2 + h^2}$$

$$= \sqrt{6^2 + 8^2}$$

$$= \sqrt{36 + 64}$$

$$= \sqrt{100}$$

$$= 10 \text{ మీ.}$$

$$\text{ధాన్యపు రాశి ఘనపరిమాణం } = \frac{1}{3}\Pi r^2 h$$

$$= \frac{1}{\cancel{3}} \times 3.14 \times \overset{2}{\cancel{6}} \times 6 \times 8$$

= 301.44 ఘ.మీ.

$$\text{ధాన్యపురాశి కప్పడానికి కావలసిన గుడ్డ పరిమాణము } = \Pi rl$$

$$= 3.14 \times 6 \times 10$$

$$= 188.4 \text{ చ.మీ.}$$

6. ఒక ఆట వస్తువు అర్థగోళముపై నిటారుగా నిలుపబడిన శంఖువువలె యున్నది. శంఖువు యొక్క భూవ్యాసం 6 సెం.మీ. మరియు ఎత్తు 4 సెం.మీ. అయినచో ఆట వస్తువు యొక్క ఉపరితల వైశాల్యం ఎంత? $(\Pi = 3.14)$

సా॥ శంఖువు యొక్క భూవ్యాసం $(d) = 6$ సెం.మీ.

$$\text{భూ వ్యాసార్థము } (r) = \frac{6}{2} = 3 \text{ సెం.మీ.}$$

$$\text{ఎత్తు } (h) = 4 \text{ సెం.మీ.}$$

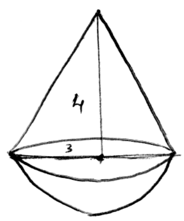
$$\text{ఏటవాలు ఎత్తు } (l) = \sqrt{r^2 + h^2}$$

$$= \sqrt{3^2 + 4^2}$$

$$= \sqrt{9 + 16}$$

$$= \sqrt{25}$$

= 5 సెం.మీ.



అర్థ గోళము వ్యాసార్థము $(r) =$ శంఖువు వ్యాసార్థము $(r) = 3$ సెం.మీ.

ఆట వస్తువు యొక్క ఉపరితల వైశాల్యము=శంఖువు ఉపరితల వైశాల్యం+అర్థగోళము ఉపరితల వైశాల్యం

$$= \Pi rl + 2\Pi r^2$$

$$= \Pi r\left(l+2r\right)$$

$$= 3.14\times3\left(5+2\times3\right)$$

$$= 9.42\,(5+6)$$

$$= 9.42\times11$$

$$= 103.62$$

$\therefore$ ఆట వస్తువు ఉపరితల వైశాల్యము = 103.62 సెం.మీ^{2}.

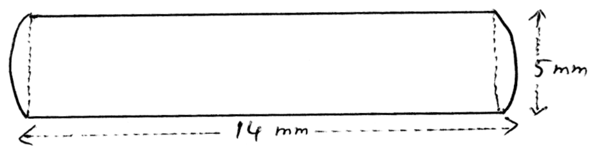
7. 255వ పేజిలోని అభ్యాసం 10.2లోని 2వ లెక్క.

8. ఒక మందు బిళ్ల రెండు చివరల అర్ధగోళాకారంలో నున్న స్థూపమువలె యున్నది. మందు బిళ్ల యొక్క పొడవు 14 మీ.మీ. మరియు వెడల్పు 5 మి.మీ. అయితే దాని ఉపరితల వైశాల్యము ఎంత?

సా॥ మందుబిళ్ల వెడల్పు = అర్ధగోళ వ్యాసము = 5 మి.మీ.

వ్యాసార్థము $(r)=\frac{5}{2}$ మి.మీ.

మందు బిళ్ల పొడవు =14 మి.మీ.



స్థూపాకార భాగపు పొడవు $=14-\cancel{2}\times\frac{5}{\cancel{2}}=9$ మి.మీ.

స్థూపాకార భాగపు వక్రతల వైశాల్యము = $=2\Pi rh$

$$=2\times2\times\frac{22}{7}\times\frac{5}{2}\times\frac{5}{2} \text{ మి.మీ}^2.$$

మందు బిళ్ల ఉపరితల వైశాల్యము = స్థూపాకార వక్రతల వైశాల్యం+రెండు అర్ధగోళాల ఉపరితల వైశాల్యం

$$=\left(\cancel{2}\times\frac{22}{7}\times\frac{5}{\cancel{2}}\times9\right)+\left(2\times2\times\frac{22}{7}\times\frac{5}{\cancel{2}}\times\frac{5}{\cancel{2}}\right)$$

$$=\frac{22}{7}\times5\left(9+5\right)$$

$$=\frac{22}{\cancel{7}}\times5\times\cancel{14}^{2}=220 \text{ మి.మీ}^2$$

$\therefore$ మందు బిళ్ల ఉపరితల వైశాల్యము=220 మి.మీ^{2}.

9. 255వ పేజిలోని అభ్యాసం 10.2లోని 5వ లెక్క.

10. 255వ పేజిలోని అభ్యాసం 10.2 లోని 8వ లెక్క.

11. ఒక ఇనుప స్థూపాకార స్తంభము 2.8 మీటర్ల ఎత్తు, 20 సెం.మీ. వ్యాసము కల్గి వున్నది. దానిపై 42 సెం.మీ. ఎత్తు గల శంఖువు ఆకార భాగమున్నది. ఒక ఘనపు సెం.మీ. ఇనుము యొక్క బరువు 7.5 గ్రాములు అయితే ఆ ఇనుప స్తంభము యొక్క బరువు ఎంత?

సా॥ స్థూపాకార స్తంభము ఎత్తు $(h)=2.8$ మీ.

= 2.8×100 సెం.మీ. =280 సెం.మీ.

వ్యాసం $(d)=20$ మీ.

వ్యాసార్థము $(r)=\frac{20}{2}=10$ మీ.

స్థూపాకార స్తంభము ఘనపరిమాణం $=\Pi r^2 h$

$$=\frac{22}{\cancel{7}}\times10\times10\times\cancelto{40}{280}$$

$=88000$ సెం.మీ^{3}.

శంఖువు ఆకార భాగము వ్యాసార్థము $(r)=10$ సెం.మీ.

ఎత్తు $(h)=42$ సెం.మీ.

ఘన పరిమాణము $=\frac{1}{3}\Pi r^2 h$

$$=\frac{1}{3}\times\frac{22}{7}\times10\times10\times\cancelto{2}{\cancelto{6}{42}}$$

= 4400 సెం.మీ$^{3.}$

ఇనుప స్తంభము ఘనపరిమాణము = స్థూపాకార స్తంభము ఘ.ప+శంఖువు ఆకార భాగం ఘ.ప

= 88000+4400 సెం.మీ$^{3.}$

= 92400 సెం.మీ$^{3.}$

ఒక ఘ.సెం.మీ. ఇనుము యొక్క బరువు = 7.5 గ్రా॥

92400 ఘ. సెం.మీ. గల ఇనుప స్తంభం బరువు = 92400×7.5 గ్రా॥

= 693000 గ్రా॥

$=\frac{693\cancel{000}}{\cancel{1000}}$ కి.గ్రా॥

$=693$ కి.గ్రా॥

12. 260వ పేజిలోని 10.3 అభ్యాసంలోని 2వ లెక్క.

13. ఒక స్థూపాకార తొట్టె 5 సెం.మీ. వ్యాసార్థము మరియు 9.8 సెం.మీ. పొడవును కలిగి నీటితో పూర్తిగా నింపబడి వుంది. అర్థగోళముపై నిటారుగా నిలుపబడిన క్రమ వృత్తాకార శంఖువు ఆకారములో యున్న ఘనాకార వస్తువు దానిలో ముంచబడినది. అర్థ గోళము యొక్క వ్యాసార్థము 3.5 సెం.మీ. అర్థగోళము బయట వున్న శంఖువు ఎత్తు 5 సెం.మీ. అయినచో తొట్టెలో మిగిలివున్న నీటి ఘన పరిమాణమును కనుగొనుము.

($\Pi=\frac{22}{7}$ గా తీసుకొనుము)

సా॥ స్థూపాకార తొట్టె వ్యాసార్థము $(r)=5$ సెం.మీ.

పొడవు $(h)=9.8$ సెం.మీ.

ఘన పరిమాణం $=\Pi r^2 h$

$$=\frac{22}{\cancel{7}}\times 5\times 5\times \overset{1.4}{\cancel{9.8}}$$

$$=770$$ సెం.మీ^{3}.

అర్థగోళము వ్యాసార్థము (r) =3.5 సెం.మీ.

ఘన పరిమాణము $=\frac{2}{3}\Pi r^3$

$$=\frac{2}{3}\times\frac{22}{7}\times 3.5\times 3.5\times 3.5$$

శంఖువు భూవ్యాసార్థము (r) =3.5 సెం.మీ.

ఎత్తు $(h)=5$ సెం.మీ.

ఘన పరిమాణం = $\frac{1}{3}\Pi r^3$

$$=\frac{1}{3}\times\frac{22}{7}\times 3.5\times 3.5\times 5$$ సెం.మీ^{3}.

ఘనాకార వస్తువు మొత్తము ఘనపరిమాణం = అర్థగోళ ఘ.ప+శంఖువు ఘ.ప

$$=\left(\frac{2}{3}\times\frac{22}{7}\times 3.5\times 3.5\times 3.5\right)+\left(\frac{1}{3}\times\frac{22}{7}\times 3.5\times 3.5\times 3.5\right)$$

$$=\frac{22}{7}\times 3.5\times 3.5\left(\frac{2}{3}\times 3.5+\frac{1}{3}\times 5\right)$$

$$=\frac{22}{7}\times 3.5\times 3.5\left(\frac{7}{3}+\frac{5}{3}\right)$$

$$=\frac{22}{\cancel{7}}\times \overset{0.5}{\cancel{3.5}}\times 3.5\times\frac{\overset{4}{\cancel{12}}}{\cancel{3}}$$

$$=154$$ సెం.మీ^{3}.

తొట్టెలో మిగిలి వున్న నీటి ఘ.ప=స్థూపాకార తొట్టె ఘ.ప–ఘనాకార వస్తువు ఘ.ప

= 770–154

= 616 ఘ.సెం.మీ.

14. 261వ పేజిలోని అభ్యాసము 10.3లోని 6వ లెక్క.

15. 261వ పేజిలోని అభ్యాసము 10.3లోని 7వ లెక్క.

16. 4.2 సెం.మీ. వ్యాసార్థము కలిగిన ఒక ఘనపుగోళంను కరిగించి 6 సెం.మీ. వ్యాసార్థము కలిగిన స్థూపంగా

మలిస్తే ఆ ఘనము యొక్క ఎత్తు ఎంత?

సా॥ గోళము యొక్క వ్యాసార్థము $(r) = 4.2$ సెం.మీ.

$$\text{ఘ.ప.} = \frac{4}{3}\Pi r^3$$

$$= \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times 4.2 \times 4.2 \times 4.2 \text{ సెం.మీ}^3.$$

స్థూపము వ్యాసార్థము $(r) = 6$ సెం.మీ.

ఎత్తు $(h) = \;\; ?$

$$\text{ఘన పరిమాణము} = \Pi r^2 h$$

$$= \frac{22}{7} \times 6 \times 6h \text{ సెం.మీ}^3.$$

లెక్క ప్రకారము,

స్థూపము ఘ.ప = గోళము ఘ.ప

$$\frac{22}{7} \times 6 \times 6h = \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times 4.2 \times 4.2 \times 4.2$$

$$h = \frac{\cancel{4}^{\,2}}{\cancel{3}} \times \frac{\cancel{22}}{\cancel{7}} \times \cancel{4.2}^{\,1.4} \times \cancel{4.2}^{\,1.4} \times 4.2^{\,1.4} \times \frac{\cancel{7}}{\cancel{22}} \times \frac{1}{\cancel{6}_{\,3}} \times \frac{1}{\cancel{6}_{\,3}}$$

= 2.74 సెం.మీ.

$\therefore$ స్థూపము ఎత్తు = 2.74 సెం.మీ.

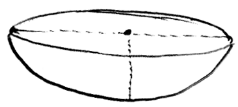
17. 267వ పేజిలోని అభ్యాసం10.4 లోని 3వ లెక్క.
18. 267వ పేజిలోని అభ్యాసం10.4 లోని 6వ లెక్క.
19. 265 పేజిలోని ఉదాహరణ 17
20. 266 పేజిలోని ఉదాహరణ 19

2 మార్కుల లెక్కలు :

1. 248వ పేజిలోని ఉదాహరణ 4

సాధన : అర్థగోళ వ్యాసార్థము $(r) = 21$ సెం.మీ.

$$\text{ఉపరితల వైశాల్యము} = 2\Pi r^2$$



$$= 2 \times \frac{22}{\cancel{7}} \times \cancel{21}^{\,3} \times 21$$

= 2772 సెం.మీ^{2}.

$\therefore$ ఒక పాత్రకు అవసరమైన స్టీల్‌షీట్ = 2772 సెం.మీ^{2}.

1000 పాత్రలకు అవసరమైన స్టీల్‌షీట్ = 2772×1000 సెం.మీ^{2}.

$$= \frac{2772\times \cancel{1000}}{10\cancel{000}} \text{ మీ}^2.$$

= 277.2 మీ^{2}.

