GRK

డిప్లొమా ఇన్ ఎలిమెంటరీ ఎడ్యుకేషన్

(D.El.Ed.)

ద్వితీయ సంవత్సరం

పేపరు – 6(సి)

గణిత విద్య
అధ్యాపన శాస్త్రము

పాఠ్యపుస్తక అభివృద్ధి మండలి

కె. సంధ్యారాణి, ఐ.పి.ఓ.ఎస్
కమీషనర్
పాఠశాల విద్యాశాఖ, ఆంధ్రప్రదేశ్, అమరావతి

శ్రీమతి ఎమ్.వి. రాజ్యలక్ష్మి
సంచాలకులు, రాష్ట్ర విద్యాపరిశోధన శిక్షణాసంస్థ,
ఆంధ్రప్రదేశ్, అమరావతి

డా ॥ ఎస్.కె. జిలానీభాష
ప్రొఫసర్, టీచర్ ఎద్యుకేషన్ విభాగం
రాష్ట్ర విద్యాపరిశోధన శిక్షణాసంస్థ, ఆంధ్రప్రదేశ్, అమరావతి.

డా ॥ కె. పాండురంగ స్వామి
ప్రొఫెసర్, టీచర్ ఎద్యుకేషన్ విభాగం
రాష్ట్ర విద్యాపరిశోధన శిక్షణాసంస్థ, ఆంధ్రప్రదేశ్, అమరావతి

సహకారం - సమన్వయం

డా ॥ ఎస్.డి.వి.రమణ
కో-ఆర్డినేటర్ కర్రికులం & పాఠ్యపుస్తక విభాగం
రాష్ట్ర విద్యాపరిశోధన శిక్షణాసంస్థ,
ఆంధ్రప్రదేశ్, అమరావతి

డా॥ నల్ల తిరుపతి నాయుడు
లెక్చరర్,
జిల్లా విద్యాశిక్షణ సంస్థ,
వమరవల్లి, శ్రీకాకుళం జిల్లా.

ఆంధ్రప్రదేశ్ ప్రభుత్వ ప్రచురణ, అమరావతి

చట్టాలను గౌరవించండి
హక్కులను పొందండి

విద్యవల్ల ఎదగాలి
వినయంతో మెలగాలి

రచయితలు

డా॥ నల్ల తిరుపతి నాయుడు M.Sc., M.A., M.Ed., M.Phil, Ph.D., PGD (Yoga)
లెక్చరర్, జిల్లా విద్యాశిక్షణ సంస్థ, వమరవల్లి, శ్రీకాకుళం జిల్లా.

శ్రీ కొమ్ముల వేంకట సూర్యనారాయణ M.Sc., M.Ed.,
లెక్చరర్, జిల్లా విద్యా శిక్షణ సంస్థ, బొమ్మూరు, తూర్పుగోదావరి జిల్లా.

డా॥ ఆర్. బాలాజీరావు M.Sc., M.Ed., Ph.D.
లెక్చరర్, జిల్లా విద్యా శిక్షణ సంస్థ, పల్లిపాడు, నెల్లూరు జిల్లా.

డా॥ ఎన్. అయ్యూబ్ హుస్సేన్ M.Sc., M.Ed., M.Phil, Ph.D., M.C.A.
లెక్చరర్, జిల్లా విద్యా శిక్షణ సంస్థ, బి.తాండ్రపాడు, కర్నూలు జిల్లా

డా॥ కె. రామకృష్ణ M.A., M.Sc., M.Ed., M.Phil, Ph.D
లెక్చరర్, ఎస్.ఆర్.ఎస్.వి.కాలేజ్ ఆఫ్ ఎడ్యుకేషన్, విజయవాడ, కృష్ణాజిల్లా.

శ్రీమతి ఎ.ఎస్.కె. దుర్గ, M.Sc., M.Ed.,
లెక్చరర్, ఎస్.ఆర్.ఎస్.వి.కాలేజ్ ఆఫ్ ఎడ్యుకేషన్, విజయవాడ, కృష్ణాజిల్లా.

సంపాదకులు

ఆచార్య దువ్వూరి సూర్యనారాయణశాస్త్రి, M.Sc.,M.Ed,Ph.D
రిటైర్డ్ ప్రిన్సిపాల్, ఎ.జె. కాలేజ్ ఆఫ్ ఎడ్యుకేషన్, మచిలీపట్నం, కృష్ణాజిల్లా.

డా॥ ప్రఖ్య సత్యనారాయణ శర్మ M.Sc.,M.Ed,Mphil,Ph.D
లెక్చరర్, మాంటిస్సోరి మహిళా కాలేజ్ ఆఫ్ ఎడ్యుకేషన్, విజయవాడ, కృష్ణాజిల్లా.

ముందుమాట

నాగరిక సమాజాన్ని సృష్టించాలంటే విద్యావంతులైన పౌరులు అవసరం. శిశువును ప్రయోజకుడైన పౌరునిగా తీర్చిదిద్దాలంటే ఒక గురుప్రదమైన మార్గనిర్దేశకుడు అవసరం. అతడు జ్ఞాన సంపన్నుడైయుండడమే కాకుండా ఆదర్శప్రాయునిగానూ, బహుముఖ ప్రజ్ఞాశీలిగానూ, సృజనశీలిగానూ, తాత్వికునిగానూ భవిష్యత్ దార్శనికునిగానూ ఉండాలి. కాలం ప్రాచీనమైనా, నవీనమైనా భారతీయ సమాజం ఎప్పుడూ ఉపాధ్యాయుడిని ఘనమైన వ్యక్తిగా గౌరవిస్తూ తమ సంతతి సంక్షేమంకోసం అతడి నుండి ఎంతో ఆశిస్తుంది. సమాజంలో అతడూ ఒక సభ్యుడే అయినప్పటికి అతడి మాటలు చేతలు అన్నీ ఆదర్శనీయంగా ఉండాలని భావిస్తుంది. ఇలాంటి మహోన్నతమైన అధ్యాపనాన్ని వృత్తిగా స్వీకరించాలని నిర్ణయించుకున్న వ్యక్తిని ఉత్తముడైన ఉపాధ్యాయునిగా రూపుదిద్దడానికి సర్వోన్నతమైన విద్యాక్షేత్రం కావాలి.

ఒక సగటు వ్యక్తిని ఉపాధ్యాయునిగా తీర్చిదిద్దాలంటే అకుంఠిత దీక్షాతత్పరత కలిగిన మహోపాధ్యాయులు కావాలి. అందుకే పాఠశాల విద్యలో ఉపాధ్యాయవిద్య అత్యంత ప్రాధాన్యతాంశంగా గుర్తింపుపొందింది. ఉపాధ్యాయుని ద్వారా సామాజికాభ్యున్నతిని ఆశిస్తున్నప్పుడు ఉపాధ్యాయుడిని రూపొందించే సందర్భంలో అత్యంత జాగరూకత ఆవశ్యకం. ఉపాధ్యాయ విద్యార్థికి కేవలం విషయజ్ఞానం అందించడం, బోధనా పరిజ్ఞానం పెంపొందించడం మాత్రమే సరిపోదు. విద్యార్థుల ద్వారా భవిష్యత్తును వీక్షించగల శక్తియుక్తులను నేర్పాలి. సజీవమూ నిత్యచైతన్యశీలమూ అయిన విద్యార్థులలో జ్ఞానకాంక్షను పెంపొందింపజేసే మెళకువలను అభ్యసింపజేసే నైపుణ్యాలను అవగతం చేయించాలి. మానవీయత గుబాళించే ఆత్మీయతా ప్రవర్తనను అనువర్తింపజేయాలి. భారతీయ విద్యాతత్వాన్ని, విద్యయొక్క పరమావధిని అర్థం చేసుకుని వ్యవహరించడాన్ని ఆకళింపు చేయించాలి.

ప్రాథమిక పాఠశాల స్థాయి ఉపాధ్యాయునిగా రూపొందడమంటే బహుముఖ ప్రజ్ఞాపాటవాలను పుణికిపుచ్చుకోవడం అన్నమాట. అంటే ఉపాధ్యాయుడు చక్కని కథకుడుగా, గాయకుడుగా, నటుడుగా, చిత్రకారుడుగా, క్రీడాకారుడుగా, వైద్యునిగా, ఆధునిక సాంకేతిక నిపుణుడుగా వ్యవహరించగలగాలి. ఇలా బహుళ అంశాలలో ప్రవేశము, ప్రావీణ్యము కలిగి ఉండాలి. వీటిని సాధింపజేయాలి అంటే ఉపాధ్యాయుడు విద్య ఆయా అంశాలన్నింటినీ మమేకం చేసుకున్నదై ఉండాలి. ఉపాధ్యాయులపై రూపొందిన జాతీయ విద్యాప్రణాళిక చట్రం – 2009 ఉపాధ్యాయుడు విద్యార్థుల సాంఘిక, సాంస్కృతిక నేపథ్యాలను సంపూర్ణంగా అవగాహనచేసుకొని వారి వికాసానికి కృషిచేయాలని ఇందుకోసం సమాచార సాంకేతిక పరిజ్ఞానం, స్థానిక కళలు సంస్కృతులను బోధనా ప్రణాళికతో మమేకం చేసుకోవాలి. ఆ సందర్భంలో ఉపాధ్యాయుడు మననశీల అభ్యాసకుడు (Reflective Practitioner) గా ఉండాలని సూచించింది. కాబట్టి ఉపాధ్యాయ విద్యలో బాలలను వారి బాల్యాన్ని అర్థంచేసుకోవడం, నేర్చుకోవడం ఎలాగో నేర్పే పద్ధతులలో ప్రావీణ్యం పొందడం అత్యంత ఆవశ్యకం. సమకాలీన అంశాలను మేళవించుకుంటూ తన బోధనను సుసంపన్నం చేసుకోవడం. ఎంతో కీలకం. కాబట్టి ఉపాధ్యాయ శిక్షణ దశలోనే ఆయా అంశాలలో ఉపాధ్యాయ / విద్యార్థులకు సంపూర్ణ శిక్షణనివ్వాలి. వ్యవస్థకు యోగ్యమైన ఉపాధ్యాయుని అందించడంలో శిక్షణ సంస్థలే పూర్తిబాధ్యత వహించాలి. ఏ చిన్నపాటి అలసత్వం జరిగినా అది పటిష్టమైన శిక్షణ ద్వారానే పరమోన్నతమైన ఉపాధ్యాయులను రూపొందించగలం. నూతనంగా రూపొందించిన ఈ పాఠ్యపుస్తకాలు జ్ఞాననిర్మాణాత్మక అభ్యసన సిద్ధాంతాలు, పరస్పరాశ్రిత విద్యాతత్వం, సమ్మిళితబోధనా విధానాలు మొదలయిన నవీన భావనలతో నిర్మితమైనాయి. వీటన్నింటిని అర్థంచేసుకొని తమ ఆదర్శవంతమైన బోధనల ద్వారా అత్యంత ప్రజ్ఞాపాటవాలు కలిగిన ఉపాధ్యాయులను తీర్చిదిద్దడంలో అధ్యాపకులందరూ విశేషంగా కృషిచేస్తారనీ, ఉపాధ్యాయ విద్యార్థులు కూడా బోధనా సిద్ధాంతాలను విద్యయొక్క పరమావధిని అర్థంచేసుకొని విద్యా లక్ష్యాలను సాధించేందుకు తమ జీవిత అనుభవాలను అన్వయించుకుంటూ ఆదర్శ ఉపాధ్యాయులుగా రూపొందుతారని ఆశిస్తూ...

సంచాలకులు
రాష్ట్ర విద్యా పరిశోధన శిక్షణ సంస్థ
అమరావతి, ఆంధ్రప్రదేశ్

అధ్యాపకులకు సూచనలు....

ఉపాధ్యాయ విద్య పై రూపొందిన జాతీయ విద్య చట్రం – 2009 ఉపాధ్యాయ విద్య ప్రాధాన్యతను వివరిస్తూ పిల్లలకు నాణ్యమైన విద్యను అందించాలంటే ఉపాధ్యాయులను రూపొందిస్తున్న దశలోనే అత్యంత జాగరూకతతో వ్యవహరించాలని సూచించింది. బాధ్యతాయుతమైన ఉపాధ్యాయులు ద్వారానే బాలల బాల్యానికి భరోసా ఇవ్వగలమని అలాంటి వారిని తయారుచేయడంలో ఉపాధ్యాయ శిక్షణ సంస్థలు నూతన దృక్పథంతో పనిచేయాలని తెలిపింది. అందులోని మౌలిక సూత్రాలను ఆధారంగా చేసుకుని ఈ పాఠ్యపుస్తకాలు రూపొందాయి. వీటిని అర్థవంతంగా ఉపయోగించడంలో అధ్యాపకులు కొన్ని మెళకువలు అనుసరించాలి.

- ఉపాధ్యాయ విద్య – జాతీయ విద్యా చట్రం – 2009 ని క్షుణ్ణంగా చదవాలి.
- ఆయా అంశాలకు చెంది విద్యాప్రణాళికలో పేర్కొన్న కీలక భావనలను వాటి తాత్వికతను అర్థంచేసుకోవాలి. (ఇందుకోసం సిలబస్‌లో పేర్కొన్న ముందుమాటలను పరిశీలించండి).
- జాతీయ విద్యా ప్రణాళిక చట్రం–2005లోని మౌలిక అంశాలయిన – జ్ఞాన నిర్మాణ విద్యా తత్వం – నిర్మాణాత్మక అభ్యసన సన్నివేశాల కల్పన మొదలైన భావనలను అర్థంచేసుకుని వాటిని ఉపాధ్యాయ విద్యకు మిళితంచేసి బోధన జరపాలి.
- ఆంధ్రప్రదేశ్ విద్యాప్రణాళికా పత్రం – 2010లో పేర్కొన్న 'పరస్పరాశ్రిత విద్యావిధానం' భావనను అధ్యాపకులు తమ తరగతిగది బోధనకు అన్వయించాలి.
- విద్యాహక్కుచట్టం – 2005 సూచించిన మార్గదర్శకాలను ఉపాధ్యాయవిద్యకు గల సంబంధాన్ని గుర్తించి బోధన జరపాలి.
- పాఠశాలలోని భావనల బోధనతోపాటుగా ఆయా సందర్భాలలో సూచించిన రచనలను తప్పనిసరిగా ఉపాధ్యాయుడు విద్యార్థులతో చదివించి చర్చించాలి.
- బోధనాంశాలకు అవసరమైన అనుబంధ అంశాలను చదివించి ఆయా విద్యావేత్తల దార్శనికతలు పేర్కొన్న విద్య తాత్వికతను పరమావధిని ఉపాధ్యాయ విద్యార్థులు గుర్తించేలా కృషిచేయాలి.
- పాఠశాల విద్య ద్వారా అమలవుతున్న విద్యాప్రణాళిక, పాఠ్యపుస్తకాలు క్షుణ్ణంగా పరిశీలించి బోధనా శాస్త్రానికి పాఠ్యపుస్తకంకు గల సంబంధాన్ని ఆవిష్కరింపజేయాలో ఉపాధ్యాయుడు విద్యార్థులకు మార్గదర్శకత్వం వహించాలి.
- ఉపాధ్యాయ విద్యలోని ప్రతి బోధనాంశానికి తనదైన 'ఆత్మ' వుంటుంది. అధ్యాపకులు మూలసూత్రాలను పరిశీలించి విశ్లేషించుకోగలిగినపుడే దానిని గుర్తించగలరు. కాబట్టి అయా అంశాలకు చెందిన ఇతర రచనలు తప్పనిసరిగా చదవాలి. వాటిని ఉటంకిస్తూ ఉపాధ్యాయ విద్యార్థులను 'నిత్య అభ్యాసకులుగా' మారేందుకు శిక్షణనివ్వాలి.
- ప్రాథమిక పాఠశాల స్థాయి విద్యార్థుల స్వభావం, కుటుంబ నేపథ్యం, సామాజిక సందర్భం మొదలైనవన్నీ పరిగణనలోకి తీసుకొంటూ పాఠశాలను విశ్లేషించాలి.

విషయసూచిక

1.ప్రాథమికోన్నత స్థాయి గణితం 1-38

2.పాఠశాల గణిత విషయాలు మరియు ప్రక్రియలు 39-278

3. 6 నుంచి 8 తరగతులకు గణిత బోధన 279-309

4. పాఠశాల గణితం : కృత్యాలు, వనరులు, ప్రణాళిక 310-396

5. గణిత మదింపు మరియు మూల్యాంకనం 397-443

1.ప్రాథమికోన్నత స్థాయి గణితం – పరిచయం

యథాశిఖామయూరాణాం నాగానం మణయో యాథా ।
తద్వ ద్వేదాంగ శాస్త్రాణాం గణితం మూర్ధనిస్థితమ్ ॥
నెమళ్ళకు శిఖవలె, పాములకు మణులవలె, అన్ని శాస్త్రాలకు గణితం అగ్రభాగంలో ఉంటుంది.
– వేదాంగ జ్యోతిష్యం

విషయక్రమం :

1.0 : లక్ష్యాలు
1.1 : పరిచయం
1.2 : గణితశాస్త్ర స్వభావం, పిల్లవాని స్వభావం, గణితశాస్త్ర ఉద్దేశం – నిజనిర్ధారణ.
1.3 : ప్రాథమిక స్థాయి నుండి ప్రాథమికోన్నత స్థాయికి గణితపరమైన పరివర్తన
1.4 : ఎలిమెంటరీ స్థాయిలో గణితపరమైన ఆలోచనను అభివృద్ధి చేయుట – గణిత ఆలోచనలు
1.5 : గణిత వివేచన – ప్రక్రియ
1.6 : ధృవీకరణ ప్రక్రియలు
1.7 : నిర్మాణాత్మక వాదము, గణిత అభ్యసన
1.8 : గణితశాస్త్ర చరిత్ర అధ్యయనము (ఆర్యభట్ట, భాస్కరాచార్య, బ్రహ్మగుప్త, యూక్లిడ్, ఫెర్మా)

1.0 లక్ష్యాలు :

ఈ అధ్యాయం చదివిన తరువాత ఉపాధ్యాయ విద్యార్థి కింది లక్ష్యాలను సాధించగలడు.
గణితశాస్త్ర స్వభావాన్ని, ఉద్దేశాన్ని, అభ్యాసకుని స్వభావాన్ని తెలుసుకుంటాడు.

- గణితశాస్త్ర నియమాలు, సిద్ధాంత నిరూపణల నిజనిర్ధారణపై అవగాహన పెంచుకుంటాడు.
- ప్రాథమిక స్థాయి నుండి ప్రాథమికోన్నత స్థాయికి గణిత అంశాలు పరివర్తన చెందే విధానాన్ని తెలుసుకుంటాడు.
- ఎలిమెంటరీ స్థాయి విద్యార్థుల్లో గణితపరమైన ఆలోచనలు ఏవిధంగా అభివృద్ధి చేయవచ్చో తెలుసుకుంటాడు.
- గణిత వివేచనా ప్రక్రియను తెలుసుకుంటాడు.
- గణితానికి సంబంధించిన ధృవీకరణ ప్రక్రియలను తెలుసుకుంటాడు.
- నిర్మాణాత్మకవాదం ద్వారా గణితఅభ్యసనను విద్యార్థుల్లో అభివృద్ధి చేసే సామర్థ్యాన్ని పెంపొందించుకుంటాడు.
- గణితశాస్త్ర చరిత్ర పట్ల అవగాహన, చరిత్ర అధ్యయనం వల్ల ఆసక్తి పెంచుకుంటాడు.
- గణితశాస్త్రజ్ఞుల కృషిని ప్రశంసిస్తాడు.

1.1 పరిచయం :

గణితం మానవ నాగరికతకు అద్దం పడుతుంది. సంచార జీవిగా ఉన్న ఆదిమానవుడు క్రమంగా జంతువులను మచ్చిక చేసుకుని స్థిరనివాసం ఏర్పాటు చేసుకున్నాడు. ఈ క్రమంలో అతనికి జంతువులను

లెక్కించాల్సిన అవసరం ఏర్పడింది. చిన్న చిన్న రాళ్ళతో జంతువులకు సంకేతాలను ఏర్పాటు చేసుకొని, తనవద్ద ఉన్న జంతువుల సంఖ్యను లెక్కించడం ప్రారంభించాడు. ఇలా క్రమక్రమంగా మానవుడితో పాటు అతని గణితశాస్త్ర విజ్ఞానం కూడా పెరుగుతూ వచ్చింది. మరొకరకంగా చెప్పాలి అంటే మానవ నాగరికత అభివృద్ధికి గణితం పునాదిగా నిలిచింది.

గణితశాస్త్ర స్వభావాన్ని ప్రాథమిక స్థాయి నుంచి అవగాహన చేసుకుని అభ్యసన చేస్తే, విద్యార్థులు మరింత ఉన్నతంగా గణితశాస్త్ర అధ్యయనం చేయగలుగుతారు. ఇందుకు పునాది పాఠశాల విద్య. కాబట్టి ఉపాధ్యాయుడు తాను బోధించే గణిత అంశాల్లో, నైపుణ్యం కలిగి ఉండాలి. అప్పుడే అతని బోధన, ఆశించిన లక్ష్యాలను సాధిస్తుంది. NCF-2005 కూడా గణిత వ్యక్తీకరణ స్పష్టత, సంక్షిప్తత, సందిగ్ధంలేని భాష, కచ్చితమైన సూత్రీకరణ వంటి లక్ష్యాలు కలిగి ఉండాలని చెబుతోంది. ఈ లక్ష్యాలను చేరుకోవాలి అంటే ఉపాధ్యాయునికి గణితశాస్త్ర స్వభావం పట్ల అవగాహన తప్పనిసరి. ఉపాధ్యాయుడు చెప్పబోయే విషయాల స్వభావం అతడు పాఠం చెప్పేతీరును ప్రభావితం చేస్తుంది. అందుకే గణితబోధన అధ్యయనాలకు ముందే గణితశాస్త్ర స్వభావం, ప్రాముఖ్యం తెలుసుకోవాలి.

ఈవిధంగా మనిషి జీవితంలోని ప్రతి అడుగుతో గణితశాస్త్రం విడదీయరాని అనుబంధాన్ని పెనవేసుకుంది.

1.1.1. గణితం – శబ్దపర లక్షణ అర్థం :

Mathematices అనే పదం గ్రీకు భాషలోని Manthanein మరియు Techne అనే పదాల కలయిక ద్వారా ఏర్పడింది. Manthanein అంటే సూక్ష్మపద్ధతి, Techne అంటే ఒక కళ అని అర్థం. ఈ రెండు అర్థాల ఆధారంగా గణితశాస్త్రాన్ని సూక్ష్మపద్ధతులు నేర్చుకునే కళగా చెప్పవచ్చు.

– లాటిన్ భాషలోని arsmathematica అనే పదం కూడా ఇంగ్లీషు భాషలోని Mathematics పదానికి మూలరూపంగా చెబుతారు. ఈ లాటిన్ పదానికి కూడా ఒక కళ అని అర్థం.

'గణ్' అనే సంస్కృత పదం నుండి గణితం అనే తెలుగు పదం ఏర్పడింది. గణ్ అంటే లెక్కించడం అని అర్థం. ఈ పదమే గణితశాస్త్రంగా మారింది.

1.1.2. గణితశాస్త్ర నిర్వచనాలు :

గణితశాస్త్రానికి ఉన్న విస్తృతమైన పరిధిని పరిగణలోకి తీసుకుని పలువురు గణితశాస్త్రవేత్తలు గణితశాస్త్రాన్ని నిర్వచించారు. ఈ నిర్వచనాలన్నింటిని పరిశీలిచటం ద్వారా గణితశాస్త్రం యొక్క పరిధి అవగాహన చేసుకోవచ్చు. ఆ నిర్వచనాల్లో కొన్నింటిని ఈ దిగువ పరిశీలిద్దాం.

1. గణితం ఒక కచ్చితమైన వ్యవస్థలో నిర్వచించబడు శాస్త్రము.
2. స్వతంత్రమైన అభిప్రాయాలను, నిర్ణయాలను వ్యక్తపరుచుటలో ఉపయోగపడే శాస్త్రము.
3. అంతరాళ వ్యవస్థలో జరిగే సంఘటనా దృశ్యాల మధ్యగల సంబంధాన్ని వివరించి, గుణాత్మకమైన సత్యాలను తెలిపే శాస్త్రం.
4. నిగమన పద్ధతి ద్వారా అమూర్తభావన రూపంలో, వివిధ గణితశాఖలలో సిద్ధాంతాలను, సూత్రాలను రూపొందించే శాస్త్రము.

– "అంతరాళము, సంఖ్యకు సంబంధించిన శాస్త్రము గణితశాస్త్రము" – గణిత నిఘంటువు

– పరస్పర సంగతాలైన స్వీకృతాల నుంచి తప్పనిసరిగా ఉత్పన్నమయ్యే ఫలితాల సమగ్ర చర్చ.

– బెర్ట్రాండ్ రస్సెల్

– ఆత్మ యొక్క ఉత్తమోత్తమమైన అభ్యాసం ప్రపంచ వృత్తులన్నింటిలోనూ ఇది చక్కనిది.

– పాస్కల్

– సంఖ్య, రాశుల, మాపనాల విజ్ఞానమే గణితం. – బెల్

ఇలా ఎన్ని వివరణలు, అభిప్రాయాలు సులభంగా అర్థమయ్యేటట్లు క్లుప్తంగా నిర్వచించటం సాధ్యంకాదు. కాబట్టి గణితమంటే ఏమిటో ఇలా వివరించారు. ఏ ఒక్కటి నిర్వచనం కాకపోయినా, ప్రతీ ఒకటి ఎంతో కొంత గణిత శాస్త్రీయ అర్థం, స్వరూప, స్వభావాలను తెలుసుకునేందుకు సహకరిస్తుంది.