2. 249 పేజిలోని ఉదాహరణ 6

3. 250 పేజిలోని ఉదాహరణ 7

4. 250 పేజిలోని అభ్యాసము 10.1లోని 1వ లెక్క

5. 250 పేజిలోని అభ్యాసము 10.1లోని 2వ లెక్క

6. ఒక స్థూపము మరియు శంఖువు సమాన భూవ్యాసార్థమును మరియు ఎత్తును కల్గి వున్నాయి. అయినచో వాటి ఘనపరిమాణముల నిష్పత్తి 3:1 అని చూపుము.

సా॥ స్థూపము మరియు శంఖువు భూవ్యాసార్థములు సమానం.

శంఖువు ఎత్తులు సమానం.

వాటి ఘన పరిమాణముల నిష్పత్తి $=\Pi r^2 h : \frac{1}{3}\Pi \cancel{r^2} h$

$=1:\frac{1}{3}$

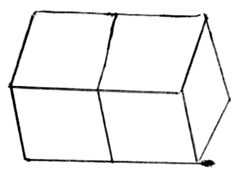
$=3:1$

7. 250వ పేజిలోని అభ్యాంస 10.1లోని 7వ లెక్క.

8. 251వ పేజిలోని అభ్యాసం 10.1 లోని 9వ లెక్క.

9. 64 ఘనపు సెం.మీ. ఘనపరిమాణము గల రెండు ఘనములు కలుపబడినవి. అయిన ఏర్పడిన క్రొత్త ఘనము యొక్క ఉపరితల వైశాల్యము ఎంత?

సా॥ ఒక ఘనము యొక్క ఘ.ప= 64 సెం.మీ^{3}



$a^3 = 64$

$a^3 = 4^3$

$\Rightarrow a = 4$ సెం.మీ.

రెండు ఘనములు కలుపబడినవి.

$\therefore$ ఏర్పడిన దీర్ఘఘనము పొడవు = 4+4=8 సెం.మీ.

ఎత్తు = 4 సెం.మీ.

వెడల్పు = 4 సెం.మీ

ఏర్పడిన దీర్ఘ ఘనము ఉపరితల వైశాల్యము = $2(lb+bh+lh)$

$$= 2(8\times4+4\times4+8\times4)$$

$$= 2(32+16+32)$$

$$= 2\times80$$

$$= 160 \text{ సెం.మీ}^2$$

10. 260వ పేజిలోని అభ్యాసం 10.3లోని 3వ ప్రశ్న.

11. 262వ పేజిలోని ఉదాహరణ 14

1 మార్కు ప్రశ్నలు :

1. 6 సెం.మీ. భూవ్యాసార్థము 7 సెం.మీ. ఎత్తు కలిగిన క్రమ వృత్తాకార శంఖువు యొక్క ఘనపరిమాణమును కనుక్కోండి.

సా॥ వ్యాసార్థము $(r) = 6$ సెం.మీ.

ఎత్తు $(h) = 7$ సెం.మీ.

క్రమ వృత్తాకార శంఖువు యొక్క ఘనపరిమాణము $= \frac{1}{3}\Pi r^2 h$

$$= \frac{1}{\cancel{3}} \times \frac{22}{\cancel{7}} \times \overset{2}{\cancel{6}} \times 6 \times \cancel{7}$$

$$= 264 \text{ సెం.మీ}^3$$

2. 250వ పేజిలోని అభ్యాసం 10.1 లోని 4వ లెక్క.

1/2 మార్కు ప్రశ్నలు :

1. రెండు ఘనపు వస్తువులను కలుపగా ఏర్పడిన ఘనపు వస్తువు యొక్క ఘన పరిమాణం. ఆరెండింటి .... నకు సమానం.
2. స్థూపము వక్రతల / ఉపరితల వైశాల్యము = ...
3. శంఖువు వక్రతల / ఉపరితల వైశాల్యము = ...
4. గోళము వక్రతల / ఉపరితల వైశాల్యము = ...
5. అర్థగోళము వక్రతల / ఉపరితల వైశాల్యము = ...
6. స్థూపము సంపూర్ణతల వైశాల్యము = ...
7. శంఖువు సంపూర్ణతల వైశాల్యము = ...
8. అర్థ గోళము సంపూర్ణతల వైశాల్యము = ...
9. స్థూపము ఘ.ప. = ...

10. శంఖువు ఘ.ప. = ...

11. గోళము ఘ.ప. = ...

12. అర్థ గోళము ఘ.ప. = ...

13. భూ వ్యాసార్థము 7 సెం.మీ, ఎత్తు 24 సెం.మీ. కల్గిన శంఖువు ఘ.ప. = ...

14. ఒక అర్థ గోళము సంపూర్ణతల వైశాల్యము 115.5 సెం.మీ^{2}, వ్యాసార్థము = ...

15. ఒక శంఖువు ఏటవాలు ఎత్తు, ఎత్తులు వరుసగా 25 సెం.మీ., 20 సెం.మీ. అయిన దాని వ్యాసార్థము = ...

సమాధానాలు :

1) ఘనపరిమాణముల మొత్తము

2) $2\Pi rh$

3) Πrl

4) $4\Pi r^2$

5) $2\Pi r^2$

6) $2\Pi r(r+h)$

7) $\Pi r(l+r)$

8) $3\Pi r^2$

9) $\Pi r^2 h$

10) $\frac{1}{3}\Pi r^2 h$

11) $\frac{4}{3}\Pi r^3$

12) $\frac{2}{3}\Pi r^3$

13) 1232 సెం.మీ^{3}

14) 3.5 సెం.మీ.

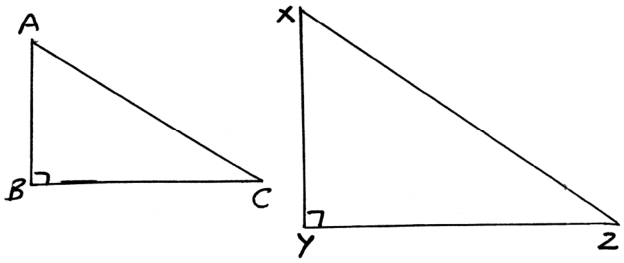
15) 15 సెం.మీ.

11. త్రికోణమితి

4 మార్కుల ప్రశ్నలు :

1. $Cos\ A = Cos\ X$ అయ్యేటట్లు $\lfloor A$ మరియు $\lfloor X$ లు లఘుకోణాలైన $\lfloor A = \lfloor X$ అని చూపుము.

సాధన : $\triangle ABC,\ \triangle XYZ$ లలో



$$\lfloor B = \lfloor Y = 90^0$$

$Cos\ A = Cos\ X$ (దత్తాంశం)

$$\Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{XY}{XZ}$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{XY} = \frac{AC}{XZ}$$

$\frac{AB}{XY} = \frac{AC}{XZ} = K$ అనుకుందాం.

$\Rightarrow AB = K.XY$ మరియు $AC = K.XZ$

పైథాగరస్ సిద్ధాంతం ప్రకారం

$$AB^2 + BC^2 = AC^2$$

$$BC^2 = AC^2 - AB^2$$

$$= (K.XZ)^2 - (K.XY)^2$$

$$= K^2(XZ)^2 - K^2(XY)^2$$

$$= K^2\left(XZ^2 - XY^2\right)$$

$$= K^2YZ^2$$

$$BC = \sqrt{K^2YZ^2} = K.YZ$$

$$\frac{BC}{YZ} = K$$

కావున $\frac{AB}{XY} = \frac{BC}{YZ} = \frac{AC}{XZ}$

$$\therefore \triangle ABC \sim \triangle XYZ$$

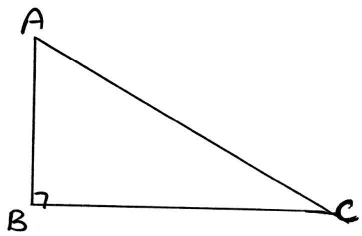
కాబట్టి $\lfloor A = \lfloor X$

2. 276వ పేజిలోని ఉదాహరణ-2

3. B వద్ద లంబకోణము కల్గిన త్రిభుజం ABC లో $\tan A = \sqrt{3}$ అయిన (i) $Sin\ A\, Cos\ C + Cos\ A\ SinC$ (ii) $Cos\ A\, Cos\ C - Sin\ A\ Sin\ C$ ల విలువలను కనుగొనుము.

సాధన : $\triangle ABC$ లో $\lfloor B = 90^0$

$\tan A = \sqrt{3}$



$\Rightarrow \frac{\text{ఎదుటి భుజం}}{\text{ఆసన్న భుజం}} = \frac{\sqrt{3}}{1}$

$\Rightarrow \frac{BC}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{1}$

$\Rightarrow BC : AB = \sqrt{3} : 1$

$BC = \sqrt{3}K$ మరియు $AB = K$ అనుకుందాం.

$\triangle ABC$ లో $AC^2 = AB^2 + BC^2$ ($\because$ పైథాగరస్ సిద్ధాంతం)

$$= K^2 + \left(\sqrt{3}K\right)^2$$

$$= K^2 + 3K^2$$

$$= 4K^2$$

$$AC = \sqrt{4K^2} = 2K$$

$$Sin\ A = \frac{\underline{|A} \text{ కి ఎదుటి భుజం}}{\text{కర్ణము}} = \frac{BC}{AC} = \frac{\sqrt{3}\cancel{K}}{2\cancel{K}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$Cos\ A = \frac{\underline{|A} \text{ కి ఆసన్న భుజం}}{\text{కర్ణము}} = \frac{AB}{AC} = \frac{\cancel{K}}{2\cancel{K}} = \frac{1}{2}$$

$$Sin\ C = \frac{\underline{|C} \text{ కి ఎదుటి భుజం}}{\text{కర్ణము}} = \frac{AB}{AC} = \frac{\cancel{K}}{2\cancel{K}} = \frac{1}{2}$$

$$Cos\ C = \frac{\underline{|C} \text{ కి ఆసన్నభుజం}}{\text{కర్ణము}} = \frac{AB}{AC} = \frac{\sqrt{3}\cancel{K}}{2\cancel{K}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

(i) $Sin\ A\ Cos\ C + Cos\ A\ Sin\ C = \frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}.\frac{1}{2} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3+1}{4} = \frac{\cancel{4}}{\cancel{4}} = 1$

(ii) $Cos\ A\ Cos\ C - Sin\ A\ Sin\ C = \frac{1}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} = 0$

4. $Sin\,(A-B) = \frac{1}{2},\ Cos(A+B) = \frac{1}{2}, 0^0 < A+B \le 90^0, A > B$ ఐతే A మరియు B లను కనుగొనుము.

సా॥. $Sin\left(A-B\right) = \frac{1}{2}$

కాని $Sin\ 30^0 = \frac{1}{2}$ (పట్టిక నుండి)

$\Rightarrow A - B = 30^0$...........(1)

$$Cos\left(A+B\right)=\frac{1}{2}$$

కానీ $Cos\,60^0=\frac{1}{2}$ (పట్టిక నుండి)

$$\Rightarrow A+B=60^0............(2)$$

(1), (2) లను సాధించగా

$$A-\cancel{B}=30^0$$

$$A+\cancel{B}=60^0$$

$$2A=90^0$$

$$A=\frac{90^0}{2}=45^0$$

$A=45^0$ ను (2) లో ప్రతిక్షేపించగా

$$45^0+B=60^0$$

$$B=60^0-45^0=15^0$$

$$\therefore A=45^0, B=15^0$$

5. $\sqrt{\frac{1+Cos\,\theta}{1-Cos\,\theta}}=Co\sec\theta+Cot\,\theta$ అని నిరూపించండి.

సా॥ $LHS=\sqrt{\frac{1+Cos\,\theta}{1-Cos\,\theta}}$

లవ,హారాలను $1+Cos\,\theta$ చే గుణించగా

$$\sqrt{\frac{1+Cos\theta}{1-Cos\theta}.\frac{1+Cos\theta}{1+Cos\theta}}$$

$$=\sqrt{\frac{\left(1+Cos\,\theta\right)^2}{1^2-Cos^2\theta}}$$

$$=\sqrt{\frac{\left(1+Cos\,\theta\right)^2}{1-Cos^2\theta}}$$

$$=\sqrt{\frac{\left(1+Cos\,\theta\right)^2}{Sin^2\theta}}$$ $$\left[\therefore Sin^2\theta+Cos^2\theta=1 \Rightarrow Sin^2\theta=1-Cos^2\,\theta\right]$$

$$=\frac{1+Cos\theta}{Sin\theta}$$

$$= \frac{1}{Sin\theta} + \frac{Cos\theta}{Sin\theta}$$

$$= Cosec\theta + Cot\theta = R.H.S.$$

$$\therefore L.H.S. = R.H.S$$

6. 292వ పేజిలోని అభ్యాసము 11.4 లోని 3వ లెక్క.

7. $Cosec\theta + Cot\theta = K$ అయితే $Cos\theta = \frac{K^2-1}{K^2+1}$ అని నిరూపించుము.