ఇవి చేయండి :

1. గణితశాస్త్రాయినికి పలువురు శాస్త్రవేత్తలు ఇచ్చిన నిర్వచనాలను, వారి చిత్రాలతో సహా సేకరించి, చిత్తుపుస్తకం (Scrap Book) తయారు చేయండి.
2. గణితశాస్త్రం యొక్క శబ్ధపర లక్షణ అర్ధాలతో వృక్ష చిత్రం గీయండి.

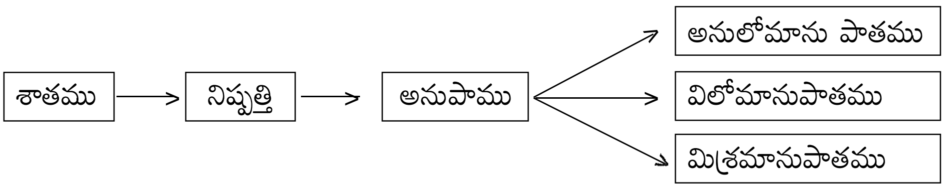
1.2. **గణితశాస్త్ర స్వభావం** :

గణిత స్వభావతను పరిశీలన చేయుటలో, వాని లక్షణాలను అర్థం చేసుకోవాలి. వస్తువుల మధ్యగల సంబంధాన్ని గణితం తెలియజేస్తుంది. ప్రమాణబద్ధమైన ఆలోచనలను వ్యక్తంచేసే స్వభావం గలది. అమూర్త భావనలను రూపకల్పన చేయును. స్వచ్ఛత స్వభావాన్ని తెలియజేస్తుంది. మానసిక లక్షణాలకు శిక్షణనిచ్చి, బుద్ధిని వృద్ధి చేసే స్వభావం గలది. వివేచనా పరమైన తార్కిక జ్ఞానానికి, శిక్షణ యిచ్చే శాస్త్రం. గణితవిద్య యొక్క వివేచనా లక్షణాలను దాని స్వభావాన్ని ఈవిధంగా పేర్కొనవచ్చు.

i) గణితం వరుస, క్రమంపై ఆధారపడిన అంశం :–

గణితానికి సంబంధించిన అంశాలు ఒకదానిపై మరొకటి ఆధారపడి ఉంటాయి.

ఉదా : 1



ii) **అమూర్తలక్షణం** :

గణితం అనేక అమూర్త భావనలను కలిగించిన శాస్త్రం. గణితం అమూర్త భావనలను రూపొందించడంలో విద్యార్థికి కావలసిన పరిజ్ఞానాన్ని కల్పిస్తుంది.

ఉదా :

"సంఖ్య" అనేది ఒక అమూర్త భావన.

"రెండు" ఆకులు

"రెండు" పండ్లు

రెండు అనేది అమూర్త భావన.

iii) **గణితం తార్కికమైంది** :

తర్కమే గణితానికి పునాది. గణితశాస్త్ర భావనలన్నీ పూర్తిగా తార్కిక నిర్మాణం వల్లనే ఏర్పడ్డాయని రస్సెల్, వైట్‌హెడ్ భావించారు.

ఉదా :

$$2+6=8 \Rightarrow 8-2=6$$
$$8-6=2$$ అనవచ్చు

GRK

iv) **అంతర్బుద్ధితో ఏర్పడింది** :

ప్రతి గణిత ప్రవచనం మానవుని అంతర్బుద్ధి వల్లనే ఏర్పడిందని భావిస్తారు.

ఉదా :

రెండు బిందువుల గూండా ఒకే ఒక రేఖాఖండాన్ని గీయవచ్చు.

v) **గణితశాస్త్ర సంకేతాలు** :–

గణితం సంకేతాలు కలిగిన భాష. గణితశాస్త్ర సూత్రాలన్నీ సాధారణంగా సంకేతాలతోనే తెలుపబడతాయి.

ఉదా :

$$I=\frac{PTR}{100}$$

I = వడ్డీ, P = అసలు

T = సమయం R = వడ్డీ రేటు

vi) **నమూనాల అధ్యయనశాస్త్రం** :

గణితశాస్త్రం ఏ ప్రాపంచిక విషయాన్నికైనా నమూనాలను సూచిస్తుంది. భౌతికశాస్త్రం నమూనాలు, వస్తురూప నమూనాలతో గణితం సూచించగలగడం వల్లనే వాటి విశ్లేషించి పరిశోధించడం జరుగుతుంది. ఈనాడు మనం ఉపయోగిస్తున్న "ఆల్గారిథమ్" సాధారణ నమూనా అవుతుంది.

vii) **ఆధార పరికరం** :

గణితశాస్త్రం దాదాపు అన్నిరకాల శాస్త్ర అధ్యయనానికి ఓ ఆధారం లేక పరికరంగా తోడ్పడుతుది. ఒక అధ్యయానికి సంబంధించి విశేష విశ్లేషణకు, ఫలితాలను రాబట్టడానికి గణితం ఎక్కువగా సహాయపడుతుంది.

viii) **కచ్చితత్వం** :

గణితం హేతువాతన పద్ధతి ద్వారా, కచ్చితమైన ఫలితాలను సాధించటానికి వీలైన శాస్త్రం. గణితంలో సందిగ్ధతకు తావులేదు. గణితంలోని ఫలితాలను 'సరైనవి, సరికానివి' అని మాత్రమే వర్గీకరించవచ్చు. పరిస్థితులకు అనుగుణంగా ఫలితాలు మారే అవకాశం లేదు. సమస్యలకు గణిత పద్ధతుల్లో పరిష్కరించడం ద్వారా బేధాభిప్రాయాలకు తావుండదు.

ఉదా : $(a^2+b^2)=a^2+2ab+b^2$ అనే సర్వసమీకరణాన్ని ఎవరు నిరూపించినా ఒకేవిధంగా ఉంటుంది.

ix) **సరిచూసే పద్ధతి** :

సమస్యలను గణిత పద్ధతుల్లో సాధించిన తర్వాత ఫలితాలను సరిచూసుకునే అవకాశం ఉంది.

ఉదా :

$$(x+2)(x+3) = x^2+2x+2x+6$$
$$= x^2+5x+6$$
$$x^2+5x+6 = x^2+3x+2+6$$

$$x(x+3)+2(x+3)$$
$$(x+3)(x+2)$$

x) ఆగమన – నిగమన హేతువాదం :

ఒక విషయాన్ని అనేకసార్లు పరిశీలించినపుడు ఒకేఫలితాన్ని పొందినట్లయితే మిగిలిన అన్ని సందర్భాల్లో కూడా అదే ఫలితానిస్తుందని నమ్మకం కలుగుతుంది. అటువంటి విషయ నిర్ధారణను ఆగమన హేతువాదం అంటారు.

ఉదా :

1+ 3 = 4 7+9 = 16

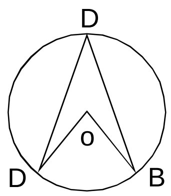
5 + 3 = 8

"రెండు బేసి సంఖ్యల మొత్తం సరిసంఖ్య" అని పై ఉదాహరణలద్వారా చెప్పవచ్చు. నిగమన హేతువాదం కొన్ని స్వానుభవ విషయాలు, అనిర్వచిత పదాలు, స్వీకృతాలు, నిరూపించబడిన సత్యాలపై ఆధారపడుతుంది.

ఉదా :

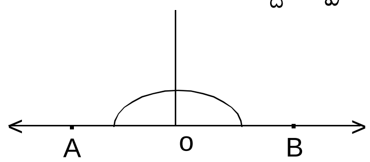
అర్ధవృత్త ఖండంలోని కోణం సమకోణం అని నిరూపించడానికి మనం ఈ క్రింది సత్యాలపై ఆధారంతో నిరూపిస్తాం.

i) ఒక వృత్తంలోని ఒక చాపంతో కేంద్రం వద్ద ఏర్పడే కోణం అదే చాపంతో మిగిలిన పరిధిపై ఏర్పడే కోణానికి రెట్టింపు.



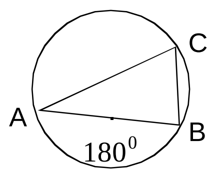
$\angle AOB = 2\angle ADB$

ii) ఒక సరళరేఖ మీద ఒక బిందువు వద్ద ఏర్పడే కోణల మొత్తం



$\angle ACB = 180^0$

పై సత్యాల ఆధారంతో కింది విదంగా నిరూపిస్తాం.



$\overline{AxB}$ లో కేంద్రం వద్ద ఏర్పడే కోణం = 180^0 కాబట్టి $\angle ACB = \frac{180^0}{2} = 90^0$

xi) **సహజమైన ఆలోచనా విధానం :**

గణితంలో సమస్యలను వ్యక్తి తార్కిక, ఆలోచనాశక్తి, సృజనాత్మకతశక్తి ఆధారంగా సాధించాల్సి వుంటుంది. కాబట్టి గణితం అభ్యసించడం ద్వారా విద్యార్థుల్లో తార్కిక ఆలోచనాశక్తి, సృజనాత్మక శక్తులు పెంపొందుతాయి.

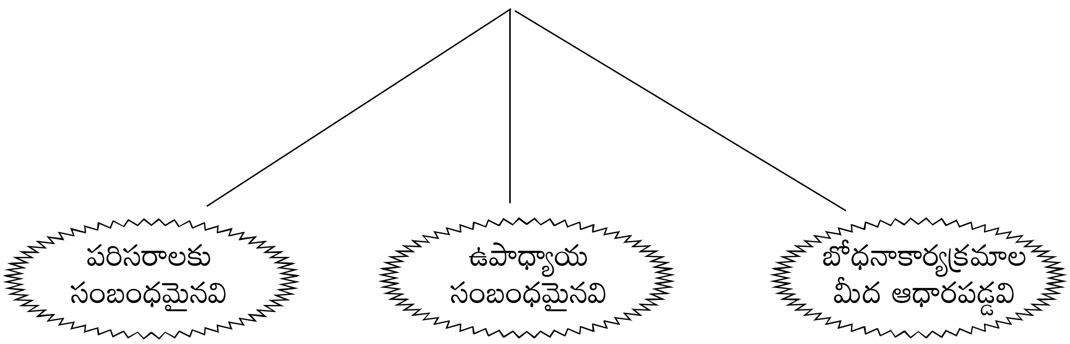
xii) **సౌందర్య లక్షణం :**

జ్యామితి ఆధారంగా మానవునితో నిర్మించబడే కట్టడాలు, ప్రకృతిలో సౌష్ఠవ రూపాన్ని కలిగిన పూలు, ఆకులు, అలాగే గణిత పజిల్స్, శిల్పం ఇవి అన్నీ కూడా గణిత నియమాలకు లోబడిన విషయాలని మనకు తెలుసు.

సాధారణంగా ప్రాథమికోన్నత (ఎలిమెంటరీ) స్థాయి విద్యార్థి స్వభావం ఎలా ఉంటుంది?

1.2.1. **పిల్లవాని స్వభావం :**

పిల్లలు కొత్తవాతావరణంలో ఉన్నట్టు అనుభూతికి లోనౌతారు. పై తరగతుల్లోకి వచ్చిన సంతోషం, పాఠశాలలో కనిపించే పెద్దపెద్ద సీనియర్ ఉపాధ్యాయులు తనకంటే పెద్దగా ఉండే మిగతాపిల్లలు వీళ్ళందరూ మిశ్రమంగా ఉన్న వాతావరణంలో తమనుతాము కలుపుకోవడం పిల్లలకు పెద్ద ప్రయత్నం అవుతుంది. అయినా కూడా తాము ఎలిమెంటరీ స్థాయి దాటామన్న ఆత్మవిశ్వాసం పనిచేస్తూ ఉంటుంది. పాఠశాలలో మిగతా ఉపాధ్యాయులెవరైనా కుటుంబంలోని వారికి తెలిసి ఉన్నట్లైతే అతడికి/ఆమెకు పాఠశాల మరింత ఆసక్తిదాయకంగా మారుతుంది. కొత్త అనుభూతిని నింపుతుంది. ప్రాథమికోన్నత స్థాయిలో (పాఠశాలలో) పిల్లల అనుభూతులు మూడు రకాలుగా ఉంటాయి



i) **పరిసరాలకు సంబంధించినవి :**

- కొత్త వాతావరణంలో కొత్తదనం, ప్రసన్నత, ఆనందం ఉంటాయి.
- భయం, సంకోచం ప్రవేశిస్తాయి.
- స్వీయ క్రమశిక్షణతో ప్రవర్తన ఉంచుకునే ప్రయత్నం జరుగుతుంది.
- నూతన విషయాలు, ఉపాధ్యాయుల పట్ల ఉత్సాహంతో ఉంటారు.
- తన వేషధారణ, అలంకరణ పట్ల శ్రద్ధ కలుగుతుంది.
- లైంకిగ బేధాన్ని అర్థం చేసుకుంటారు.

ii) **ఉపాధ్యాయునికి సంబంధించినవి :**

- ఉపాధ్యాయుల వ్యక్తిత్వంతో కొత్తదనం చూస్తుంటారు.
- ఉపాధ్యాయులపట్ల గౌరవభావంతో మెలుగుతుంటారు

- ఉపాధ్యాయుల ద్వారా తనకు కావలసిన అవసరాలన్నీ చెప్పుకోవలనుకుంటారు.
- సబ్జెక్టు టీచర్‌కి ఆ విషయంలో పూర్తి ప్రజ్ఞ ఉందని భావిస్తారు.
- ఉపాధ్యాయులతో కలిసిమెలిసి తిరగడంలో చాలా ఆనందాన్ని అనుభవిస్తారు.

iii) **విద్యాసంబంధమైన (బోధనా) కార్యక్రమాలు :**

- కొత్తవిషయాలు తెలుస్తాయి, పాఠ్యక్రమ బహుళ ప్రయోజనం అర్థం అవుతుంది.
- పిరియడ్స్‌గా విభజించి సిలబస్ చెప్పడంలో గల ఔచిత్యం తెలుస్తుంది.
- కృత్యాలు అన్నీ నిర్ధారితంగా ఉండవలసిన అవసరం ఏమిటో అర్థమౌతుంది.
- బోధనా సామాగ్రి తరగతిలో ఉండడంతో వాటితో పనిచేయడానికి ఉత్సాహం చూపిస్తాడు.
- గ్రూపుల్లో కలిసి పనిచేయడానికి ఇష్టపడతాడు.
- కొత్త నిబంధనలకు అనుగుణంగా తాను మెలగవలసిన బాధ్యతను గుర్తిస్తాడు.

1.2.2. **గణితశాస్త్ర ఉద్దేశాలు / ప్రధాన లక్షణాలు :**

1. గణితంలోని హేతువాదం చాలా సరళమైంది. దత్తాంశంలో అనుసరించవలసిన విధానం, సాధించవలసినవి విలువ అనే దశలు ఉంటాయి. గణితంలో ఆధార విషయాలకు తప్ప ఇతర అంశాలకు చోటులేదు. అందువల్ల తప్పక గుర్తించుకోవలసిన అంశాలు ఆధారంగా సరియైన తర్కం రూపొందించడానికి అవకాశం ఉంది.
2. గణితంలో మాటల గారడీ, విషయం సూటిగా చెప్పకుండా మభ్యపెట్టే చతురతలకు చోటులేనే లేదు. అనిశ్చితమైనవి, కాలహరణం అయ్యేటువంటి ఆధారపడిన విద్యావిదానము గణితంలో ఉంటుంది.
3. గణితశాస్త్ర ఫలితాలు 'సరియైనవి', 'సరికానివి' అనే రెండు వర్గాలుగానే ఉంటాయి. పరిస్థితులు, వ్యక్తులు, వ్యవస్థలను బట్టి అవిమారడం జరుగదు. సమస్యల పరిష్కారం గణితశాస్త్ర పరంగా ఉంటుంది. బేధాభిప్రాయాలకు అవకాశం లేదు.
4. నిత్యజీవితంలో విజయానికి ఒక వ్యక్తికి సంబంధించిన అన్ని అంశాలలో అవగాహన ఉండాలి. అదేవిధంగా గణిత అభ్యసనలో విద్యార్థికి కూడా ఒక సమస్యకు సంబంధించి దత్తాంశం, సారాంశం, అవలంబించే విధానం, ఇంకేమి కావలసి ఉన్నది అనే అంశాలపై పూర్తి అవగాహన ఉండాలి.
5. స్వయంకృషితో సమస్య సాధన చేసి, ఫలితాలు సరియైనవో, కావో సరి చూసుకునే పద్ధతి గణితానికి స్వాభావికంగానే ఉంది. దీనివల్ల విద్యార్థులు తమపై నమ్మకం, స్వయం సాధన పట్ల ఆనందం, సరిచూసుకోవడంలో తృప్తి పొంది నూతన ప్రయత్నాలకు ఉత్సాహం చూపుతారు.

1.2.3. **ప్రాథమికోన్నత స్థాయిలో గణితశాస్త్రం / ఉద్దేశాలు :**

1. తార్కికతను అభివృద్ధి చేయడం.
2. శాస్త్రీయ, అన్వేషణ దృక్పథాన్ని కలిగించడం
3. ఆధునిక ప్రపంచంలో గణిత ప్రాముఖ్యతను, స్థానాన్ని తెలియజేయుట.
4. గణితభాష, పదాలు, గుర్తులను పరిచయం చేసి వినియోగించేలా చూడడం.

1.2.4 ప్రాథమికోన్నత స్థాయిలో గణితశాస్త్ర లక్షణాల ఆవశ్యకత :

1. గణితం ద్వారా మూర్తి భావనలను స్థిరం చేయడానికి.
2. గణితంలో శుభ్రత, క్రమశిక్షణ అలవరచుకోడానికి
3. గణితం ద్వారా అభ్యాసకుడు సర్వతోముఖాభివృద్ధి సాధించటానికి
4. గణితశాస్త్రంలో కచ్చితత్వం, వేగం వంటి లక్షణాలు అలవరచుకోవటానికి
5. గణితం ద్వారా గణితశాస్త్రజ్ఞులు, చేసిన కృషిని, సేవలను అభినందించడానికి.

నిజనిర్ధారణ

1.2.5. పరిచయం

నిజనిర్ధారణ అంటే ఇప్పటికే ప్రకటించిన ప్రవచనం లేదా వాక్యం యొక్క కచ్చితత్వాన్ని నిరూపించటం. ఈ నిరూపణకు ఉపయోగించే ప్రమాణాలు లేదా నియమాల సమాహారం నిజనిర్ధారణలో ప్రముఖ పాత్ర పోషిస్తుంది. ఒక సిద్ధాంతంలోని అంతరార్ధంతో సహా పరిపూర్ణమైన భావాన్ని గ్రహించడాఇకి నిజనిర్ధారణ ఉపయోగపడుతుంది. మరొకమాటలో చెప్పాలంటే నిజనిర్ధారణను సరిచూడడం లేదా ఋజువు చేయడానికి ఉపయోగించే సాధనంగా పేర్కొనవచ్చు.

నిజనిర్ధారణలో తర్కం ఒక అంశీభూతంగా ఉంటుంది. ఎంచుకున్న ప్రవచనం లేదా సిద్ధాంతంలోని అంశాలను నిజనిర్ధారణ చేయడానికి వాటిని క్రమపద్ధతిలో తార్కికంగా విశ్లేషించాల్సి ఉంటుంది. ఈవిధమైన విశ్లేషణలు విద్యార్థిలో తార్కికశక్తిని విశ్లేషణా దృక్పథాన్ని పెంచుతాయి. నిజనిర్ధారణ విద్యార్థిని పరిశీలకుడిగా, అంతిమంగా గణిత పరిశోధకుడిగా మార్చుతుంది. కాబట్టి ఉపాధ్యాయుడు సాధారణ తరగతి గది బోధనలో నిజనిర్ధారణను మిళితం చేయాలి. దీనివల్ల అటు ఉపాధ్యాయుడు, ఇటు విద్యార్థి ఏకకాలంలో విశ్లేషణా ప్రక్రియను కొనసాగిస్తున్నారు. అంతిమంగా భావావేశరంగ, జ్ఞానాత్మకరంగ, మానసిక చలనాత్మక రంగ లక్ష్యాలను సాధించవచ్చు.

వివిధ గణిత అంశాలను నిర్ధారించే ప్రక్రియలో ఉపయోగించే ప్రామాణికాలు :

1. సాధికారత :

గణిత అంశాలను నిజనిర్ధారణ చేసే విషయంలో ఉపాధ్యాయుడికి, సంబంధించిన అంశం పట్ల సాధికారత ఉండితీరాలి. అపుడే ఉపాధ్యాయుడు విద్యార్థికి తగిన మార్గదర్శకత్వం చేయగల్గుతాడు. ఎంచుకున్న అంశం పట్ల స్పష్టత, అవగాహన లేకపోతే సరైన విశ్లేషణలు చేయలేడు. కాబట్టి ఉపాధ్యాయుడు తప్పనిసరిగా నిజనిర్ధారణ చేయవలసిన అంశంపట్ల సాధికారత ఉండాలి.

2. సమన్వయ సామర్థ్యం :

విషయ నిర్ధారణ చేయునపుడు ఉపాధ్యాయునికి సమన్వయ సామర్థ్యం ఉండాలి. గణిత భావనలకు తర్కం పునాది అయితే సమన్వయ సామర్థ్యం నిర్మాణాత్మక భావనకు దారితీస్తుంది. గణితంలోని వివిధ విషయాలను నిరూపణ చేసి వాటినన్నింటిని మేళవించి ఒక ముగింపు రాబట్టడాన్ని సిద్ధాంత నిరూపణలలో మనం చూస్తాం.

ఉదా :–

త్రిభుజంలోని మూడు కోణాల మొత్తం 180^0 అని నిరూపించటానికి బాహ్యకోణాలు, అల్ప, అధిక కోణాల విషయాల నిరూపణలపైనా "మూడు కోణాల మొత్తం 180^0" అనే నిరూపణ ఆధారపడి ఉంటుంది.

అంటే గణితంలో ఒక విషయాన్ని నిర్ధారించుటకు సంశ్లేషణ పద్ధతి ద్వారా చిన్నచిన్న భాగాలుగా చేసి, వాటి నిరూపణలను వినియోగిస్తూ అసలు విషయాన్ని నిర్ధారిస్తాము.

3. సాదృశ్యత :

మూర్త, అమూర్త భావనలను తెలిపేటపుడు గణితంలో సాదృశ్యత పరిజ్ఞానం ఉపయోగపడుతుంది. విద్యార్థి మూర్త ఆలోచనల ద్వారా అమూర్త భావనలను పెంపొందించుకంటాడు. దానికి అనుభవం ఆధారమైతే సాదృశ్యత ఆ అనుభవానికి అభివృద్ధి పథంలో తోడ్పడుతుంది.

ఉదా :

రాము దగ్గర ఉన్న గోళీల సంచి లోంచి శ్యాముకి 4 ఇవ్వగా మిగిలినవి 10 అని అన్నప్పుడు రాము దగ్గర గోళీల సంఖ్యను సులభంగా చెప్పగలుగుతారు. అంటే ఈ విషయాలపై మూర్తభావన ముందుగా విద్యార్థిలో వ్యవస్థితమై ఉంది కాబట్టి సమస్యను సులభంగా పరిష్కరించే సామర్థ్యం పిల్లవాడిలో కలిగింది. నిజనిర్ధారణ చేయునపుడు సాదృశ్యత వల్ల విషయం సులభంగా అంగీకరించబడుతుంది లేదా ఆమోదించబడుతుంది.

4. సహజత్వం :

నిజనిర్ధారణ చేయుటకు సహజత్వం కారణం అంటున్నారు కొంతమంది శాస్త్రవేత్తలు. ఎందుకంటే ఏ శాస్త్రానికైనా, ఒక సమస్యకు పరిష్కారమైనా, సిద్ధాంత నిరూపణ అయిన అది ఒక మానవుని మేథస్సు నుంచి ఉద్భవించినదే. అందువల్ల నిజనిర్ధారణకు కొన్ని సమయాలలో ఆధారం సహజత్వం కూడా అవుతుంది.

ఉదా :

పైథాగరస్ సిద్ధాంత నిరూపణ చేయుట, ప్రవచనాన్ని అంగీకరించటానికి కూడా సహజత్వం కారణము.

5. ఏకాభిప్రాయం :

నిజనిర్ధారణ చేయటానికి అభిప్రాయ సేకరణ కూడా అవసరం. ఒక విషయాన్ని నిరూపణ చేయటానికి భిన్న అభిప్రాయాల సేకరణ, భిన్న విశ్వాసాల ఆధారంగానే జరుగుతుది. అత్యధికంగా వీటితో పాటు తర్కం మరియు గణితాన్ని ఉపయోగించడం జరుగుతుంది.

6. కార్యసాధకత :

మారుతున్న పరిస్థితులకు అనుకూలంగా ఉండటం, సమాజంలోని సమస్యలను మరిష్కరించే శక్తిని అభివృద్ధి చేయడం, ఏపనినైనా నిర్ణీత సమయంలో పూర్తి చేసే శక్తిని, పట్టుదలను విద్యార్థిలో పెంచటమే వ్యవహారిక సత్తావాద లక్ష్యం. అంటే ఒక పనిని సాధించాలి అన్నపుడు దానిని పూర్తి చేసిన లేదా పూర్తి చేయగలిగే సామర్థ్యాన్ని పెంచినా కూడా ఆ పని పూర్తయినట్లు భావించటం.