$Cosec\theta + Cot\theta = K$

$$R.H.S\ \frac{K^2-1}{K^2+1} = \frac{(Cosec\theta + Cot\theta)^2 - 1}{(Cosec\theta + Cot\theta)^2 + 1}$$

$$= \frac{Cosec^2\theta + Cot^2\theta + 2Cosec\theta Cot\theta - 1}{Cosec^2\theta + Cot^2\theta + 2Cosec\theta Cot\theta + 1}$$

$$= \frac{Cosec^2\theta - 1 + Cot^2\theta + 2Cosec\theta Cot\theta}{Cosec^2\theta + Cot^2\theta + 1 + 2Cosec\theta Cot\theta}$$

$$= \frac{Cot^2\theta + Cot^2\theta + 2Cosec\theta Cot\theta}{Cosec^2\theta + Cosec^2\theta + 1 + 2Cosec\theta Cot\theta}$$

$$\left[\begin{array}{l} \therefore Cosec^2\theta - Cot^2\theta = 1 \\ \Rightarrow Cosec^2\theta - 1 = Cot^2\theta \\ \Rightarrow Cosec^2\theta = Cot^2\theta + 1 \end{array}\right]$$

$$= \frac{2Cot^2\theta + 2Cosec\theta\ Cot\theta}{2Cosec^2\theta + 2Cosec\theta\ Cot\theta}$$

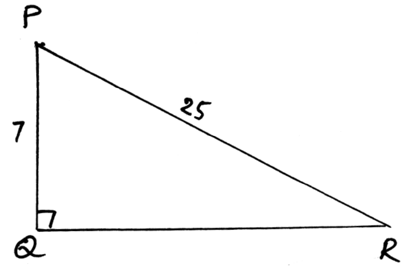
$$= \frac{\cancel{2}Cot\theta\left(\cancel{Cot\theta + Cosec\theta}\right)}{\cancel{2}Cosec\theta\left(\cancel{Cosec\theta + Cot\theta}\right)}$$

$$= \frac{Cot\theta}{Cosec\theta} = \frac{\frac{Cos\theta}{Sin\theta}}{\frac{1}{Sin\theta}} = \frac{Cos\theta}{\cancel{Sin\theta}} \times \frac{\cancel{Sin\theta}}{1} = Cos\theta = L.H.S$$

$$\therefore LHS = RHS$$

2 మార్కుల ప్రశ్నలు :

1. లంబకోణ త్రిభుజం PQR యొక్క భుజాలు $PQ = 7$ సెం.మీ., $PR = 25$ సెం.మీ., మరియు $\angle Q = 90^0$ అయిన $\tan P - \tan R$ కనుగొనుము.



సా॥. $PQ = 7$ సెం.మీ.

$PR = 25$ సెం.మీ.

$\angle Q = 90^0$

$PQ^2 + QR^2 = PR^2$ (∴ పైథాగరస్ సిద్ధాంతము)

$7^2 + QR^2 = 25^2$

$44 + QR^2 = 625$

$QR^2 = 625 - 49 = 576$

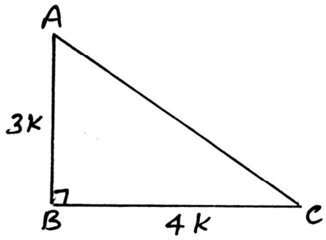
$QR = \sqrt{576} = 24$

$$\tan P = \frac{\angle P \text{ కి ఎ.భు}}{\angle P \text{ కి ఆ.భు}} = \frac{QR}{PQ} = \frac{24}{7}$$

$$\tan R = \frac{\angle R}{\angle R} = \frac{PQ}{QR} = \frac{7}{24}$$

$$\therefore \tan P - \tan R = \frac{24}{7} - \frac{7}{24} = \frac{576-49}{168} = \frac{527}{168}$$

2. $3\tan A = 4$ అయిన $SinA$ మరియు $CosA$ విలువలను కనుగొనుము



సా॥ $3\tan A = 4$ ఆ.భు

$$\tan A = \frac{4}{3} =$$

∴ ఎ.భు:ఆ.భు=4:3

ఎదుటి భుజము $4K$, ఆసన్న భుజము $3K$ అనుకుందాం.

$\angle ABC$ లో $\angle 8 = 90^0$

$\therefore AC^2 = AB^2 + BC^2$ (∴ పైథాగరస్ సిద్ధాంతం)

$= (3K)^2 + (4K)^2$

$= 9K^2 + 16K^2 = 25K^2$

$AC = \sqrt{25K^2} = 5K$

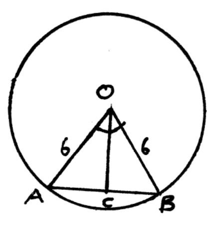
$$SinA = \frac{\text{ఆ.భు}}{\text{క}} = \frac{4K}{5K} = \frac{4}{5}$$

$$CosA = \frac{}{} = \frac{3K}{5K} = \frac{3}{5}$$

3. 277వ పేజిలోని అభ్యాసం 11.1లోని 4వ లెక్క.

4. 282వ పేజిలోని ఉదాహరణ×4

5. 6 సెం.మీ. వ్యాసార్థం కల్గిన వృత్తంలో ఒక జ్యా కేంద్రం వద్ద 60^0 క జ్యా పొడవును కనుకొనండి.



సా॥ వ్యాసార్థము $OA = OB = 6$ సెం.మీ.

$\angle AOB = 60^0$

AB పైకి 'O' నుండి ఎత్తు OC గీద్దాం.

ఇది $\angle O$ కి కోణ సమద్వి ఖండన రేఖ అవుతుంది.

$$\therefore \angle COB = 30^0$$

$\triangle COB$ లో $Sin 30^0 = \dfrac{BC}{OB}$

$$\frac{1}{2} = \frac{BC}{6}$$

$$2BC = 6$$

$\therefore$ జ్యా పొడవు $AB = 2BC = 6$ సెం.మీ.

6. 284వ పేజిలోని ఉదాహరణ×6

7. $Sin\,60^0\,Cos\,30^0 + Sin\,30^0\,Cos\,60^0$ విలువ గణించండి. $Sin\left(60^0 + 30^0\right)$ విలువ ఎంత? దీని నుండి మీరేం గ్రహించారు?

సా॥ పట్టిక నుండి $Sin\,60^0 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}, Cos\,30^0 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}, Sin\,30^0 = \dfrac{1}{2}, Cos\,60^0 = \dfrac{1}{2}, Sin\,90^0 = 1$

$$\therefore Sin\,60^0\,Cos\,30^0 + Sin\,30^0\,Cos\,60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}.\frac{1}{2} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3+1}{4} = \frac{\cancel{4}}{\cancel{4}} = 1$$

$$Sin\,(60^0 + 30^0) = Sin\,90^0 = 1$$

$$\therefore Sin\,(60^0 + 30^0) = Sin\,60^0\,Cos\,30^0 + Sin\,30^0\,Cos\,60^0$$

$60^0 = A, 30^0 = B$ గా తీసుకున్న

$$Sin(A+B) = Sin\,A\,Cos\,B + Cos\,A\,Sin\,B$$

8. $Cos\,36^0\,Cos\,54^0 - Sin\,36^0\,Sin\,54^0 = 0$ అని చూపండి.

సా॥ $Cos\,36^0\,Cos\,54^0 - Sin\,36^0\,Sin\,54^0 = Cos(90^0 - 54^0)\,Cos\,54^0 - Sin(90^0 - 54^0)\,Sin\,54^0$

$$= Sin\,54^0\,\cancel{Cos}\,54^0 - Cos\,\cancel{54^0}\,Sin\,54^0 \quad \left(\begin{array}{l} \because Cos(90-\theta) = Sin\,\theta \\ Sin(90-\theta) = Cos\,\theta \end{array}\right)$$

$$= 0$$

9. A, B మరియు C లు $\triangle ABC$ లోని అంతర కోణాలైన $\tan\left(\dfrac{A+B}{2}\right) = Cot\,\dfrac{C}{2}$ అని చూపుము.

సా॥ $\triangle ABC$ లోని అంతరకోణాల మొత్తం $A + B + C = 180^0$

ఇరువైపులా 2 చే భాగించగా

$$\frac{A+B+C}{2} = \frac{180^0}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{A+B}{2} + \frac{C}{2} = 90^0$$

$$\Rightarrow \frac{A+B}{2} = 90^0 - \frac{C}{2}$$

$$\Rightarrow \tan\frac{(A+B)}{2} = \tan\left(90^0 - \frac{C}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \tan\frac{(A+B)}{2} = \cot\frac{C}{2} \qquad \left(\because \tan(90^0-\theta) = \cot\theta\right)$$

10. 288వ పేజిలోని ఉదాహరణ×12.

11. $\tan^2\theta + \tan^4\theta = \sec^4\theta - \sec^2\theta$ అని చూపుము.

సా॥ $L.H.S = \tan^2\theta + \tan^4\theta = \tan^2\theta(1+\tan^2\theta)$

$$= \tan^2\theta.\sec^2\theta \qquad (\because \sec^2\theta - \tan^2\theta = 1 \Rightarrow \sec^2\theta = 1+\tan^2\theta \Rightarrow \sec^2\theta - 1 = \tan^2\theta)$$

$$= \left(\sec^2\theta - 1\right)\left(\sec^2\theta\right)$$

$$= \sec^4\theta - \sec^2\theta = R.H.S$$

$$\therefore L.H.S. = R.H.S$$

12. $\sec A(1-\sin A)(\sec A + \tan A)$ ను సూక్ష్మీకరించండి.

సా॥ $\sec A(1-\sin A)(\sec A+\tan A) = (\sec A - \sec A\sin A)(\sec A + \tan A)$

$$= \left(\sec A - \frac{1}{\cos A}.\sin A\right)(\sec A + \tan A)$$

$$= \left(\sec A - \frac{\sin A}{\cos A}\right)(\sec A + \tan A)$$

$$= (\sec A - \tan A)(\sec A + \tan A)$$

$$= \sec^2 A - \tan^2 A$$

$$= 1$$

$$\therefore \sec A(1-\sin A)(\sec A + \tan A) = 1$$

13. $(\sin A + \cos ecA)^2 + (\cos A + \sec A)^2 = 7 + \tan^2 A + \cot^2 A$ అని నిరూపించుము.

సా॥ $L.H.S\,(\sin A + \cos ecA)^2 = \sin^2 A + \cos ec^2 A + 2\sin A\cos ecA +$
$\cos^2 A + \sec^2 A + 2\cos A\sec A$

$$= \left(\sin^2 A + \cos^2 A\right) + \cos ec^2 A + \sec^2 A + \cancel{2\sin A}.\frac{1}{\cancel{\sin A}} + \cancel{2\cos A}.\frac{1}{\cancel{\cos A}}$$

$$= 1 + \cos ec^2 A + \sec^2 A + 2 + 2$$

$$= 5 + \cos ec^2 A + \sec^2 A$$

$[\because \cos ec^2 A - \cot^2 A = 1$
$\cos ec^2 A = 1 + \cot^2 A$
$\sec^2 A - \tan^2 A = 1$
$\sec^2 A = 1 + \tan^2 A]$

$$= 5 + 1 + \cot^2 A + 1 + \tan^2 A$$

$$= 7 + \tan^2 A + \cot^2 A$$

14. 292వ పేజిలోని 11.4 అభ్యాసంలోని 8వ లెక్క.

1 మార్కు ప్రశ్నలు :

1. $\sin 45^0 + \cos 45^0$ గణించండి.

సా॥ పట్టిక నుండి $\sin 45^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \cos 45^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\therefore \sin 45^0 + \cos 45^0 = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1+1}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}.\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

2. $\cot 0^0 = \frac{1}{\tan 0^0}$ నిర్వచింపబడుతుందా? ఎందుకు?

సా॥ $\cot 0^0 = \frac{1}{\tan 0^0} = \frac{1}{0}$ ఇది నిర్వచింపబడదు ఎందుకనగా 'O' తో భాగహారము నిర్వచింపబడును.

3. $2\tan^2 45^0 + \cos^2 30^0 - \sin^2 60^0$ గణించండి.

సా॥ పట్టిక నుండి $\tan 45^0 = 1, \cos 30^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}, \sin 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$2\tan^2 45^0 + \cos^2 30^0 - \sin^2 60^0 = 2(1)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

$$= 2 + \cancel{\frac{3}{4}} + \cancel{\frac{3}{4}}$$

$$= 2$$

4. $\sin(A+B) = \sin A + \sin B$ అనడం సబబేనా? మీ సమాధానాన్ని సమర్థించుము.

సా॥ $A = 60^0, B = 30^0$ తీసుకుందాం.

అప్పుడు $\sin\left(A+B\right) = \sin(60^0 + 30^0) = \sin 90^0 = 1$

$$\sin A + \sin B = \sin 60^0 + \sin 30^0 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

$$\therefore \sin(A+B) \neq \sin A + \sin B$$

కావున $\sin(A+B) = \sin A + \sin B$ అనడం సబబు కాదు.

5. $\cos 12^0 - \sin 78^0$ గణించండి.

సా॥ $\cos 12^0 - \sin 78^0 = \cos(90^0 - 78^0) - \sin 78^0$

$$= \sin 78^0 - \sin 78^0 \qquad (\because \cos(90^0 - \theta) = \sin\theta)$$

$$= 0$$

6. $\tan 2A = \cot(A - 18^0)$, $2A$ లఘుకోణం అయిన A విలువ కనుక్కోండి.

సా॥ $\tan 2A = \cot(A - 18^0)$

$\Rightarrow \cot(90^0 - 2A) = \cot(A - 18^0) \qquad (\because \cot(90^0 - A) = \tan A)$

$\Rightarrow 90^0 - 2A = A - 18^0$

$\Rightarrow 90^0 + 18^0 = A + 2A$

$\Rightarrow 108^0 = 3A$

$$\Rightarrow 3A = 108^0 \Rightarrow A = \frac{\overset{36^0}{\cancel{108^0}}}{\cancel{3}}$$

$\therefore A = 36^0$

7. A, B లు లఘుకోణాలు మరియు $\tan A = \cot B$ అయిన $A + B = 90^0$ అని నిరూపించుము.

సా॥ $\tan A = \cot B = \tan(90^0 - B) \qquad (\because \tan(90^0 - \theta) = \cot\theta)$

$\Rightarrow A = 90^0 - B$

$\Rightarrow A + B = 90^0$

8. $\sin 75^0 + \cos 65^0$ ను 0^0 మరియు 45^0 మధ్యగల విలువల త్రికోణమితీయ నిష్పత్తులలో తెల్పుము.