ఉదాహరణకు ఒక ప్రవచనాన్ని నిరూపించటానికి విపర్యయం సాధించినా కూడా అసలు ప్రవచనం సాధించినట్లే. 2 అనేది సరి ప్రధానసంఖ్య అని నిరూపించాలి అన్నపుడు సరిసంయుక్త సంఖ్యకాదు అని చెప్పినా సరి ప్రధానసంఖ్య అయినట్లే.

సమయం :

ఒక విషయాన్ని నిర్ధారించటానికి లేదా నిరూపించటానికి సమయం చాలా కీలకమైన అంశం ఫెర్మా నిరూపించని సిద్ధాంతం ఇటీవల కాలంలో నిరూపితం కావటమే ఇందుకు కారణం. నిజనిర్ధారణ చేయుటకు సమయం కూడా ఒక కారణమని చెప్పవచ్చు. విద్యార్థిలోని ప్రగతిని మూల్యాంకనం చేయటానికి కొంత సమయం కేటాయించి నికషను నిర్వహిస్తాం. అలాగే విషయం నిర్ధారించటానికి సమయం లేదా వనరుల పాత్ర కూడాముఖ్యం.

1. గణిత శాస్త్ర స్వభావాన్ని విద్యార్థులలో పెంపొందించేందుకు నీవు చేపట్టే కార్యక్రమాలు ఏమిటి ?
2. గణిత పాఠ్యపుస్తకంలోని ఏదైనా ఒక అంశాన్ని తీసుకుని నిజనిర్ధారణ ప్రక్రియలో ఏమే ప్రమాణాలు ఉన్నాయో ఒక పట్టికను వ్రాయుము.

1.3. ప్రాథమిక స్థాయి నండీ ప్రాథమికోన్నత స్థాయికి గణితపరమైన పరివర్తన :

పరిచయం :

విద్యాప్రణాళికకు సంబంధించిన బోధనాభ్యసన కార్యక్రమాల్లో నిర్వహించే కృత్యాలు రెండు రకాల ప్రయోజనలు లేదా లక్ష్యాలను సాధించేవిగా ఉండాలి. అభ్యసన ద్వారా విద్యార్థిలో జ్ఞానాభివృద్ధి జరగటం మొదటి లక్ష్యం అయితే అతని ప్రవర్తనలో మార్పుకనపడటం అనేది రెండవది.

ఉపాధ్యాయుడు తయారుచేసే పాఠ్యప్రణాళికలోని సామర్థ్యాలు పైన పేర్కొన్న లక్ష్యాలను సాధించేవిగా ఉండాలి. విద్యార్థులు ఒక స్థాయి నుండీ మరొక స్థాయికి వెళ్ళే సందర్భంలో వారు కలిగి ఉన్న సామర్థ్యాలను ఉపాధ్యాయుడు ఎప్పటికప్పుడు నిరంతర సమగ్ర మూల్యాంకనం ద్వారా అంచనా వేయాలి. ఈ క్రమంలో ఉపాధ్యాయుడికి అభ్యాసకుని స్వభావం ప్రాథమిక స్థాయిలో ఏవిధంగా ఉంటుంది? ప్రాథమికోన్నత స్థాయిలో ఏవిధంగా ఉంటుంది? అనే విషయాలపై సాధికారత ఉండాలి.

1.3.1.0. ప్రాథమిక స్థాయిలో విద్యార్థి స్వభావం :

- అభ్యసనలో ఎక్కువసేపు సమయం కేటాయించటానికి ఇష్టపడదు.
- ఆచరణాత్మకతకు అధిక ప్రాధాన్యత నిస్తాడు.
- తాను చేసిన పని సరియైనది అని భావిస్తాడు.
- ప్రతి విషయాన్ని చేసి చూసిన తరువాతే ఒక నిర్ణయానికి వస్తాడు.
- కొత్త విషయాలు నేర్చుకోవటంలో ఆసక్తి కనబరుస్తాడు.
- ప్రాథమిక భావనలపై అవగాహన కలిగి ఉంటాడు.
- జ్ఞాపకశక్తి అధికంగా ఉంటుంది.
- ఆట, పాటలతో విషయాలను నేర్చుకుంటాడు.
- స్వేచ్ఛను ఆశిస్తాడు.
- తాను చేసిన పనిలో తప్పులు వెదకటానికి ఇష్టపడదు.

1.3.1.1. గణితపరంగా ప్రాథమికస్థాయిలో విద్యార్థి స్వభావం :

- చతుర్విధ ప్రక్రియలపై పరిచయం ఏర్పడుతుంది.
- గణితంపై ఆసక్తి, అభిరుచి కలుగుతాయి.
- గణితంలోని భాష, చిహ్నాల పరిచయం జరుగుతుంది.
- విషయంపై స్పష్టత కలిగి ఉంటాడు.
- ప్రాథమికోన్నత స్థాయిలో గణిత భావనలకు పునాది ఏర్పడుతుంది.

1.3.1.2. ప్రాథమికోన్నత స్థాయిలో విద్యార్థి స్వభావం :

- అమూర్త ఆలోచనలపై అవగాహన ఉంటుంది.
- పరిసరాలను పరిశీలిస్తాడు.
- తన అభిప్రాయాలను స్వేచ్ఛగా వెల్లడి చేస్తాడు.
- విశదీకరణకు తావు ఉంటుంది.
- నిర్ణయాలను తీసుకోవడంలో తగు జాగ్రత్తలు పాటిస్తాడు.
- తల్లిదండ్రులకన్నా పరిసరాల ప్రభావం అధికంగా ఉంటుంది.
- ప్రశంస, అభిమానం, గౌరవం లాంటి అంశాలకు ప్రాధాన్యత ఇస్తాడు.
- విషయాలను నేర్చుకొనుటలో సంసిద్ధత కలిగి ఉంటాడు.
- మంచి, చెడులకు చోటివ్వక తన ఇష్టాన్నే ఆధారంగా చేసుకుని అంశాలను ఎన్నుకుంటాడు.
- ప్రతి అంశానికి తగిన అనుభవాలను కలిగి ఉంటాడు.

1.3.1.3. గణితపరంగా ప్రాథమికోన్నత స్థాయిలో విద్యార్థి స్వభావం :

- ఆలోచనలో క్రమశిక్షణ ఏర్పడుతుంది.
- శాస్త్రీయ దృక్పథాలు అలవడుతాయి.
- గణితశాస్త్రానికి సంబంధించిన విషయాలను నేర్చుకోవటానికి ఆసక్తి చూపుతాడు.
- గణితంపై అవధానం కలిగి ఉంటాడు.
- సమస్యా పరిష్కార సామర్థ్యం కలిగి ఉంటాడు.

1.3.2. అభ్యాసకుని పరివర్తన :

అభ్యాసకుడు ప్రాథమిక స్థాయి నుండీ ప్రాథమికోన్నత స్థాయికి చేరునపుడు కొంత పరివర్తన ఏర్పడుతుంది. ఆలోచనల్లో నిర్ణయాలు తీసుకొనుటలో గణితీకరణ అభిప్రాయాలను వ్యక్తం చేస్తాడు. ప్రత్యక్ష అనుభవాల ఆధారంగా పరోక్ష విషయాల అవగాహన ఏర్పడుతుంది. అంటే మూర్త ఆలోచనల నుండి అమూర్త ఆలోచనలు స్థిరం అవుతాయి. అటువంటి ఆలోచనలు స్థిరం అయ్యే రెండు రకాల ప్రక్రియలను ఇప్పుడు చూద్దాం

అభ్యాసకుని పరివర్తన
- మూర్త ఆలోచనల నుండి అమూర్త ఆలోచనలకు
- అభ్యసన ద్వారా వైఖరి నిర్మాణం

ఎ) మూర్త ఆలోచనల నుండీ అమూర్త అలోచనలు :

విద్యార్థి అమూర్త ఆలోచనలను సమర్థవంతంగా చేస్తాడు. మొదటగా పిల్లవాడు ఒకటవ తరగతిలో సంఖ్యలను తెలుసుకోవడం తర్వాత వాటిని ఆరోహణ, అవరోహణ క్రమంలో రాయకుండానే ఏవి చిన్నవి? ఏవి పెద్దవి? అనే విషయాన్ని తెలియజేస్తాడు. ఆరు, ఏడు తరగతుల్లో సంఖ్యావ్యవస్థకు సంబంధించిన సమస్యలలో పదజాలాన్ని అర్థం చేసుకుని క్రమంలో సంఖ్యలను రాయగలుగుతాడు. మొదట 1,2 తరగతుల్లో ఉండే మూర్త ఆలోచనలు 6,7 తరగతులలో అమూర్త ఆలోచనలుగా మారుతాయి.

బి) అభ్యసన ద్వారా వైఖరి నిర్మాణం :

ముందుగా చెప్పినట్లు మూర్త ఆలోచనల నుండీ అమూర్త ఆలోచనలు స్థిరం అయిన తరువాత ఆ అవగాహన, భావనను నూతన సందర్భాలలో వినియోగిస్తాడు. అవే అలవాట్లుగా ఏర్పడతాయి. అటువంటి అలవాట్లు రానురాను వైఖరిగా దారితీస్తాయి. Attitude is Everthing అంటే వైఖరి మనిషి జీవితాన్ని నిర్ణయిస్తుంది. తన జీవితంలో ఎదుర్కోవలసిన సమస్యలపై అవగాహన ఏర్పరచి, సరైన నిర్ణయాన్ని తీసుకుంటాడు. తద్వారా అభ్యాసకుడి ప్రవర్తనలో మార్పు వస్తుంది. ఈవిధంగా అభ్యాసకుడిలో మార్పు సంభవిస్తుంది.

1.3.3. విద్యార్థులలో ప్రాథమిక పాఠశాల గణితం నుండి ప్రాథమికోన్నత పాఠశాల గణితానికి పరివర్తన ఏవిధంగా జరుగుతుంది :

పిల్లలు ప్రాథమిక స్థాయిలో గణితానికి సంబంధించి అంశాలకు పరిచయం అవుతారు. చతుర్విధ ప్రక్రియలను ఉపయోగించటం, లెక్కించటం ద్వారా లెక్కలు చేయటం అనే విషయాలు గ్రహిస్తారు. సాధారణంగా ఈస్థాయి పిల్లల్లో గ్రహణశక్తి అధికంగాను, అవగాహనా స్థాయి తక్కువగాను ఉంటుంది. అంటే పిల్లలు తమ సామర్థ్యాలలో నైపుణ్యం సాధించటానికి గ్రహణశక్తి, అవగాహనస్థాయి రెండూ అవసరమవుతాయి. పిల్లలు ఏదైనా విషయాన్ని మొదటగా విన్న తరువాత దానిని విమర్శనాత్మకంగా ఆలోచిస్తారు. ఉదాహరణకు లెక్కలలో ఎక్కాలు పిల్లలు ప్రాథమిక స్థాయిలో బట్టీపట్టి చదువుతారు. పై తరగతులలో వాటి భావనను అర్థం చేసుకుంటారు. $2\times3=6$ అని ప్రాథమికస్థాయిలో చదివితే $2+2+2=6$ లేక $3+3=6$ అనే విషయాన్ని ఆపై తరగతులలో తెలుసుకుంటారు. పిల్లలు తమ సామర్థ్యాలకు అనుగుణంగా అంశాలవారీగా విషయాలను గ్రహిస్తారు.

అదేవిధంగా చతుర్విధ ప్రక్రియలలో సంకలనం లేక వ్యవకలనం తీసుకున్నా సంకలనం లోని ఒక సంఖ్యను వేరే సంఖ్యతో ఏవిధంగా కూడవచ్చు ప్రాథమిక స్థాయిలో తెలుసుకుంటే పద సమస్యలను ఉపయోగించి సంకలనం లేదా వ్యవకలనం ఎలా చేయవచ్చో ముందు తరగతులలో తెలుసుకుంటారు.

పిల్లలు తమంతట తాముగా గణిత భావనలను అర్థం చేసుకునేందుకు ఉపాధ్యాయుడు అవకాశం కల్పించాలి. ఏదైనా విషయాన్ని తరగతి గదిలో బోధించిన తరువాత కొంత సమయం కేటాయించి పిల్లలు తమంతట తాము భావనను వ్యక్తీకరణ చేసేందుకు వీలుగా అంశాల వారీగా విశ్లేషణ చేయమనాలి. తరువాత పిల్లలను తగిన ప్రశ్నలను స్వయంగా రూపొందించమనాలి.

తద్వారా పిల్లల్లో గణితంపై ఆసక్తి, అభిరుచి కల్గించవచ్చు. నిర్మాణాత్మక వాదాన్ని అనుసరించి పిల్లల్లో స్వయంగా జ్ఞాననిర్మాణం ద్వారా గణిత భావనలను అవగతం చేసుకుంటారు. ప్రాథమిక స్థాయిలో పిల్లలు నేర్చుకున్న గణిత భావనలను పిల్లలు ప్రాథమికోన్నత స్థాయిలో త్వరగా అవగాహన చేసుకొని తద్వారా అభ్యాసనా కృత్యాల్లో చురుకుగా పాల్గొనేందుకు అవకాశం ఉంటుంది.

ఇక ఉపాధ్యాయుడు విషయానికి వస్తే, పిల్లలు ప్రాథమిక స్థాయిలో ఉపాధ్యాయుడు ఏది చెబితే అదియే సరియైనది అనుకుంటారు. "శంఖువులో పోస్తేనే తీర్థం" అన్నట్లుగా ప్రాథమికోన్నత స్థాయిలో పిల్లలు ఎక్కువ భావనలు అవగతం చేసకోవాలి. ప్రాథమిక స్థాయిలో నేర్చుకున్న భావనలను వ్యవస్థీకరణ చేయాల్సిన అవసరం ఉంది. కాబట్టి ఉపాధ్యాయుడు ప్రతి అంశాన్ని బోధించే ముందుగా ఆ అంశానికి సంబంధించిన ప్రాథమిక స్థాయి భావనలను కూడా ఒకసారి జ్ఞప్తికి తీసుకురావలసిన అవసరం ఎంతైనా ఉంది.

1.3.4. తగుజాగ్రత్తలు :

- పిల్లలకు అవగాహన లోపం కలుగకుండా చూడాలి.
- పిల్లలకు తగిన అభ్యసన సౌకర్యాలను కల్పించాలి.
- తరగతులవారీగా మూల్యాంకనా ప్రక్రియను గమనించాలి.
- పిల్లలకు ప్రాథమికస్థాయిలో కలిగిన భావన నకరాత్మకకు దారి తీసేదిగా ఉండకూడదు.
- సామర్థ్యాలు సాధించే విధంగా అభ్యసనా కృత్యాలు ఉండాలి.

కృత్యం :

విద్యార్థి ప్రగతి తీరును పరిశీలించేవిధంగా (ప్రాథమికస్థాయి నుండి ప్రాథమికోన్నత స్థాయి) ఒక టూల్‌ని తయారు చేయుము.

సేకరించండి :

మీ పరిసరాలలో ఐదుగురు విద్యార్థుల ప్రాథమికోన్నత స్థాయి పరివర్తనా తీరును పరిశీలించి నివేదిక రాయుము.

1.4 ఎలిమెంటరీ స్థాయిలో గణితపరమైన ఆలోచనను అభివృద్ధి చేయుట (మూర్త, అమూర్త, నిర్దిష్టం నుంచీ సాధారణం)

మానవుని జీవితంలో గణితం ప్రధానపాత్ర వహిస్తుంది. పాఠశాలకు వచ్చే పూర్వమే గణిత విషయాలపై విద్యార్థికి కొంత అవగాహన ఉంటుంది. ఉదహరణకు కళ్ళు రెండు, చెప్పుల జత లాంటివి. విద్యార్థులు పూర్వప్రాథమిక సాయిలో ఇలాంటి అనుభవాలు కలిగి ఉంటారు. విద్యార్థులు ప్రాథమిక స్థాయికి చేరేటప్పటికి అంకెలతో సంకలన, వ్యవకలన ప్రక్రియలపై అవగాహన పొందుతారు. ఈ స్థాయిలో పిల్లలు చిత్రాలను గీయటంలో అధిక ఆసక్తి కలిగి ఉంటారు. వారు గీసిన చిత్రాలను గమనిస్తే ఎక్కువగా గణిత పటాలు మనకు గోచరిస్తాయి. ఉదాహరణకు వృతం, చతురస్రం, త్రిభుజం లాంటివి. అంటే విద్యార్థులు గణిత విషయాలను మిగతా విషయాలను అభివ్యక్తీకరించటంలో కూడా వినియోగించడం అలవడతోంది. అనగా గణితపరమైన ఆలోచనలు చేయటం ప్రాథమిక స్థాయి నుండీ మొదలైంది. మరోక ఉదాహరణను బట్టీ విద్యార్థు గృహంలో అమ్మ బోమ్మలను చేయటానికి ప్రచత్నిస్తాడు. పై ఉదాహరణలను బట్టీ గణితపరమైన ఆలోచనలు విద్యార్థి కలిగి ఉన్నా దానిని తగురీతిలో అభివృద్ధి పధానికి తీసుకురావలసిన భాధ్యత ఉపాధ్యాయుడిదే.

ఇక ప్రాథమికోన్నత స్థాయికి వస్తే, విద్యార్థి తను అభ్యాసం చేసే ఇతర విషయాలలోను గణిత పరిజ్ఞానాన్ని ఉపయోగిస్తాడు. ఈ విధంగా విద్యార్థి గణితపరమైన ఆలోచనలకు చేయగల్గుతాడు. విద్యార్థిలనో ఇటువంటి ఆలోచనలను అభివృద్ధి చేయవలసి ఉంటుంది గణిత పరమైన ఆలోచనలను విద్యార్థిలో ఎందుకు పెంపోందించాలి?

గణిత పరమైన ఆలోచనల అభివృద్ధి ఆవశ్యకత :-

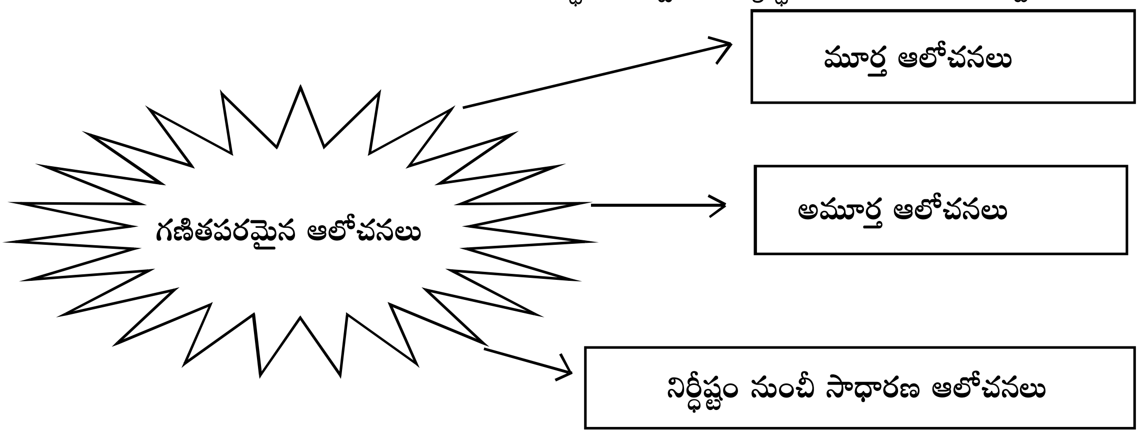
- పాఠశాల విద్యకు గణిత ఆలోచనలు మూఖ్యమైన లక్ష్యాలు.
- గణిత అభ్యసనకు గణిత ఆలోచనలు మాట వంటివి.
- గణిత ఆలోచనల ద్వారా గణిత బోధన సులభం అవుతుంది.

గణిత పరమైన ఆలోచలను విద్యార్ధిలో అభివృద్ధి చేయుటకు వ్యూహాలు :-

- గణిత ఆలోచనలు అభివృద్ధి చేయటానికి ఆధారమైన గణిత జ్ఞానం విద్యార్ధిలో ఉండేలా చూడాలి.
- గణిత ఆలోచనలకు తగిన వివేచనా సామార్ధ్యం విద్యార్ధి సాధించేదిగా ఉండాలి.
- అన్వేషణ వ్యూహాలు విద్యార్ధి ఊహించేవిగా రూపొందించాలి.
- గణిత ఆలోచనలు విద్యార్ధి వైఖరుల అభివృద్ధికి దారితీయాలి.
- విద్యార్ధిలో వ్యక్తిగత నైపుణ్యాల అభివృద్ధికి అవకాశం ఇవ్వాలి.

గణితపరమైన ఆలోచనల పరిధిలో చేర్చబడిన అంశాలు :-

- గణిత సమస్యలపై దృష్టికేంద్రీకరించటం/ వాటిని సాధించటానికి ఉద్యుక్తులు కావటం.
- సమస్యను అవగాహన చేసుకునే ప్రమత్నం చేయటం
- సమస్యలోని అంతరార్ధాన్ని గుర్తించటం.
- పూర్యజ్ఞానాన్ని / అభ్యసనను సమస్యసాధనకు వినియోగించటం.
- సరూప పరిస్థితులకు పూర్వజ్ఞానాన్ని అన్వయించటం.
- గణిత పరమైన ఆలోచనలు చేయటం వాటిని ప్రశ్నలు / సమస్యలుగా చిత్రీకరిరంచటం.
- గణిత పరమైన ఆలోచటలను ఈ క్రింది పద్ధతల ద్వారా విద్యార్ధులో పెంపొందించవచ్చు.



మూర్త ఆలోచనలు :- విద్యార్ధులలో గణితం అనేపదానికి అర్ధం తెలిసి దాని వినియోగం తేలుసుకునే సందార్ధమే మూర్త ఆలోచనలు. అంటే త్ర్యక్ష అనుభవా ద్వారా విద్యార్ధులలో ఏర్పరచే జ్ఞానాన్ని ఉండే ఆలోచనలు అంటారు. ఉదాహరణకు ప్రాధమిక స్థాయిలో ఉండే జ్యామితీయ ఆకారాలపై అవగాహన అను అంశంలో విద్యార్ధికి నమూనాలు లేదా పరికరాలు ద్యారా విషయజ్ఞానం ఏర్పడుతుంది. విదార్ధి ప్రాధమికోన్నత స్థాయికి చేరునప్పటికి అవి ద్వియతీయ లేక త్రిమితీయ ఆకారాలు అవగాహనగా రూపాంతం చేందుతుంది. అంటే ఒక విషయాన్ని విద్యార్ధి స్థాయి పెరిగే కొద్దీ తాను నేర్చుకున్న అంశాన్ని వివరంగా విపులంగా తెలుసుకోవటానికి ప్రయత్నిస్తాడు. అటువంటి ప్రయత్నాలు

సఫలీకృతం కావాలి అంటే ఉపాధ్యాయుడు కొన్ని సూచనలను పాటించాలి.

- విషయం పట్ల స్పష్టమైన అవగాహన కలిగి ఉండటం.
- విషయ విశదీకరణలో ఎటువంటి లోపం లేకుండా చూడటం.
- విషయ విశదీకరణలో ఎటువంటి లోపం లేకుండా చూడటం.
- విషయానికి తగిన కృత్యాలు/ నమూనాలు వినియోగించడం.
- విద్యార్థి భావవ్యక్తీకరణకు అవకాశం కల్పించటం.
- బోధన అభ్యసనా కార్యక్రమంలో సాధ్యమయినంత వరకు విద్యార్థి ఉత్సాహంగా పాల్గోనేలా చూడటం.
- విద్యార్థి, ఉపాధ్యాయుడికి తరగతిగదిలో తగిన పరస్పరచర్య (Interaction) జరిగేలా చూడటం.
- ఇటువంటి సూచనలు పాటిస్తూ ఉపాధ్యాయుడు కొన్ని కృత్యాలద్వారా గణితపరమైన ఆలోచనలను అభివృద్ధి చేయువచ్చు గణితపరమైన ఆలోచనలను అభివృద్ధి చేయవచ్చు.

ఉదాహరణకు:- ఎలిమెంటరీ స్థాయిలోని విద్యార్థిలకు కృత్యం సమతల పటం ఆకారం కల్గిన పరికరాలు తమదైనందిన జీవితంలోని వస్తువులతో పోల్చుతూ ఒక పట్టికను తయారు చేయుట ద్యారా విద్యార్థులలో మూర్త ఆలోచనా విధ్యాంలో గణిత పరమైన ఆలోచనలను అభివృద్ధి చేయువచ్చు.

అమూర్త ఆలోచనలు:- విద్యార్థులు గణిత విషయంలో నేర్చుకునేటపుడు నూతన సందర్భాలలో ఎటువంటి పరిచయం లేకుండా పూర్వజ్ఞాన ఆధారంగా ప్రస్తుత విషయాన్ని తేలుసుకునే సామర్థ్యం పొందటమే అమూర్త ఆలోచనలు. విద్యార్థుకి గణిత ప్రాధమిక భావనలపై పూర్తిగా పట్టు సాధించిన తరువాత విషయాలను అవగతం చేసుకునే ప్రక్రీయను అమూర్త ఆలోచనల ద్వారా గణిత విషయాలను గ్రహించటం అంటారు. ప్రాధామికోన్నత స్థాయిలో విద్యార్థి సౌష్టవాక్షాలను గీయునపుడు ఒక కాగితం వెంబడి మడిచినపుడు ఏర్పడే గీత సౌష్టవాక్షం అని తెలుసుకుంటాడు. కాని ఆప్రక్రీయలో కొన్ని విషయాలను తెలిసిన అంతగా వాటిపై శ్రద్ధ చూపించడు. ఎందుకంటే సాధారణం కాబట్టి (1) సౌష్టవాక్షాలు ఎనైనా గీయవచ్చు (2) సౌష్టవాక్షం గీయాలి అంటే ముందుగా ఆకాగితం చతురస్రాకారాన్ని పొలి ఉండాలి. అప్పుడు మాత్రమే సౌష్టవాక్షిం గీయగలుగుతాము అనే విషయాలు సాధారణంగా ఆలోచించుకుండానే క్రియను పూర్తి చేస్తాడు. ఇటువంటి అమూర్త విషయాల ద్వారా విద్యార్థులలో గణితపరమైన ఆలోచనలు పెంచాలి అంటే కొన్ని విషయాలను ఉపాధ్యాయుడు దృష్టిలో ఉంచుకోవాలి.