సా॥ $\sin 75^0 = \sin(90^0 - 15^0) = \cos 15^0 \qquad (\because \sin(90^0 - \theta) = \cos\theta)$

$\cos 65^0 = \cos(90^0 - 25^0) = \sin 25^0 \qquad (\because \cos(90^0 - \theta) = \sin\theta)$

$\therefore \sin 75^0 + \cos 65^0 = \cos 15^0 + \sin 25^0$

9. $\sin C = \frac{15}{17}$ అయిన $\cos C$ ని కనుగొనుము.

సా॥ $\sin C = \frac{15}{17}$

$\sin^2 C + \cos^2 C = 1$ అని మనకు తెల్సు.

$$\Rightarrow \left(\frac{15}{17}\right)^2 + \cos^2 C = 1$$

$$\Rightarrow \cos^2 C = 1 - \frac{225}{289} = \frac{289 - 225}{289} = \frac{64}{289}$$

$$\Rightarrow \cos C = \sqrt{\frac{64}{289}} = \frac{8}{17}$$

$$\therefore \cos C = \frac{8}{17}$$

10. $(\sin\theta + \cos\theta)^2 + (\sin\theta - \cos\theta)^2$ ను గణించండి.

సా॥ $(\sin\theta + \cos\theta)^2 + (\sin\theta - \cos\theta)^2$

$$= \sin^2\theta + \cos^2\theta + \cancel{2\sin\theta}\cos\theta + \sin^2\theta + \cos^2\theta - \cancel{2\sin\theta}\cos\theta$$

$$= 1 + 1 = 2$$

$$\therefore (\sin\theta + \cos\theta)^2 + (\sin\theta - \cos\theta)^2 = 2$$

11. $(\sec^2\theta - 1)(\cos ec^2\theta - 1)$ ను గణించండి.

సా॥ $(\sec^2\theta - 1)(\cos ec^2\theta - 1) = \tan^2\theta . \cot^2\theta$

$$= \cancel{\tan^2}\theta . \frac{1}{\cancel{\tan^2}\theta} \quad \begin{bmatrix} \therefore \sec^2\theta - \tan^2\theta = 1 \Rightarrow \sec^2\theta - 1 = \tan^2\theta \\ con\sec^2\theta - \cot^2\theta = 1 \Rightarrow \cos ec^2\theta - 1 = \cot^2\theta \end{bmatrix}$$

$$= 1$$

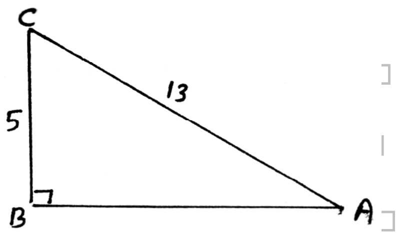
$$\therefore (\sec^2\theta - 1)(\cos ec^2\theta - 1) = 1$$

12. 290వ పేజిలోని ఉదాహరణ-13

13. 292వ పేజిలోని అభ్యాసం 11.4లోని 5వ లెక్క

14. 292వ పేజిలోని అభ్యాసం 11.4లోని 9వ లెక్క

1/2



1. ప్రక్క త్రిభుజంలో $\cos A =$ ....

2. $CosA = \frac{12}{13}$ ఐన $\sin A =$ ....

3. $\sqrt{1 + \tan^2\theta} =$ ....

4. $\frac{\sec^2 60^0 - \tan^2 60^0}{\sin^2 30^0 + \cos^2 30^0} =$ ....

5. $\frac{2\tan 30^0}{1 + \tan^2 30^0} =$ ....

6. $\frac{1 - \tan^2 45^0}{1 + \tan^2 45^0} =$ ....

7. $\frac{2\tan 30^0}{1 - \tan^2 30^0} =$ ....

8. $\dfrac{\tan 36^0}{\cot 54^0} =$ ....

9. $\cos ec 31^0 - \sec 59^0 =$ ....

10. $\sin 15^0 . \sec 75^0 =$ ....

11. $\tan 26^0 . \tan 64^0 =$ ....

12. $\tan\ x = \dfrac{5}{12}, \sec\ x =$ ....

13. $\cos ec\theta = \dfrac{25}{7}, \textit{then} \cot\ \theta =$ ....

14. $\sin 5^0 \cos 85^0 + \cos 5^0 \sin 85^0 =$ ....

15. $\sec\theta + \tan\theta = P$ అయితే $\sec\theta - \tan\theta =$ ....

16. $\cos ec\theta + \cot\theta = P$ అయితే $\cos ec\theta - \cot\theta =$ ....

17. $\sin\theta = \dfrac{3}{5}$ అయితే $\tan\theta =$ ....

18. $\sin^2 50^0 + \cos^2 50^0 =$ ....

19. $\sec^2 100^0 - \tan^2 100^0 =$ ....

20. $\cos ec^2 75^0 - \cot^2 75^0 =$ ....

21. $\sin\theta = \cos\theta$ అయిన $\theta =$ ....

22. $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ అయిన $\theta =$ ....

23. $\cos(A+B) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ అయిన $A+B =$ ....

24. $\sin 10^0 . \sec 80^0 =$ ....

25. $\dfrac{\sin 18^0}{\cos 72^0} =$ ....

సమాధానాలు

1) $\dfrac{12}{13}$

2) $\dfrac{5}{13}$

3) $\sec\theta$

4) 1

5) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

6) 0

7) $\sqrt{3}$

8) 1

9) 0

10) 1

11) 1

12) $\frac{13}{12}$

13) $\frac{24}{7}$

14) 1

15) $\frac{1}{P}$

16) $\frac{1}{P}$

17) $\frac{3}{4}$

18) 1

19) 1

20) 1

21) 45^0

22) 60^0

23) 30^0

24) 1

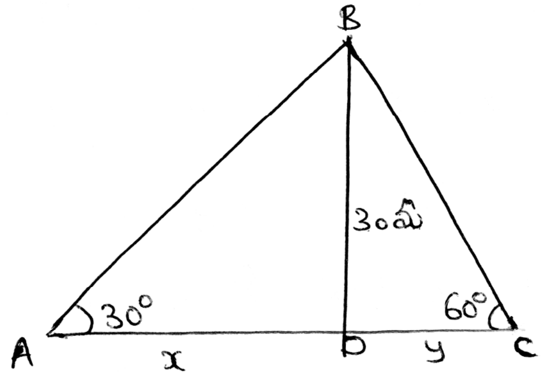
25) 1

12. త్రికోణమితి అనువర్తనాలు

5 మార్కుల ప్రశ్నలు :

1. 30 మీటర్ల ఎత్తు గల ఒక గుడి పైభాగాన్ని, దాని ఇరువైపులా వున్న ఇద్దరు వ్యక్తులు 30^0 మరియు 60^0 ఊర్ధ్వకోణాలలో పరిశీలించారు. ఆ ఇద్దరు వ్యక్తుల మధ్య దూరం ఎంత?

సాధన : పటం నుండి దేవాలయము ఎత్తు $BD = 30$ మీ.



మొదటి వ్యక్తి పరిశీలన స్థానం

A నుండి చూచినపుడు ఏర్పడిన

ఊర్ధ్వకోణం $\angle BAD = 30^0$

రెండవ వ్యక్తి C నుండి పరిశీలించినపుడు

ఏర్పడిన ఊర్ధ్వకోణం $\angle BCD = 60^0$

మొదటి వ్యక్తి నుండి గుడి దూరం $AD = x$ మీ.అ.కొ.

రెండవ వ్యక్తి నుండి గుడి దూరం $CD = y$ మీ. అ.కొ.

$\therefore ABD$ లంబకోణ త్రిభుజము నుండి

$$\tan 30^0 = \frac{BD}{AD}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{30}{x}$$

$$x = 30\sqrt{3} \rightarrow (1)$$

$\therefore BCD$ లంబకోణ త్రిభుజము నుండి

$$\tan 60^0 = \frac{BD}{DC}$$

$$\frac{V3}{1} = \frac{30}{y}$$

$$\sqrt{3}y = 30$$

$$y = \frac{30}{\sqrt{3}} \rightarrow (2)$$

స॥(1) మరియు (2)ల నుండి ఇద్దరి వ్యక్తుల మధ్య దూరం $AC = AD + DC$

$$= x + y$$

$$= \frac{30\sqrt{3}}{1} + \frac{30}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{\left(30\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}\right)+30}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{30 \times 3 + 30}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{90+30}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{120}{\sqrt{3}}$$

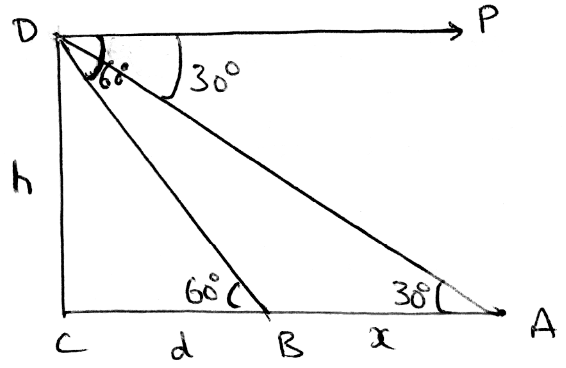
$\therefore$ ఇద్దరు వ్యక్తుల మధ్య దూరము $AC = \frac{120}{\sqrt{3}}$ మీ.

2. ఒక టవర్ పాదం వరకు ఒక చక్కని రహదారి ఉంది. ఆ టవర్‌పై నిలబడి ఉన్న రామయ్య అనే వ్యక్తి దూరం #°O_ □=‹ ঋßHê~¡#° 30^0 ల నిమ్నకోణంలో గమనించాడు. ఈ స్థానం నుండి కారు టవర్‌ను చేరడానికి పట్టుకాలం ఎంత?

సాధన : పటం నుండి 6 సెకండ్లలో

కారు ప్రయాణించిన దూరం $AB = x$ మీ.

టవర్ ఎత్తు $CD = h$ మీ.



కారు ప్రయాణించాల్సిన

మిగిలిన దూరం $BC = d$ మీ.

$\therefore AC = AB + BC = (x+d)$ మీ

$\underline{|PDA} = \underline{|DAB} = 30^0$

$\underline{|PDB} = \underline{|DBC} = 60^0$

$\triangle BCD$ నుండి

$$\tan 60^0 = \frac{CD}{BC}$$

$$\sqrt{3} = \frac{h}{d}$$

$$h = \sqrt{3}d \rightarrow (1)$$

$\triangle ACD$ నుండి

$$\tan 30^0 = \frac{CD}{AC}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{x+d}$$

$$\sqrt{3}h = x + d$$

$$h = \frac{x+d}{\sqrt{3}} \rightarrow (2)$$

సమీకరణ (1) మరియు (2)ల నుండి

$$\frac{x+d}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}d$$

$$x + d = 3d$$

$$x = 3d - d$$

$$x = 2d$$

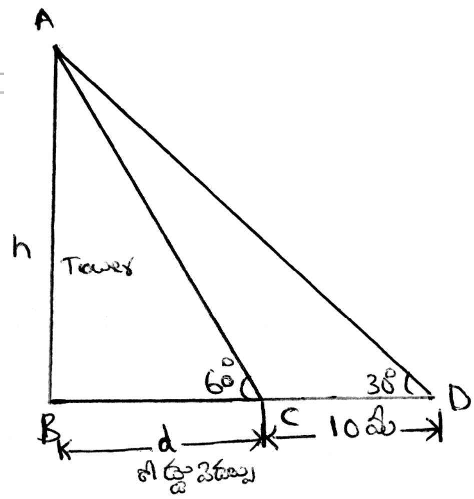
$$\therefore d = \frac{x}{2}$$

$\therefore x$ మీటర్లు దూరం ప్రయాణించడానికి పట్టుకాలము=6 సెకండ్లు

$d = \frac{x}{2}$ మీటర్లు దూరం ప్రయాణించడానికి పట్టుకాలము = 3సెకండ్లు

3. ఒక టి.వి. టవర్ ఒక రోడ్డు ప్రక్కన నిటారుగా నిలబెట్టబడి ఉంది. రోడ్డుకు అవతలి వైపు నుండి టవర్‌పై కొనను పరిశీలించిన 60^0 ఊర్ధ్వకోణం చేస్తుంది. ఇంకా టవర్ పాదం మరియు ఈ స్థానాన్ని కలిపే సరళరేఖపై 10 మీటర్ల దూరం జరిగిన పిదప టవర్ పై కొన 30^0 ఊర్ధ్వకోణం చేస్తుంది. టవర్ ఎత్తును మరియు రోడ్డు వెడల్పును కనుగొనండి.

సాధన : ప్రక్క పటం నుండి



టి.వి. టవర్ ఎత్తు $AB = h$ మీ.

రోడ్డు వెడల్పు $BC = d$ మీ. అ.కొ.

$CD = 10$ మీ

మరియు $BD = BC + CD = (d+10)$ మీ.

$\underline{|ACB} = 60^0$ మరియు $\underline{|ADC} = 30^0$

$\triangle ABC$ లో $\underline{|B} = 90^0$

$$\tan 60^0 = \frac{AB}{BC}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{h}{d}$$

$$\therefore h = \sqrt{3}d \rightarrow (1)$$

$\triangle ABD$ లో $\underline{|B} = 90^0$

$$\tan 30^0 = \frac{AB}{BD}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{(d+10)}$$

$$\sqrt{3}h = d + 10$$

$$h = \frac{d+10}{\sqrt{3}} \rightarrow (2)$$

స॥ (1) మరియు (2) ల నుండి

$$\frac{\sqrt{3}d}{1} = \frac{d+10}{\sqrt{3}}$$

$$3d = d + 10$$

$$3d - d = 10$$

$$2d = 10$$

$d = 5$ మీ.

$\therefore$ రోడ్డు వెడల్పు $BC = d = 5$ మీ.

టి.వి. టవర్ ఎత్తు $AB = h = \sqrt{3}.d$

$$= \sqrt{3} \times 5$$

$AB = h = 5\sqrt{3}$ మీ.

4. ఒక విగ్రహం 2 మీటర్లు ఎత్తు గల పీఠంపై నిలబెట్టబడి ఉంది. దానిని కొంత దూరం నుండి పరిశీలించిన విగ్రహం పైభాగం 60^0 మరియు పీఠం పైభాగం 45^0 ఊర్ధ్వకోణాలు చేస్తున్నాయి. విగ్రహం ఎత్తు ఎంత?

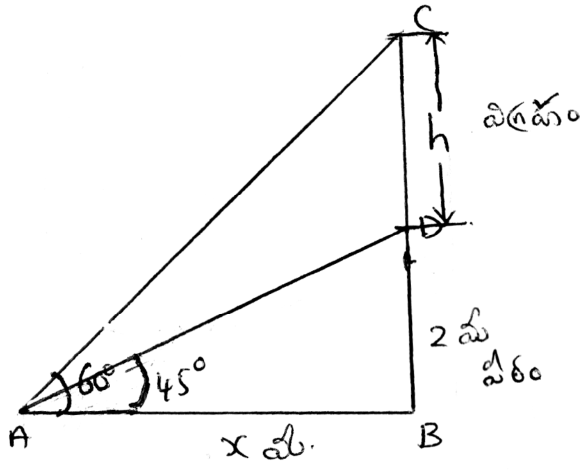
సాధన : ప్రక్క పటం నుండి

పీఠం ఎత్తు $BD = 2$ మీ.

విగ్రహం ఎత్తు $CD = h$ మీ.అనుకొనుము

$$BC = BD + DC$$

$$= (2+h)\text{ మీ.}$$



పరిశీలక స్థానం A నుండి విగ్రహ పీఠం B వరకు గల దూరం $AB = x$ మీ అనుకొనుము.

$$\lfloor BAD = 45^0, \quad \lfloor BAC = 60^0$$

$\triangle ABD$ లో $\lfloor B = 90^0$ కావున

$$\tan 45^0 = \frac{BD}{AB}$$

$$1=\frac{2}{AB}$$

$$1=\frac{2}{x}$$

$$x=2$$

$\therefore AB=x=2$ మీ. $\rightarrow (1)$

$\triangle ABC$ లో $\underline{|B}=90^0, \underline{|BAC}=60^0$ కావున

$$\tan 60^0=\frac{BC}{AB}$$

$$\sqrt{3}=\frac{(2+h)}{2}$$

$$2+h=2\sqrt{3}$$

$$h=2\sqrt{3}-2$$

$$=2\times 1.732-2$$

$$=2(1.732-1)$$

$$=2\times 0.732$$

$h=1.464$ మీ.

$\therefore$ పీఠంపై గల విగ్రహం ఎత్తు $CD=h=1.464$ మీ.

5. ఒక టవర్ అడుగు భాగం నుండి భవనం పై భాగం 30^0 ఊర్ధ్వకోణం చేస్తుంది. భవనం అడుగుభాగం నుండి టవర్ పై భాగం 60^0 ఊర్ధ్వకోణం చేస్తుంది. టవర్ ఎత్తు 30 మీ. అయిన భవనం ఎత్తు కనుగొనుము?

సాధన : ప్రక్క పటం నుండి

టవర్ ఎత్తు AB = 30 మీ.

భవనం ఎత్తు $CD=h$ మీ. అనుకొనుము

టవర్ పాదం నుండి భవనం

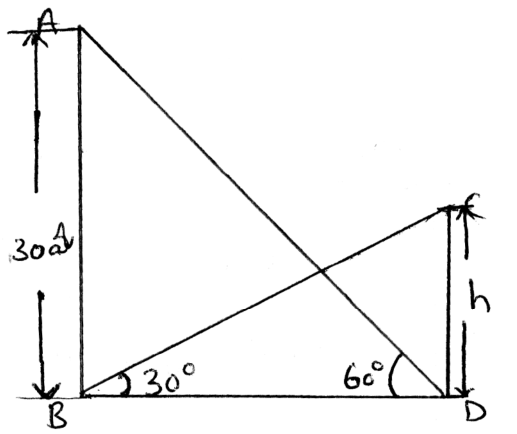
పాదం వరకు గల మధ్య దూరం $=BD$

$\underline{|ADB}=60^0,\ \underline{|CBD}=30^0$

$\therefore \triangle ABD$ నుండి $\underline{|ABD}=90^0$ కావున

$$\tan 60^0=\frac{AB}{BD}$$

$$\sqrt{3}=\frac{30}{BD}$$



$$\sqrt{3}BD = 30$$

$$BD = \frac{30}{\sqrt{3}} \rightarrow (1)$$

$\therefore BCD$ నుండి $\lfloor BDC = 90^0$ కావున

$$\tan 30^0 = \frac{CD}{BD}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{\frac{30}{\sqrt{3}}}$$

$$\sqrt{3}h = \frac{30}{\sqrt{3}}$$

$$h = \frac{30}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}}$$

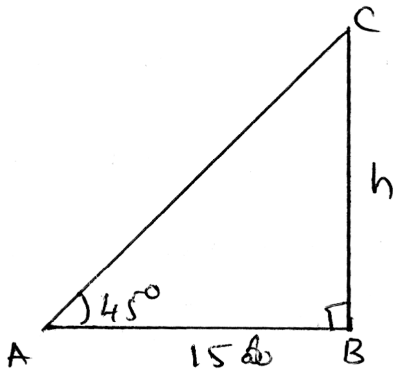
$$h = \frac{\overset{10}{\cancel{30}}}{\cancel{3}}$$

$$h = 10$$

$\therefore$ భవనం ఎత్తు $CD = h = 10$ మీ.

2 మార్కుల ప్రశ్నలు :

1. భూమిపై ఒక టవర్ నిటారుగా నిలచి ఉంది. ఆ టవర్ అడుగు నుండి 15 మీటర్ల దూరం నుండి ఆ టవర్ పైకొన 45^0 ఊర్ధ్వకోణంలో పరిశీలించబడింది. అయిన ఆ టవర్ ఎత్తు ఎంత?



సాధన : ప్రక్క పటం నుండి

టవర్ ఎత్తు $BC = h$ మీ. అ.కొ.

పరిశీలక స్థానం A నుండి టవర్ పాదం

వరకు గల దూరం $AB = 15$ మీ.

లంబకోణ త్రిభుం నుండి $\lfloor CAB = 45^0$ కావున

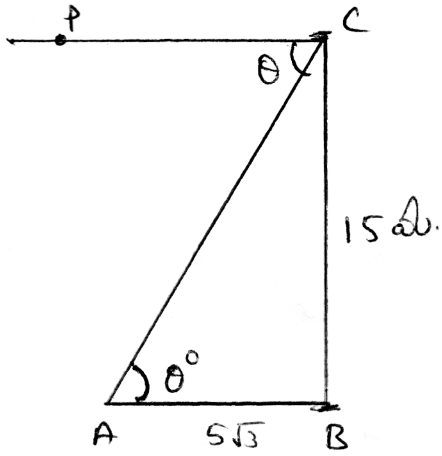
$$\tan 45^0 = \frac{BC}{AB}$$

$$1 = \frac{h}{15}$$

$$h = 15 \text{ మీ.}$$

$\therefore$ టవర్ ఎత్తు $h = BC = 15$ మీ.

2. ఉదయం 7 గంటలకు 15 మీటర్లు ఎత్తు గల స్తంభం యొక్క నీడ పొ లు, భూమితో ఎంత కోణం చేస్తున్నాయి.



సాధన : ప్రక్క పటం నుండి

స్తంభం ఎత్తు $BC = 15$ మీ.

స్తంభం చేయు నీడ పొడవు $AB = 5\sqrt{3}$

సూర్యకిరణాలు భూమితో చేయు కోణం

$\underline{|PCA} = \underline{|CAB} = \theta$ అ.కొ.

$\therefore ABC$ లంబకోణ త్రిభుజం నుండి

$$\tan\theta = \frac{BC}{AB}$$

$$= \frac{\cancel{15}^{3}}{\cancel{5}\sqrt{3}}$$

$$= \frac{3}{\sqrt{3}}$$

$$\tan\theta = \sqrt{3}$$

కానీ $\tan 60^0 = \sqrt{3}$

$$\therefore \theta = 60^0$$

$\therefore$ సూర్యకిరణాలు భూమితో చేయు కోణం $\theta = 60^0$

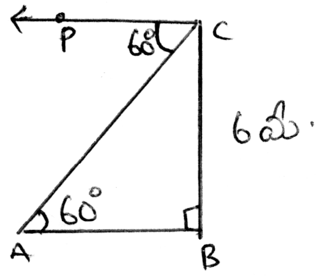
3. విజయ్ భూమి నుండి 6 మీటర్ల ఎత్తు గల భవనంపై నున్న ఒక లక్ష్యాన్ని 60^0 నిమ్నకోణంలో బాణంతో ఛేదించాలనుకున్నాడు. విజయ్ నుండి లక్ష్యం ఎంత దూరంలో ఉంటుంది.

సాధన : భవనం ఎత్తు $BC = 6$ మీటర్లు

భవనం అడుగు భాగం నుండి లక్ష్యానికి గల దూరం $AB = x$ మీటర్లు అ.కొ.

$\underline{|PCA} = \underline{|CAB} = 60^0$

ABC లంబకోణ త్రిభుజము నుండి



$$\tan 60^0 = \frac{BC}{AB}$$

$$\sqrt{3} = \frac{6}{AB}$$

$$AB\sqrt{3} = 6$$

$$AB = \frac{6}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{6}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{{}^{2}\cancel{6}\sqrt{3}}{\cancel{3}}$$

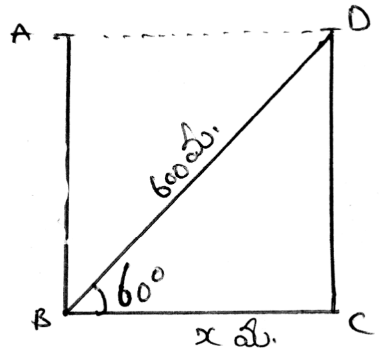
$$AB = 2\sqrt{3}$$

$$= 2 \times 1.732$$

$AB = 3.464$ మీటరు

4. ఒక నావ ఒక నదిని దాటాల్సి ఉంది. నదీ ప్రవాహం కారణంగా ఆ నది తీరంతో 60^0 కోణం చేస్తున్న ఆ నావ 600 మీటర్లు ప్రయాణించి అవతలి తీరాన్ని చేరింది. ఆ నది వెడల్పెంత?

సాధన : పటం నుండి



నది వెడల్పు $BC = AD = x$ మీ అనుకొనుము

నది తీరము నావ చేయు కోణం $\lfloor CBD = 60^0$

నది తీరము నుండి ఆవలి వైపుకు

నావ ప్రయాణించిన దూరము $BD = 600$ మీ.

BCD లంబకోణ త్రిభుజము నుండి

$$Cos\ 60^0 = \frac{BC}{BD}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{x}{600}$$

$\therefore x = 300$ మీ.

నది వెడల్పు $BC = AD = x = 300$ మీ.

13. సంభావ్యత

* ఒక ఘటన సంభవము యొక్క ప్రమాణీకరణమును సంఖ్యాత్మకముగా తెలుపుటను “సంభావ్యత” అంటారు.
* ఒక ఘటన E యొక్క సైద్ధాంతిక సంభావ్యతను P(E) తో సూచిస్తాము.

$$P(E)=\frac{E \text{ కు అనుకూల పర్యవసానాల సంఖ్య}}{\text{మొత్తం పర్యవసానాల సంఖ్య}}$$

* E ఒక ఘటన అయితే ‘E కానిది’ అను ఘటనను $\overline{E}$ తో సూచిస్తారు. దీనిని పూరక ఘటన అంటారు.

కావున P(E)+P(E)=1

నోట్ : ఎందుకంటే ఒక ప్రయోగంలో అన్ని ప్రాథమిక ఘటనల సంభావ్యతల మొత్త ‘1’ అవుతుంది.

4 మార్కుల ప్రశ్నలు :

1) ఒక సంచిలో ఒక ఎరుపు బంతి, ఒక నీలం బంతి, ఒక పసుపు రంగు బంతి ఉన్నాయి. అన్ని బంతులు ఒకే పరిమాణము కలిగి ఉన్నాయి. సంచిలోనికి చూడకుండా మానస ఒక బంతిని తీస్తే ఆ బంతి (i) పసుపు రంగు బంతి, (ii) ఎరుపు రంగు బంతి, (iii) నీలం రంగు బంతి అవడానికి సంభావ్యతలు కనుగొనండి.