- పరిశీలన చేయవలిసిన అంశాలు విద్యార్థి గుర్తించాడో లేదా తెలుసుకోవటం.
- పరిశీలించిన విషయాలను నమోదుచేసే అలవాటను చేయటం.
- నూతన ఆలోచనలకు, సృజానాత్మకతను తావివ్వటం.
- మూర్త ఆలోచనల ఆధారంగా అమూర్త ఆలోచనను అభివృద్ధి పరచటం లాంటి విషయాలు ఉ పాధ్యాయులు ఎప్పుటికప్పుడు పరిశీలించి పరిగణనలోనికి తీసుకొని బోధన సాగించాలి.

ఉదాహరణకు:- బీజగణితంలోని బహుపదులు సంకలన, వ్యవకాలనాలు అమూర్త ఆలోచనలపై ఆధారపడినవే.

$$a+a=2a$$

$$a \times a= a^2$$

అంటే a కి గణకం 'ఒకటి అనే భావన అమూర్త ఆలోచన.

నిర్ధిష్టకం నుంచీ సాధారణం:- విద్యార్థికి ఉపాధ్యాయుడు విషయాలను. బోదించేటపుడు తెలిసిన విషయాల నుంచీ తెలియాని విషయాలను బోదింస్తాడు. అలాబోధించేటపుడు ఉదాహరణల ద్వారా విషయాన్ని రాబట్టడాన్ని

విద్యార్థులకు అలవాడు చేస్తాడు. ఉదాహరణకు రాణి ఒక సైకిలును రూ।। 5000 కు కొని రూ।।6,500 లకు అమ్మివేసినది. అంటే లాభాము= అమ్మినవెల–కొన్నవెల = 6,500–5000=1,500. రాణి 1500 లాభం వచ్చినది. ఉపాధ్యాయుడు తరగతిగదిలో ఈ విషయాన్ని మొదటగా విద్యార్థులకు పరిచయం చేస్తున్నప్పుడు రాణి అమ్మిన వెల, కోన్నవెల విద్యార్థులకు తెలిసిన పూర్వభావనలు. అమ్మినవిల, కొన్నవెలను బట్టి లాభ,నష్టాలు కనుక్కోవటం విద్యార్థులకు ఏర్పడేనూతన జ్ఞానం. అప్పటి నుంచీ విద్యార్థి ఎప్పుడు కిరణా కొట్టుకు వెళ్ళిన తన జ్ఞాన స్థాయిఆధరంగా లాభనష్టాల విషయాలను తెలుసుకోగలుగుతాడు. అంటి తరగతి గదిలో బోదించే నిర్దిష్ట ఉదాహరణను బట్టి తన దైనందిన జీవితంలో విషయాలను సాధరణం చేసుకుంటాడు. ఇలా విషయాలను బోధిస్తున్నప్పుడు ఉపాధ్యాయడు పాటంచాల్సిన నియమాలు.

- విద్యార్థ పూర్వజ్ఞానాన్ని పరిశీలించాలి.
- పూర్వజ్ఞాన స్పష్టతను బట్టి విషయాన్ని విశదీకరించాలి.
- పూర్వజ్ఞానం, ప్రస్తుతజ్ఞానం, సాధారణీకరణం లాంటి విషయాలు కచ్చితమైన సాదృశ్యత కలిగి ఉండాలి.
- ఉపాధ్యాయుడు ఎంచుకునే ఉదాహరణలు విధ్యార్థుల వయోస్థాయి, వారిచుట్టు వాతావరణానికి తగినదై ఉండాలి.

పైవిషయాలను పాటిస్తూ ఉపాధ్యాయుడు కొన్ని కృత్యాలను కింది విధంగా కూడా ఎంపిక చేసుకోవచ్చు. ప్రధ్యాసంఖ్యలు, సంయుక్త సంఖ్యలు బోధించిన తరువాత 1 నుండి 100 వరకు గల ప్రధాన సంఖ్యలు, సంయుక్త సంఖ్యలు పట్టిక తయారుచేసే సరిసంఖ్య '2' కాక మిగతావి ప్రధాన సంఖ్యలు అవుతాయో? ఎందుకు కాదో తెలిపి ఆ ఆలోచనలను నమోదు చేయుమనటం

$a^{an} x a^{n} = a^{an+n}$.సూత్రాన్ని రాబట్టి. అటువంటి సూత్రాన్ని తృప్తిపరచే విధంగా స్వంతంగా కోన్ని ఉదాహరణలను రాయమనటం విద్యార్థులలో ఉపాధ్యాయునిగా 6వ తరగతి సంఖ్యా వూవస్థ పాఠంద్వారా పెంపొందింపచేసే కృత్యీలను ఒక పట్టిక రాయము.

నీవు బ్లాకటీచింగ్ కు వెళ్ళినపుడు ఒక విద్యార్థిని పరిశీలించి అతనిలో కలమూర్త, ఆమూర్త ఆలోచనల స్థాయిని అంచనా వేస్తూ ఏ వైనా రెండు సన్నివేశాలను రాయము.

1.5 గణిత వివేచన ప్రక్రియ

పిల్లల్లో సాధారణంగా ప్రకృతిని పరిశీలించటం, పరిశీలించిన అంశాల గురించి ప్రశ్నించటం, సమాధానాలను తార్కికంగా విశ్లేషించటం వంటి లక్షణాలు కనపడతాయి. ఈ భావనలు క్రమంగా బలపడి వారిలో గణిత వివేచనకు బీజం వేస్తాయి. పరిసరాల్లోని వస్తువులు, వ్యక్తులు, అంశాలు మొదలైన అన్ని విషయాలను వాటి అంశీభూతాలతో సహ తార్కికంగా ఆలోచించిన తరువత మాత్రమే అంగీకరిస్తారు. వివేచన ద్వారా ఆలోచించిన తరువాత మాత్రమే అంగీకరిస్తారు. వివేచన ద్వారా ఆలోచనలను వృద్ధి చేసుకుని క్రమంగా భవనలను రూపొందించుకుంటారు. ఈ భావనలు గణితపరమైన విశ్లేషణలకు పునాదిగా నిలిచి విద్యార్థిలో గణిత అభ్యసనపట్ల ఆసక్తిని రేకతిస్తాయి. మొత్తంగా చూస్తే గణిత వివేచన విద్యార్థి గణిత అభ్యాసం చేయటానికి పునాదిగా నిలుస్తుంది.

జాతీయ గణిత ఉపాధ్యాయులు సంఘం (national council of teachers of Mathematics) ప్రకారం గణిత వివేచన అనేది ఒక ప్రకారం గణిత వివేచన అనేది ఒక ప్రయోజన కరమైన ఆలోచన. గణిత

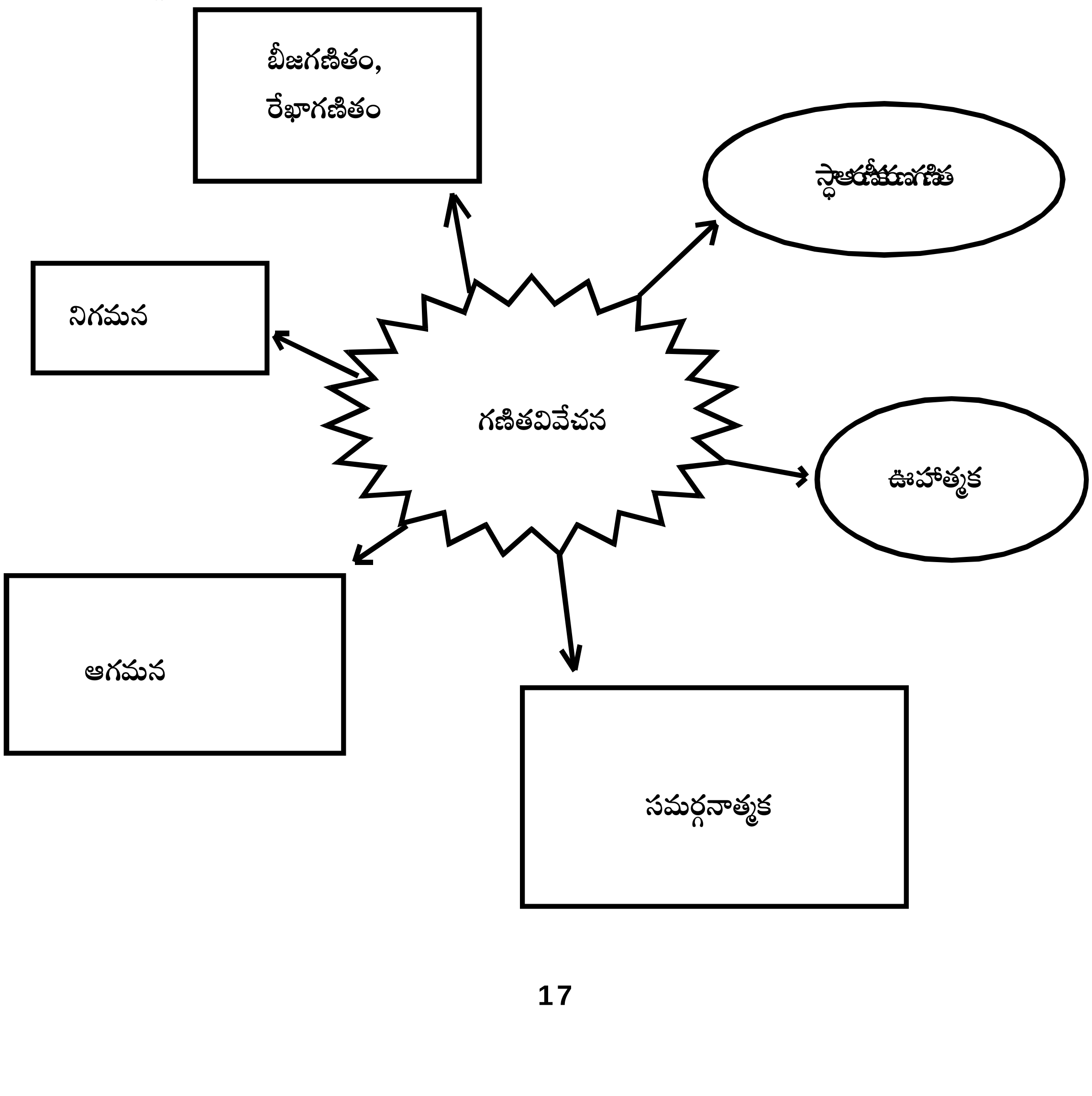
పరిశోధనలు / పరిశీలనలు / భావనలు సాధాణీకరణం ద్వారా గణిత వివేచన ఏర్పడుతుంది. ఉదాహరణకు 18+27= + 29 అని ప్రశ్న విద్యార్థులను అడిగినపుడు సమానగుర్తుకు ఎడమవైపు 18+27 లో కుడివైపుకు 29 లో 27 కంటే '2' ఎక్కువ ఉంది. 18 లోంచి 2 తీస్తే 16 కావున ఖాళీ ప్రదేశంలో '16' అని చెప్పవచ్చు. ఈ విధంగా పరిశీలించి జవాబును చెప్పటాన్ని గణితవివేచన అంటారు.

గణిత వివేచనకు సంబంధించి ప్రశ్నలు అడిగేటపుడు అధికంగా ASN విధమైన ప్రశ్నలను మాత్రమె అడగాలి. ASN అంటూ (Always) ఎల్లప్పుడు (Sometimes) అప్పుడప్పుడు (Never) ఎప్పుడు . ఈ ASN ప్రశ్నల ద్వారా విద్యార్థులలో ఊహాత్మక, సమర్థత్మాక, సాధారణీకరణ భావాలు విద్యార్థుల్లో పెంపోందించవచ్చు.

విద్యార్థుల్లో గణిత వివేచన పెంపోందించునపుడు దృష్టిలో ఉంచుకోవాల్సిన అంశాలు:-

- అనవసరమైన సమాచారాన్ని తోలగించటం
- సమస్యల సాధనలో తార్కికతను వినియోగించటం.
- గణిత సమస్యలు మరియు ఉపగమాలను సమర్ధించటానికి ఉపయుక్తమైన వాదనలు చేయటం.
- సాంప్రదాయేతర సమస్యలను నూతనంగా సాధించటం.