సాధన : మానస చూడకుండా బంతిని తీసుకున్నది. కావున అన్ని పర్యవసానములు సమసంభవములు. పసుపు రంగు బంతిని తీయు ఘటన Y, నీలం బంతి తీయు ఘటన 'B' మరియు ఎరుపు బంతి తీయు ఘటన 'R' అయిన ప్రతి రూప ఆవరణము $\{Y.B.R\}$

$\therefore$ మొత్తం పర్యవసానములు =3

(i) పసుపు రంగు బంతి (Yని) తీయుటకు అనుకూల పర్యవసానములు =1

$$\therefore P(Y)=\frac{\text{అనుకూల పర్యవసానములు}}{\text{మొత్తం పర్యవసానములు}}=\frac{1}{3}$$

(ii) ఎరుపు రంగు బంతి (Rని) తీయుటకు అనుకూల పర్యవసానములు=1

$$\therefore P(R)=\frac{\text{అనుకూల పర్యవసానములు}}{\text{మొత్తం పర్యవసానములు}}=\frac{1}{3}$$

(iii) నీలం రంగు బంతి (Bని) తీయుటకు అనుకూల పర్యవసానములు=1

$$\therefore P(B)=\frac{\text{అనుకూల పర్యవసానములు}}{\text{మొత్తం పర్యవసానములు}}=\frac{1}{3}$$

2) ఒక పాచికను ఒకసారి దొర్లించినపుడు (i) 4 కన్నా ఎక్కువ పడు ఘటన సంభ్యావత (ii) 4 లేక అంతకన్నా తక్కువ పడు ఘటన సంభావ్యతను కనుక్కోండి.

సాధన : ఒక పాచికను దొర్లించినపుడు ప్రతిరూప ఆవరణము $S=\{1,2,3,4,5,6\}$

అనగా మొత్తం పర్యవసానములు $n(S)=6$

(i) '4 కన్నా ఎక్కువ' అనుఘటనకు అనుకూల పర్యవసానము $E=\{5,6\}$

$\therefore E$ కు అనుకూల పర్యవసానములు సంఖ్య $n(E)=2$

$\therefore$ 4 కన్నా ఎక్కువ పడు ఘటన సంభావ్యత $P(E)=\frac{n(E)}{n(S)}=\frac{\text{అ.ప}}{\text{మొ.ప}}$

$$=\frac{\cancel{2}}{\cancel{6}_3}=\frac{1}{3}$$

(ii) 4 లేక అంతకన్నా తక్కువ పడు ఘటన 'F' అనుకొంటే

F కు అనుకూల పర్యవసానాలు $F=\{1,2,3,4\}$

$\therefore$ అనుకూల పర్యవసానాల సంఖ్య $n(F)=4$

$\therefore F$ ఘటన సంభావ్యత $P(F)=\frac{n(F)}{n(S)}=\frac{\cancel{4}^2}{\cancel{6}_3}$

$$=\frac{2}{3}$$

3) రహీమ్ ఒక పేకాట కార్డుల కట్టలోని అన్ని హృదయపు గుర్తు గల కార్డులను తొలగించాడు. ఇప్పుడు

(i) ఒక కార్డును ఎన్నుకొంటే అది ఏస్ అయ్యే సంభావ్యత ఎంత?

(ii) డైమండును ఎన్నుకునే సంభావ్యత ఎంత?

(iii) హృదయం గుర్తులేని కార్డు ఎన్నుకొనే సంభావ్యత ఎంత?

(iv) హృదయం గుర్తు గల ఏస్‌ను ఎన్నుకొనే సంభావ్యత ఎత?

సాధన : రహీం పేకాట కార్డుల కట్టలోని అన్ని హృదయపు గుర్తు గల కార్డులను తొలగించాడు అనగా

పేకాట కార్డుల కట్టలోని పేక ముక్కలు =52

హృదయపు గుర్తు గల పేక ముక్కలు =13

కట్టలో మిగిలే పేక ముక్కలు = 52-13=39

ఇప్పుడు సమాధానాలు :

(i) ఒక కార్డును ఎన్నుకుటే అది ఏస్ అయ్యే సంభావ్యత

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{\cancel{3}}{\cancel{39}_{13}}=\frac{1}{13}$$

($\because$ ఎందుకంటే 39 ముక్కలతో 3 మాత్రమే ఏస్‌లు ఉంటాయి).

(ii) డైమండ్ ముక్కల సంఖ్య $n(D)=13$

39 ముక్కల నుండి డైమండ్‌ను ఎన్నుకొనే సంభావ్యత $P(D)=\frac{n(D)}{n(S)}$

$$=\frac{\cancel{13}^{1}}{\cancel{39}_{3}}=\frac{1}{3}$$

(iii) హృదయం గుర్తులేని కార్డుల సంఖ్య $n(S)=39$

హృదయం గుర్తులేని కార్డులను ఎన్నుకొనే సంభావ్యత $=\frac{\cancel{39}}{\cancel{39}}=1$

(iv) హృదయం గుర్తు గల ఏస్‌ను ఎన్నుకొనే సంభావ్యత

$$=\frac{\text{హృదయం గుర్తు గల కార్డుల సంఖ్య (39లో)}}{\text{మొత్తం కార్డుల సంఖ్య}}$$

$$=\frac{0}{39}=0$$

4) ఒక పెట్టెలో 5 ఎరుపు, 8 తెలుపు, 4 ఆకుపచ్చ గోళీలు కలవు. పెట్టె నుండి యాదృచ్ఛికంగా ఒక గోళీను తీస్తే అది (i) ఎరుపు (ii) తెలుపు (iii) ఆకుపచ్చ కానిది అగుటకు సంభావ్యతలు కనుగొనండి.

సాధన : పెట్టెలోని గోళీల సంఖ్య =5+8+4=17

ప్రతిరూప ఆవరణలోని పర్యవసానముల సంఖ్య=17

(i) పెట్టె నుండి యాదృచ్ఛికంగా గోళీని తీస్తే అది ఎరుపు

రంగు గోళీ అగుటకు అనుకూల పర్యవసానములు $n(R)=5$

$\therefore$ సంభావ్యత $P(R)=\frac{\text{అ.ప}}{\text{మొ.ప}}=\frac{5}{17}$

(ii) పెట్టె నుండి యాదృచ్ఛికంగా గోళీని తీస్తే అది తెలుపుది అగుటకు

అనుకూల పర్యవసానములు $n(T)=8$

$\therefore$ పెట్టె నుండి యాదృచ్ఛికంగా గోళీని తీస్తే అది తెలుపు రంగు

గోళీ అగుటకు గల సంభావ్యత $P(T)=\frac{\text{అ.ప}}{\text{మొ.ప}}=\frac{8}{17}$

(iii) పెట్టె నుండి యాదృచ్ఛికంగా గోళీని తీస్తే అది ఆకుపచ్చది అగుట గల పర్యవసానము $n(G)=4$

$\therefore$ ఆకుపచ్చ గోళీ అగుటకు సంభావ్యత $P(G)=\frac{\text{అ.ప}}{\text{మొ.ప}}=\frac{4}{17}$

కానీ ఆకుపచ్చ గోళీ కాకపోవుట సంభావ్యత $P\left(\overline{G}\right)$ కావున

$$P(G)+P(\overline{G})=1$$

$$\therefore P(\overline{G})=1-P(G)$$

$$=1-\frac{4}{17}$$

$$=\frac{17-4}{17}=\frac{13}{17}$$

5. బాగుగా కలుపబడిన పేక ముక్కల కట్ట (52) మంది యాదృచ్ఛికంగా ఒక కార్డును తీస్తే అది క్రింది కార్డు అగుటకు సంభావ్యతలు లెక్కించండి.

(i) ఎరుపు రాజు (ii) ముఖ కార్డు (iii) ఎరుపు, ముఖకార్డు, (iv) హృదయం గుర్తు గల జాకీ (v) స్పేడ్ (vi) డైమండు గుర్తు గల రాణి

సాధన : కట్టలోని పేక ముక్కల సంఖ్య =52

ప్రతి రూప ఆవరణలో పర్యవసానముల సంఖ్య $n(S)=52$

(i) పేక ముక్కల నుండి ఎరుపు రాజు (కింగ్)ను తీయగల

అనుకూల పర్యవసానాలు $n(R)=2$

పేక ముక్కల కట్ట నుండి ఎరుపు రాజును తీయగల సంభావ్యత

$$P(R)=\frac{n(R)}{n(S)}$$

$$=\frac{2}{52}=\frac{1}{26}$$

(ii) యాదృచ్ఛికంగా తీసిన కార్డు ముఖ కార్డు అగుటకు అనుకూల పర్యవసానాలు $n(F)=12$

యాదృచ్ఛికంగా తీసిక కార్డు ముఖ కార్డు అగుటకు సంభావ్యత

$$P(F)=\frac{\text{అ.ప}}{\text{మొ.ప}}=\frac{n(F)}{n(S)}=\frac{\cancel{12}^{3}}{\cancel{52}_{13}}=\frac{3}{13}$$

(iii) యాదృచ్ఛికంగా తీసిన కార్డు ఎరుపు, ముఖ కార్డు అగుటకు

అనుకూల పర్యవసానాలు =6

$$\therefore \text{ సంభావ్యత } =\frac{\text{అ.ప}}{\text{మొ.ప}}=\frac{\cancel{6}^{3}}{\cancel{52}_{26}}=\frac{3}{26}$$

(iv) యాదృచ్ఛికంగా తీసిక కార్డు హృదయం గుర్తు (ఆటీన్ జాకీ) గల జాకీ

అగుటకు అనుకూల పర్యవసానాలు =1

$\therefore$ సంభావ్యత $= \frac{1}{52}$

(v) యాదృచ్ఛికంగా తీసిక కార్డు స్పేడ్ గుర్తు అగుటకు

అనుకూల పర్యవసానాలు =13

స్పేడ్ గుర్తు అగుటకు సంభావ్యత = $= \frac{\text{అ.ప}}{\text{మొ.ప}} = \frac{\cancel{13}^{1}}{\cancel{52}_{4}} = \frac{1}{4}$

(vi) యాదృచ్ఛికంగా తీసిక కార్డు డైమెండ్ గుర్తు గల రాణి అగుటకు

అనుకూల పర్యవసానాలు = 1

డైమండ్ రాణి అగుటకు సంభావ్యత $= \frac{1}{52}$

2 మార్కుల ప్రశ్నలు :

1) పరస్పర వర్జిత ఘటనలు అనగా నేమి?

సాధన : ఒక ప్రయోగంలోని రెండు లేక అంతకన్నా ఎక్కువ ఘటనలలో ఒక ఘటన యొక్క సంభవము మిగిలిన అన్ని ఘటనల సంభవమును నిరోధిస్తే, ఆ ఘటనలను పరస్పర వర్జిత ఘటనలు అంటారు.

2) పూరక ఘటనలు అనగా నేమి?

సాధన : ఒక ప్రయోగంలో E అనేది ఒక ఘటన అయితే E కానిది అనే ఘటనను $\overline{E}$ గా సూచిస్తే $\overline{E}$ ను E యొక్క పూరక ఘటన అంటారు.

అనగా $P(E)+P(E)=1$

దీని నుండి $P(E)=1-P(E)$

$\therefore$ E ఏదైనా ఒక ఘటన అయిన $P\left(\overline{E}\right)=1-P(E)$

3) సంగీత, రేష్మాలు టెన్నీస్ ఆటను ఆడుతున్నారు. సంగీత గెలిచే సంభావ్యత 0.62 అయినప్పుడు రేష్మ గెలిచే సంభావ్యత కనుగొనండి.

సాధన : సంగీత, రేష్మాలు ఆటను గెలిచే ఘటనలను S, R అని అనుకొంటే

సంగీత గెలిచే సంభావ్యత $P(S)=0.62$

పూరక సంభావ్యత సూత్రము ప్రకారం

రేష్మ గెలిచే సంభావ్యత $P(R)=1-P(S)$

$=1-0.62$

$=0.38$

4) ఒక వ్యాపారి వద్ద 144 పెన్నులు ఉన్నాయి. అందులో 20 లోపాలు కలిగి ఉన్నాయి. సుధ పెన్ను కొనడానికి వస్తే వ్యాపారి యాదృచ్ఛికంగా ఒక పెన్ను ఇస్తే దానిని (i) సుధ కొనుటకు (ii) కొనలేక పోవుటకు సంభావ్యతలు ఎంతెంత?

సాధన : మొత్తం పెన్నుల సంఖ్య =144

లోపాలు గల పెన్నుల సంఖ్య=20

లోపం లేని పెన్నులను ఎన్నుకొనే అనుకూల పర్యవసానాల సంఖ్య =144−20=124.

(i) సుధ పెన్ను కొనుటకు గల సంభావ్యత $= \frac{\text{అ.ప}}{\text{మొ.ప}} = \frac{124}{144} = \frac{31}{36}$

(ii) సుధ పెన్ను కొనలేక పోవుటకు సంభావ్యత = $=1-\frac{31}{36} = \frac{5}{36}$

1 మార్కు ప్రశ్నలు :

1) $P(E) = 0.05$ అయిన E కానిది యొక్క సంభావ్యత ఎంత?

E

సంభావ్యత పూరక ఘటన సిద్ధాంతం ప్రకారం

$P(E) + P(E$ కానిది)=1

$P(E$ కానిది) $=1-P(E)$

= 1.0.05

= 0.95

2) ముగ్గురు విద్యార్థులలో ఇద్దరి పుట్టిన రోజులు సంవత్సరములో ఒకే రోజు రాని సంభావ్యత 0.992 అయిన ఒకే రోజు వచ్చే సంభావ్యత ఎంత?

సాధన : ఏ ఇద్దరి పుట్టిన రోజులు సంవత్సరంలో ఒకే రోజు రాని

సంభావ్యత $P(E) = 0.992$

ఒకే రోజు వచ్చే సంభావ్యత $P(E) = 1 - P(E)$

= 1−0.992

= 0.008

3) ఒకే పేక ముక్కల కట్ట నుండి ఎరుపు రంగు రాజును తీయు సంభావ్యత ఎంత?

సాధన : కట్టలోని పేక ముక్కల సంఖ్య = 52

పేక ముక్కలలో ఆటీన్ రాజు, డైమండ్ రాజులు మాత్రమే ఎరుపు రంగు రాజులు.

పేక ముక్కల కట్ట నుండి ఎరుపు రంగు రాజును తీసే పర్యవసానాల సంఖ్య=2

సంభావ్యత = $= \frac{\text{అ.ప.}}{\text{మొ.ప}} = \frac{2}{52} = \frac{1}{26}$

4) పూర్ణ ఘటనలు నిర్వచింపుము.

సాధన : ఒక ప్రయోగములోని అన్ని ఘటనల సమ్మేళనము ప్రతిరూప ఆవరణము అయిన, వానిని పూర్ణ ఘటనలు అంటారు.

5) బాగా కలిపిన పేక ముక్కల కట్ట నుండి యాదృచ్ఛికముగా తీసిన కార్డు ముఖ కార్డు కాకపోవుటకు సంభావ్యత ఎంత?

సాధన : 52 ముక్కల పేక కార్డులలో ముఖ కార్డు వచ్చుటకు గల పర్యవసానాలు =12

$$\text{ముఖ కార్డు వచ్చు సంభావ్యత } P(E)=\frac{\cancel{12}^{3}}{\cancel{52}_{13}}=\frac{3}{13}$$

$$\text{ముఖ కార్డు కాని సంభావ్యత } P(E)=1-P(E)=1-\frac{3}{13}=\frac{10}{13}$$

6) ఒకే ఒక అనుకూల పర్యవసానము గల ఘటనను ప్రాథమిక ఘటన అంటారు. ప్రయోగములోని అన్ని ప్రాధమిక ఘటనల సంభావ్యతల మొత్తం '1' అవుతుంది.

ఖాళీలు (1/2 మార్కు బిట్స్) :

1) సంభావ్యతను మొదటిసారిగా నిర్వచించిన శాస్త్రవేత్త <u>పియర్ సిమ్సన్</u>
2) ఒక సంచిలో 6 ఎరుపు, 3 నీలం, 7 ఆకుపచ్చ గోళీలు ఉన్నాయి. యాదృచ్ఛికంగా సంచి నుండి ఒక గోళీని తీస్తే అది నీలం అగుటకు సంభావ్యత $\underline{\frac{3}{16}}$
3) ఒక పాచిక విసిరినపుడు సరి లేదా బేసి సంఖ్య పడే సంభావ్యత $\underline{\frac{1}{2}}$
4) ఒక ప్రయోగంలో ఒక ఘటనకు అనుకూల పర్యవసానము ఒక్కటి మాత్రమే అయితే దానిని <u>ప్రాధమిక ఘటన</u> అంటారు.
5) $P(E)=0.91$ అయిన $P(\overline{E})=\underline{0.09}$
6) $P(E)+P(\overline{E})=\underline{1}$
7) ఖచ్చిత ఘటన యొక్క సంభావ్యత $\underline{1}$
8) ఒక ప్రయోగంలో రెండు లేక అంతకన్నా ఎక్కువ ఘటనలు సంభవించడానికి సమాన అవకాశములు ఉంటే ఆ ఘటనలను సమసంభవ ఘటనలు అంటారు.
9) $O\le P(E)\le m$ అయిన $m=1$
10) $P\left(A^1\cap B^1\right)=\underline{1-P\left(A\cup B\right)}$
11) $P\left(A^1\cup B^1\right)=1-P\left(A\cap B\right)$
12) $P(E)=\frac{1}{3}$ అయిన $P(\overline{E})=2/3$
13) ఒక పందెంలో గెలవడానికి/ఓడిపోవడానికి గల సంభావ్యత $\underline{0.5}$
14) ఒక ప్రతి రూప ఆవరణలో 100 పర్యవసానముల ఉన్నవి. వాటిలో ప్రతి దాని సంభావ్యత $\underline{\frac{1}{100}}$
15) ϕ ఒక <u>అసాధ్య</u> ఘటన

14. సాంఖ్యక శాస్త్రం

Prepared by
K. Kiran Kumar Reddy
ZPHS, Dommara Mandyala.

1. అంకగణిత సగటు :

(a) అవర్గీకృత దత్తాంశ సగటు $\bar{x} = \dfrac{\text{అంశాల మొత్తము}}{\text{అంశాల సంఖ్య}}$

(b) వర్గీకృత దత్తాంశ సగటు :

(i) ప్రత్యక్ష పద్ధతి, $\bar{x} = \dfrac{\sum f_i x_i}{\sum f_i}$

(ii) విచలన పద్ధతి $\bar{x} = a + \dfrac{\sum f_i d_i}{\sum f_i}$

(ఊహించిన సగటు పద్ధతి)

(iii) సోపాన విచలన పద్ధతి, $\bar{x} = a + \dfrac{\sum f_i u_i}{\sum f_i} \times h$

(కనిష్ట విచలన పద్ధతి)

2. బాహుళకము :

(a) అవర్గీకృత దత్తాంశం :

దత్తాంశంలో ఎక్కువసార్లు వచ్చిన అంశము

(b) వర్గీకృత దత్తాంశము :

బాహుళకం= $l + \dfrac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \times h$

3. మధ్యగతము :

(a) అవర్గీకృత దత్తాంశము :

(i) అంశాల సంఖ్య 'n' బేసి సంఖ్య అయితే మధ్యగతం $\dfrac{n+1}{2}$ వ అంశము.

(ii) అంశాల సంఖ్య 'n' సరిసంఖ్య అయితే మధ్యగతం $\dfrac{n}{2}, \dfrac{n}{2}+1$వ అంశాల సరాసరి.

(b) వర్గీకృత దత్తాంశం:

మధ్యగతం= $l + \dfrac{\frac{n}{2} - cf}{f} \times h$

4. సగటు, మధ్యగతం, బాహుళకముల మధ్య సంబంధము

బాహుళకం = 3×మధ్యగతం−2×సగటు

1 మార్కు ప్రశ్నలు :

1) 10వ తరగతి పరీక్షా ఫలితాలను (రెండు పాఠశాలల) పోల్చుటకు ఉపయోగించు సరైన కేంద్రస్థాన కొలత ఏది? ఎందుకు?

సా॥ అన్ని అంశాలను (విలువలను) పరిగణనలోకి తీసుకుని గణించుట వలన అంకగణిత సగటును గణించుట సరైనది. అనగా రెండు పాఠశాలల ఫలితాల సగటులను పోల్చవలెను.

2) MEK (మీలో ఎవరు కోటీశ్వరుడు) అను కార్యక్రమం అత్యంత ప్రజాదరణ పొదిన టి.వి. కార్యక్రమంగా పరిగణించారు. ఈ సందర్భంలో ఉపయోగించు కేంద్రస్థాన కొలత ఏది?

సా॥ బాహుళకము

3) 16,12,18,8,9,0,5 ల సగటును గణించండి.

సా॥ సగటు $= \dfrac{\text{అంశాల మొత్తము}}{\text{అంశాల సంఖ్య}} = \dfrac{16+12+18+8+9+0+5}{7} = \dfrac{68}{7} = 9.7$

4) 35,18,24,30,24,16,40 ల మధ్యగతం కనుక్కోండి.

సా॥ అంశాలు =35,18,24,30,24,16,40

ఆరోహణ క్రమం =16,18,24,24,30,35,40

అంశాల సంఖ్య=7

$\therefore$ మధ్యగతం $= \dfrac{7+1}{2} = \dfrac{8}{2} = 4$ వ అంశం=24

5) $\dfrac{x}{5}, x, \dfrac{x}{4}, \dfrac{x}{3}, \dfrac{x}{2}$ ల మధ్యగతం 8 అయిన విలువ ఎంత?

సా॥ దత్త అంశాల ఆరోహణ క్రమం $= \dfrac{x}{5}, \dfrac{x}{4}, \dfrac{x}{3}, \dfrac{x}{2}, x$

వీటి సగటు $\dfrac{5+1}{2} = \dfrac{6}{2} = 3$ వ అంశము $= \dfrac{x}{3}$

కానీ మధ్యగతం =8 కావున $\dfrac{x}{3} = 8 \Rightarrow x = 3\times 8 = 24$

6) 50 అంశాల సగటు 38. రెండు అశాలు 45,55లను తొలగించిన మిగిలిన అంశాల సగటు ఎంత?

సా॥ 50 అంశాల సగటు =38

$\therefore$ 50 అంశాల మొత్తం =50×38=1900

45,55లను తొలగించిన మిగిలిన అంశాల మొత్తం = 1900−45−55

$\therefore$ మిగిలిన అంశాల సగటు $= \dfrac{\text{అంశాల మొత్తము}}{\text{అంశాల సంఖ్య}} = \dfrac{1800}{48} = 37.5$

2 మార్కుల ప్రశ్నలు :

1) 9,11,13,P,18,19 ల సగటు P అయిన P విలువ ఎంత?

సా॥ 9,11,13,P,18,19 ల సగటు $= \frac{\text{అంశాల మొత్తం}}{\text{అంశాల సంఖ్య}}$

$$= \frac{9+11+13+P+18+19}{6}$$

$$= \frac{70+P}{6}$$

కానీ, సగటు = P

$$\therefore P = \frac{70+P}{6} \Rightarrow 6P = 70+P$$

$$\Rightarrow 6P - P = 70$$

$$\Rightarrow 5P = 70$$

$$\Rightarrow P = \frac{70}{5} = 14$$

2. $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\ldots\ldots\ldots, \frac{1}{n}$ అంశాల పౌనఃపున్యాలు 1,2,3,4,........,n అయిన సగటు ఎంత?

సా॥ అంశాలు $= 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\ldots\ldots\ldots, \frac{1}{n}$

పౌనఃపున్యాలు $= 1, 2, 3, \ldots\ldots\ldots\ldots, n$

$$\therefore \text{ సగటు } = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{(1\times 1) + \left(2\times\frac{1}{2}\right) + \left(3\times\frac{1}{3}\right) + \ldots\ldots\ldots + \left(n\times\frac{1}{n}\right)}{\underbrace{1+2+3+\ldots\ldots\ldots\ldots+n}_{\text{పదాలు}}}$$

$$= \frac{1+1+1+\ldots\ldots\ldots n}{1+2+3+\ldots\ldots\ldots\ldots+n}$$

$$= \frac{n}{n\left(\frac{n+1}{2}\right)} = n.\frac{2}{n(n+1)} = \frac{2}{n+1}$$

3. ఆరోహణక్రమంలో గల అంశాలు $4, 10, 15, x+5, 2x-1, 18, 23, 27$ ల మధ్యగతం 17 అయిన విలువ ఎంత?

సా॥ అంశాలు $= 4, 10, 15, x+5, 2x-1, 18, 23, 27$

అంశాల సంఖ్య =8

$\therefore$ మధ్య గతం $= \frac{8}{2}, \frac{8}{2}+1 = 4, 5$ వ అంశాల సగటు

$= x+5, 2x-1$ ల సగటు

$$= \frac{x+5+2x-1}{2}$$

$$= \frac{3x+4}{2}$$

కానీ మధ్యగతం = 17

$$\therefore \frac{3x+4}{2} \Rightarrow 3x+4=34$$

$$\Rightarrow 3x = 34-4 = 30$$

$$\Rightarrow x = \frac{30}{3} = 10$$

4. ఒక పాఠశాలలో 25,40 మరియు 35 మంది విద్యార్థులు గల A, B మరియు C అను 3సెక్షన్లు 10వ తరగతి యందు కలవు. ఒక పరీక్షలో A, B, C సెక్షన్ల విద్యార్థుల ఫలిత మార్కుల శాతం వరుసగా 70%,65% మరియు 50% అయిన మొత్తం 10వ తరగతి విద్యార్థుల అందరి సగటు మార్కుల శాతం ఎంత?

సా: A, B, C సెక్షన్లలోని విద్యార్థుల సంఖ్య = 25,40 మరియు 35.

మార్కుల శాతాలు వరుసగా = 70%, 65%, 50%

$\therefore$ మొత్తం విద్యార్థుల సగటు ఫలితాల శాతం $= \dfrac{\sum f_i x_i}{\sum f_i}$

$$= \frac{25\times70+40\times65+35\times50}{25+40+35}$$

$$= \frac{1750+2600+2500}{100}$$

$$= \frac{6100}{100}$$

$$= 61\%$$

5. వర్గీకృత దత్తాంశ మధ్యగతం మరియు బాహుళకం సూత్రాలను వ్రాసి అందు ఇమిడి ఉన్న చరరాశులను వివరించండి.

సా:: ప్రయత్నించండి.

4 మార్కుల ప్రశ్నలు :

1) కొంతమంది కళాశాల విద్యార్థుల ఒక నెల సెల్‌ఫోన్ ఖర్చు వివరాలను క్రింది పట్టికలో పొందుపరిచారు. మూడు పద్ధతుల ద్వారా సగటును కనుకోండి.

ఒక నెల సెల్‌ఫోన్ ఖర్చు రూపాయలలో	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90	90-100
విద్యార్థుల సంఖ్య	12	20	26	45	73	54	35	24	11

సాధన :

ఒక నెల సెల్‌ఫోన్ ఖర్చు (రూ॥)	విద్యార్థుల సంఖ్య f_i	తరగతి మార్కు x_i	$d_i = x_i - 55$	$u_i = \frac{x_i - 55}{10}$	$f_i x_i$	$f_i d_i$	$f_i u_i$
10-20	12	15	-40	-4	180	-480	-48
20-30	20	25	-30	-3	500	-600	-60
30-40	26	35	-20	-2	910	-520	-52
40-50	45	45	-10	-1	2025	-450	-45
50-60	73	55	0	0	4015	0	0
60-70	54	65	10	1	3510	540	54
70-80	35	75	20	2	2625	700	70
80-90	24	85	30	3	2040	720	72
90-100	11	95	40	4	1045	440	44

$\sum f_i = 300$ $\qquad\qquad \sum f_i x_i = 16850, \sum f_i d_i = 350, \quad \sum f_i u_i = 35$

ఇచ్చుట $\sum f_i = 300, a = 55, h = 10, \sum f_i x_i = 16850, \sum f_i d_i = 350, \sum f_i u_i = 35$

(i) ప్రత్యక్ష పద్ధతిలో సగటు $\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{16850}{300} = 56.2$

(ii) ఊహించిన సగటు పద్ధతిలో సగటు $\bar{x} = a + \frac{\sum f_i d_i}{\sum f_i}$

$$= 55 + \frac{350}{300}$$

$$= 55 + 1.2$$

$$= 56.2$$

(iii) సోపాన విచలన పద్ధతిలో సగటు $\bar{x} = a + \frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i} \times h$

$$= 55 + \frac{35}{300} \times 10$$

$$= 55 + 1.2$$

$$= 56.2$$

అన్ని పద్ధతులలో సగటు =56.2 రూపాయలు.

* ఈ పద్ధతిలోని ఇంకా కొన్ని లెక్కలను సాధన చేయండి.

2. ఒక ఆవాస ప్రాంతంలో పిల్లల రోజువారి చేతి ఖర్చుల వివరాలను క్రింది పట్టికలో ఇవ్వడమైనది. పిల్లల సగటు చేతి ఖర్చు రూ. 18 అయిన లోపించిన పౌనఃపున్యము f ను కనుగొనండి.

పిల్లల రోజువారి చేతి ఖర్చు	11-13	13-15	15-17	17-19	19-21	21-23	23-25
పిల్లల సంఖ్య	7	6	9	13	f	5	4

సాధన :

పిల్లల రోజువారి చేతి ఖర్చు రూ॥లలో	పిల్లల ‹ ΘY¼f_i	తరగతి మధ్య విలువ x_i	$d_i = x_i - 18$	$u_i = \frac{x_i - 18}{2}$	$f_i u_i$
11-13	7	12	-6	-3	-21
13-15	6	14	-4	-2	-12
15-17	9	16	-2	-1	-9
17-19	13	18 (a)	0	0	0
19-21	f	20	2	1	f
21-23	5	22	4	2	10
23-25	4	24	6	3	12

$\sum f_i = 44 + f$ $\quad\quad$ $\sum f_i u_i = f - 20$

ఇచ్చుట $a = 18, \sum f_i = 44 + f, \sum f_i u_i = f - 20, h = 2$

$\therefore$ సగటు $\bar{x} = a + \frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i} \times h = 18$

$$\therefore 18 + \frac{f - 20}{44 + f} \times 2 = 18$$

$$\Rightarrow \frac{f - 20}{44 + f} \times 2 = 18 - 18 = 0$$

$$\therefore (f - 20)2 = 0(44 + f) = 0$$

$$\therefore f - 20 = 0$$

$$\therefore f = 20$$

రెండవ పద్ధతి :

పిల్లల రోజువారి చేతి ఖర్చు రూ॥లలో	పిల్లల సంఖ్య f_i	తరగతి మధ్య విలువ x_i	$f_i \times x_i$
11-13	7	12	84
13-15	6	14	84
15-17	9	16	144
17-19	13	18	234
19-21	f	20	$20f$
21-23	5	22	110
23-25	4	24	96

$\sum f_i = 44 + f$ $\quad\quad$ $\sum f_i x_i = 752 + 20f$

ఇచ్చుట $\quad \sum f_i = 44 + f, \ \sum f_i x_i = 752 + 20f$

సగటు $(\bar{x}) = \dfrac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = 18$

$$\frac{752 + 20f}{44 + f} = 18$$

$$752 + 20f = 18(44 + f)$$

$$752 + 20f = 792 + 18f$$

$$20f - 18f = 792 - 752$$

$$2f = 40$$

$$f = \frac{40}{2}$$

$$f = 20$$

3. ఒక సంవత్సర కాలంలో ఒక వైద్యశాలలో చేరిన రోగుల వయస్సుల వివరాలు క్రింద ఇవ్వబడ్డాయి.

వయస్సు (సం॥లలో)	5-15	15-25	25-35	35-45	45-55	55-65
రోగుల సంఖ్య	6	11	21	23	14	5

పై దత్తాంశానికి సగటు, బాహుళకములను కనుగొనుము. అట్టి కేంద్ర స్థాన విలువలను పోల్చి వ్యాఖ్యానించుము.

సాధన :

వయస్సు సం॥లలో	రోగుల సంఖ్య	తరగతి చిహ్నం x_i	$d_i = x_i - 40$	$u_i = \frac{x_i - 40}{10}$	$f_i u_i$	
5-15	6	10	-30	-3	-18	
15-25	11	20	-20	-2	-22	-61
25-35	21 f_0	30	-10	-1	-21	
l 35-45	23 f_1	40 (a)	0	0	0	
45-55	14 f_2	50	10	1	14	24
55-65	5	60	20	2	10	

$\sum f_i = 80$ $\qquad\qquad \sum f_i u_i \quad -37$

ఇచ్చట బాహుళక తరగతి 35-45

$$l = 35,\ f_0 = 21,\ f_1 = 23,\ f_2 = 14, h = 10$$

$$\therefore \text{ బాహుళకం } = l + \frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \times h$$

$$= 35 + \frac{23 - 21}{2 \times 23 - 21 - 14} \times 10$$

$$= 35 + \frac{2}{46 - 35} \times 10 = 35 + \frac{20}{11} = 35 + 1.8 = 36.8$$

$$a = 40,\ h = 10, \sum f_i = 80, \sum f_i u_i = -37$$

$$\therefore \text{ సగటు } = a + \frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i} \times h$$

$$= 40 + \frac{-37}{80} \times 10 = 40 - \frac{37}{8} = 40 - 4.6 = 35.4$$

వ్యాఖ్యానం :

బాహుళకం 36.8 అనగా ఎక్కువ మంది రోగుల వయసు 36.8 సంవత్సరాలు సగటు 35.4 అనగా రోగుల సగటు వయసు 35.4 సంవత్సరాలు.

4. క్రింది దత్తాంశానికి మధ్య గతాన్ని కనుక్కోండి.

మార్కులు	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90	90-100
విద్యార్థుల సంఖ్య	5	3	4	3	3	4	7	9	7	8

సాధన :

మార్కులు	విద్యార్థుల సంఖ్య	సంచిత పౌనఃపున్యము
0-10	5	5
10-20	3	5+3=8
20-30	4	8+4=12
30-40	3	15
40-50	3	18
50-60	4	22
l 60-70	7 f	29 మధ్యగత తరగతి
70-80	9	38
80-90	7	45
90-100	8	53

$\frac{n}{2} = 26.5$

సంచిత పౌనఃపున్యములో

26.5 విలువ గల తరగతి 60-70

కావున 60-70ని మధ్యగత

తరగతిగా తీసుకోవాలి.

$n = 53$

$$\frac{n}{2} = \frac{53}{2} = 26.5$$

మధ్యగత తరగతి = 60-70

$l = 60,\ f = 7, cf = 22, h = 10$

$$\therefore \text{ మధ్యగతం } = l + \frac{\frac{n}{2} - cf}{f} \times h$$

$$= 60 + \frac{26.5 - 22}{7} \times 10$$

$$= 60 + \frac{4.5}{7} \times 10$$

$$= 60 + \frac{45}{7}$$

$$= 60 + 6.4$$

$$= 66.4$$

$\therefore$ మధ్యగతం=66.4 మార్కులు

$\therefore$ సగం మంది విద్యార్థులు 66.4 కంటే ఎక్కువ మార్కులు, మిగతా సగం మంది 66.4 కంటే తక్కువ మార్కులు పొందినట్లుగా భావించవచ్చు.

5. క్రింది పట్టికలోని 60 అంశాల మధ్యగతం 28.5 అయిన x మరియు y విలువలను కనుక్కోండి.

తరగతి అంతరం	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
పౌనఃపున్యం	5	x	20	15	y	5

సాధన : అంశాల సంఖ్య $n = 60$

$$\therefore \frac{n}{2} = \frac{60}{2} = 30$$

మధ్యగతం=28.5 కావున మధ్యగత తరగతి 20−30

తరగతి అంతరం	పౌనఃపున్యం	సంచిత పౌనఃపున్యం
0−10	5	5
10−20	x	$5+x\,(cf)$
l 20−30	$20\,(f)$	$25+x$ మధ్యగత తరగతి
30−40	15	$40+x$
40−50	y	$40+x+y$
50−60	5	$45+x+y$

$$h = 10, l = 20, f = 20, cf = 5 + x, n = 45 + x + y = 60$$

$$\therefore x + y = 60 - 45$$

$$\therefore x + y = 15.......(1)$$

మధ్యగతం $= l + \dfrac{\frac{n}{2} - cf}{f} \times h = 28.5$

$$\therefore 20 + \frac{30 - (5 + x)}{20} \times 10 = 28.5$$

$$\frac{30 - 5 - x}{2} = 28.5 - 20 = 8.5$$

$$\therefore 25 - x = 8.5 \times 2 = 17$$

$$-x = 17 - 25 = -8$$

$$\therefore x = 8$$

$x = 8$ ని సమీకరణం (1)లో ప్రతిక్షేపించగా,

$$8 + y = 15 \Rightarrow y = 15 - 8 = 7$$

$$\therefore x = 8,\ y = 7$$

6. 100 మంది జీవిత బీమా సంస్థ పాలసీదారుల వయసు వివరాలు క్రింద ఇవ్వబడినవి. మధ్యగతాన్ని కనుక్కోండి.

వయసు సంవత్సరాలలో	20 కంటే తక్కువ	25 కంటే తక్కువ	30 కంటే తక్కువ	35 కంటే తక్కువ	40 కంటే తక్కువ	45 కంటే తక్కువ	50 కంటే తక్కువ	55 కంటే తక్కువ	60 కంటే తక్కువ
పాలసీదారుల సంఖ్య	2	6	24	45	78	89	92	98	100

సాధన :

వయస్సు సంవత్సరాలలో	పాలసీదారుల సంఖ్య	తరగతి అంతరం	పౌనఃపున్యం	సంచిత పౌనఃపున్యం
20 కంటే తక్కువ	2	20 కంటే తక్కువ	2	2
25 కంటే తక్కువ	6	20–25	4	6
30 కంటే తక్కువ	24	25–30	18	24
35 కంటే తక్కువ	45	30–35	21	45 (cf)
40 కంటే తక్కువ	78	l 35–40	33 (f)	78 మధ్యగత తరగతి
45 కంటే తక్కువ	89	40–45	11	89
50 కంటే తక్కువ	92	45–50	3	92
55 కంటే తక్కువ	98	50–55	6	98
60 కంటే తక్కువ	100	55–60	2	100

$$\frac{n}{2}=\frac{100}{2}=50$$

$\therefore$ మధ్యగత తరగతి = 35–40

$\therefore l=35,\ f=33, cf=45, h=5$

మధ్యగతం $=l+\dfrac{\frac{n}{2}-cf}{f}\times h$

$$=35+\frac{50-45}{33}\times 5$$

$$=35+\frac{5\times 5}{33}=35+0.76=35.76$$

వ్యాఖ్యానం :100 మందిలో 50 మంది వయసు 35.76 సంవత్సరాల కంటే తక్కువగాను, మిగిలిన 50 మంది వయసు 35.76 సంవత్సరాల కంటే ఎక్కువగాను ఉన్నట్లుగా భావించవలెను.

* ఈ అధ్యాయం 4 గ్రాఫులు మాత్రమే కలవు. కావున అన్ని గ్రాఫులను తప్పని సరిగా సాధన చేయండి.

బిట్స్ :

1. $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ అంశాల సగటు $\bar{x}$. అయిన $2x_1+7, 2x_2+7, 2x_3+7, ..., 2x_n+7$ అంశాల సగటు $\underline{2\bar{x}+7}$

2. మొదటి n సహజ సంఖ్యల వ్యాప్తి $\underline{=n-1}$

3. మొదట n సహజ సంఖ్యల సగటు $\underline{\frac{n+1}{2}}$

4. మొదటి 7 ప్రధాన సంఖ్యల మధ్యగతం $\underline{7}$

5. $4, 5, 10, 3, 5, 4, 9, 3, x, 3, 4, 5$ అంశాల బాహుళకం 5 అయిన $x = \underline{5}$

6. తరగతి మార్కును సగటు కనుగొనుటలో ఉపయోగిస్తారు.

7. అంత్య విలువల వల్ల ప్రభావితమయ్యే కేంద్రస్థాన కొలత అంకగణిత సగటు

8. వ్యక్తిగత అంశాలకు ప్రాముఖ్యత లేనపుడు ఉపయోగించు కేంద్రస్థాన కొలత మధ్యగతం

9. రెండు ఓజీవ్ వక్రాల ఖండన బిందువు × నిరూపకం మధ్యగతము ను ఇస్తుంది.

10. మొదటి 10 సహజ సంఖ్యల బాహుళకం వ్యవస్థితం కాదు.

10. $a-2, a, a+2$ ల అంకగణిత సగటు $\underline{a}$