గణితవివేచన ప్రక్రియ:- విద్యార్థుల్లో గణితవివేచను అభివృద్ధి చేయటానికి కింది పద్ధతులను ఉపయోగించవచ్చు.



సమర్ధనాత్మక వివేచన:-

సమర్ధనాత్మక గణిత వివేచన అనేది ఒక తార్కిలో వాదం. ఇది అప్పటికే అంగీకరింపబడిన గణిత భావనల మీద ఆధారపడి ఉంటుంది. సమర్ధనాత్యక వివేచన ఒక ప్రవచనం ఒక ప్రకచనం సత్యమో/ అసత్యమో చేప్పటమే కాదు, అందుకు కారనమైన కాదు, అందుకు కారణమైన అంశాలు కూడా ఇందులోనికి చేర్చబడుతుంది.

ఉదాహరణ :

సరిసంఖ్యలు అన్ని సంయుక్త సంఖ్యలేనా? అనే విషయాన్ని నిరూపించటానికి విద్యార్థులు మొదటగా సరిసంఖ్యలు, సంయుక్త సంఖ్యల భావనలపై స్పష్టత కలిగి ఉండాలి. తరువాత పరిశీలన ద్వారా విద్యార్థులు '2' సరిసంఖ్యయే అని సంయుక్త సంఖ్య కాదు అనే విషయాన్ని చెప్పగలుగుతారు. అంటే ప్రవచనం సత్యమో / అసత్యమో చెప్పటమే కాదు – దానికి గల కారణం కూడా చెప్పగలుగుతున్నారు.

కృత్యాలు :

– సమాన భిన్నాలవుతూ, సజాతి భిన్నాలు కూడా అయ్యే భిన్నాలు ఉండవు అని రఫీ అన్నాడు. మీరు అతనితోన ఏకీభవిస్తారా? మీ సమాధానానికి తగిన వివరణ ఇచ్చి సమర్ధించండి?

– పటచిత్రం కన్నా కమ్మీ రేఖాచిత్రం ఏవిధంగా మెరుగైనదో కారణాలు చెప్పండి?

పైన తెలిపిన కృత్యాలు వంటివి ఉపాధ్యాయుడు తరగతిగదిలో ఉపయోగించడం ద్వారా విద్యార్థులలో సమర్ధనాత్మక వివేచనను పెంపొందించవచ్చు.

ఊహాత్మక గణిత వివేచన :

గణిత పరిశోధనలు మరియు గణిత సమస్య సాధనల్లో వినియోగించే పద్ధతులలో ఊహాత్మక గణిత వివేచన ఒకటి. ఒక వాక్యము లేదా ప్రవచనాన్ని సత్యమో లేదా అసత్యమో నిరయించాల్సిన సందర్భంలో ఒక్కొక్కసారి ఊహాత్మక ప్రతిపాదనలు చేయవలసి వస్తుంది. అయితే ఈ ప్రతిపాదనలు ఆధారం లేనివి మాత్రం కావు. గణితపరమైన ప్రతిపాదనలు ఆధారం లేనివి మాత్రం కావు. గణితపరమైన ప్రాతిపదికలను ఆధారంగా చేసుకొని ఇచ్చి సమస్య లేదా ప్రవచనాన్ని పరిశీలించి ఫలితాన్ని ఊహించటం జరుగుతుంది. ఈవిధమైన ఊహాత్మక ప్రతిపాదనలు, సరిచూడడం గణిత వివేచనకు పునాదిగా నిలుస్తాయి. ఒక విద్యారి&ధ 91 ప్రధానసంఖ్య అని ప్రతిపాదన చేసాడు. ఇది అతని ఊహాత్మక ప్రతిపాదన (91 ఒక ప్రధానసంఖ్య) అనేది పూర్తిగా ఆధారరహితమైన విషయం కాదు. విద్యార్థికి ప్రధానసంఖ్యలు – వాటి ధర్మాలు, ప్రధానసంఖ్యలను గుర్తించడం ఎలాగో తెలుసు. కాని ఏవిధమైన పరిశీలన ద్వారా లేదా పరీక్ష చేయకుండా 91ని ప్రధానసంఖ్య అని ప్రతిపాదించాడు. ఆ తరువాత 91ని 2,3,5 మరియు 7లతో భాగించగా 7 నిస్సేషంగా 91ని భాగిస్తుందని గుర్తించాడు. అంటే 91ని 7 కారణాంకం అయింది. కాబట్టి 91 ప్రధానసంఖ్య కాదు. కాబట్టి 91 ప్రధానసంఖ్య అనే ఊహాత్మక ప్రతిపాదన తప్పు.

ఒక ఊహాత్మక ప్రతిపాదన తప్పు అయినంత మాత్రాన ఊహాత్మక ప్రతిపాదనలన్నీ తప్పు అవుతాయని నిర్ధారించటం సరికాదు. ఇంతకు ముందు తీసుకున్న ఉదాహరణలో ప్రతిపాదన ఏదనైనప్పటికీ విద్యార్థి కొన్ని గణిత నియమాలను పరిశీలించడం గణిత ప్రక్రియలను చేయటం జరిగింది. దీనివల్ల అతనిలో గణిత భావాల పునర్బలనం జరిగింది. అంటే అప్పటిదాకా తాను నేర్చుకున్న గణితాంశాలను విద్యార్థి మరొకసారి గుర్తుకు తెచ్చుకున్నట్లయింది. అంతిమ ఫలితంగా ఊహాత్మక ప్రతిపాదన సత్యం కాక పోయినప్పటికీ అతడు చేసిన ప్రయత్నం దోషం కాదు. అతని ఊహ కూడా దోషం కాదు.

కత్యం :

రెండంకెల ఒక ప్రధాన సంఖ్యను తిప్పిరాయగా వచ్చిన సంఖ్య కూడా ప్రధాన సంఖ్యే అవుతుందో ఊహించండి. నిష్పత్తికి, అనుపాతానికి గల సంబంధాన్ని ఊహించి రాయండి

పై కత్యాలు వంటివి తరగతిగదిలో వినియోగిస్తే విద్యారు&ధలు ఊహాత్మక గణిత వివేచనను అభివృద్ధి చేయవచ్చు.

సాధారణీకరణ గణిత వివేచన :

నూతన విషయాలు / భావనలు సాధించటం గణిత వివేచనలోని ప్రముఖ విధానాల్లో సాధారణీకరణం ఒకటి. గణితంలోని సూత్రాలు, సిద్ధాంతాలు చాలా వరకు సాధరణీకరణం ద్వారా ఏర్పడినవే. సాధరణీకరణలో పరిశీలన ప్రధానాంశంగా ఉంటుంది. ఒక విషయాన్ని సాధరణీకరణం చేసేటప్పుడు దాని గురించి సమగ్రంగా పరిశీలించిన తరువాతనే సాధరణీకరించాల్సి ఉంటుంది. దైనందిన జీవితంలోని అనేక అంశాలకు ఈ దృగ్విషయాలను అన్వయించవచ్చు.

ఉదాహరణకు 6వ తరగతి విద్యార్థులు "లెక్కలు బాగా చేస్తారు'' అని సార్వత్రీకరణం చేయాలి అంటే 6వ తరగతి విద్యార్థులందరినీ సూక్ష్మంగా పరిశీలించిన తరువాతనే ఈ ప్రకటన చేయాల్సి ఉంటుంది. అదేవిధంగా చతురస్రంలోని కర్ణాలు పరస్పరం సమద్విఖండన చేసుకుంటాయి. అనే నియమానన్ని ప్రకటించటం సాధారణీకరణం ద్వారా మాత్రమే సాధ్యమవుతుంది. వివిధ కొలతలు గల కొన్ని చతురస్రాలను, వాటి కర్ణాలశ్రీను పరిశీలించి అన్ని చతురస్రాలలోని కర్ణాలు పరస్పరం సమద్విఖండన చేసుకున్నట్లు మన పరిశీలనలో నిరూపితమైతే అపుడు చతురస్రంలోని కర్ణాలు పరస్పరం సమద్విఖండన చేసుకుంటాయి. అని సాధారణీకరణం చేయాలి. అంటే పరిశీలన, సాధారణీకరణానికి ఆధారంగా నిలుస్తుందని చెప్పవచ్చు. త్రిభుజంలోని మూడు కోణాలు మొత్తం 108^0 అని చెప్పటానికి రకరకాల త్రిభుజాలను తీసుకుని వాటి కోణాలను పరిశీలించి వాటటి మొత్తం 08^0 అవుతుందో లేదో పరిశీలిస్తాం. ఈవిధమైన పరిశీలనల ద్వారా సాధారణీకరణం చేయటం గణిత వివేచనలో అంతర్భాగం అవుతుస్తుంది. అయితే పరిశీలన చేసే విషయంలో కొన్ని జాగ్రత్తలు తీసుకోవాలి. లేకపోయినట్లయితే సాధారణీకరణలో తప్పులు దొర్లే అవకాశం ఉంటుంది. ఎంచుకున్న జ్యామితీయ పటాలకు కొలతలు తీఃసుకోవటం, గ్రాఫ్ కాగితం వమీద గడులను లెక్కించటం వంటి సందర్భాలలో సాధారణంగా పొరపాటు జరిగే అవకాశం ఉంది. ఉపాధ్యాయుడు విద్యార్థుల చేత పరిశీలన చేయించేటప్పుడు విద్యార్థులకు ముందుగా తగిగిన సూచనలు ఇవ్వాలి.

కృత్యం :

- ప్రతి దీర్ఘచతురస్రం ఒక సమాంతర చతుర్భుజమైంది. కానీ ప్రతీ సమాంతర చతుర్భుజం ఒక దీర్గచతురస్రమేనా? పరిశీలించి సాధారణీకరించండి ?
- బీజగణితంలోని సర్వసమానత్వ సూత్రాలలో ఏదైనా ఒక సూత్రాన్ని సాధారణీకరించండి?

ఆగమన వివేచన :

ఆగమన గణిత వివేచన అనేది సహజ జ్ఞానానికి చెందినది. అనేక సందర్భాల్లో ఒక భావన లేదా విషయం సత్యమైనదో అన్ని సందర్భాలకు సత్యం అని భావింటమే ఆగమన గణిత వివేచన. మరియొక విధంగా చెప్పాలంటే ఒక నిర్ధిష్ట విషయంలో గణిత భావనలు లేదా ప్రక్రియ స్పష్టపరిస్తే అది సాధారణ విషయాలలో కూడా అదేభావన స్పష్ట పరచటమే ఆగమన గణిత వివేచన.

ఉదాహరణకు :

మధ్యమం ఎక్కట ఉంటుంది ? తెలుగు, హిందీ, ఇంగ్లీషు పాఠ్యాంశాలలో అనిల్, అమర్, ఆంటోని, ఇందర్ పొందిన మార్కుల వివరాలు కింది విధంగా ఉన్నాయి.

	తెలుగు	హిందీ	ఇంగ్లీషు
అనిల్	15	8	10
అమర్	10	10	12
ఆంటోని	11	6	11
ఇందర్	12	12	13

ప్రతి సబ్జెక్టులోను విద్యార్థులు పొందిన సరాసరి మార్కులను గణిద్దాం.

తెలుగు

$$\text{A.M.} = \frac{15+10+11+12}{4} = \frac{48}{4} = 12$$

అత్యధిక మార్కులు = 15

అతితక్కువ మార్కులు = 10

మధ్యమం = 12

హిందీ

$$\text{A.M.} = \frac{8+10+6+12}{4} = \frac{36}{4} = 9$$

అత్యధిక మార్కులు = 12

అతితక్కువ మార్కులు = 6

మధ్యమం = 9

ఇంగ్లీషు

$$\text{A.M.} = \frac{10+12+11+13}{4} = \frac{46}{4} = 11.5$$

అత్యధిక మార్కులు = 13

అతితక్కువ మార్కులు = 10

మధ్యమం = 11.5

పై ప్రతి సందర్భంలోనూ 'అంకగణిత మధ్యమం' విలువ అత్యధిక అతితక్కువ విలువల మధ్యే ఉందా? నిజం కదూ!

అంకగణిత మధ్యమం ఎల్లప్పుడు అత్యధిక, అతితక్కువ పరిశీలనా విలువల మధ్యే ఉంటుంది అనే విషయాన్ని రాబట్టవచ్చు.

ఈవిధంగా అనేక సందర్భాలను పరిశీలించి ముగింపు రాబట్టటమే ఆగమన గణిత వివేచన.

కృత్యం :-

$2^2 x 2^5 = 2^7$

$3^3 x 3^3 = 3^5$

$4^2 x 4^8 = 10^{10}$

పై మూడు సందర్భాలను పరిశీఇంచి సాధారణీకరణ సూత్రాన్ని రాయండి.

నిగమన గణిత వివేచన :

స్వీకృతాలు / సూత్రాలపై ఆధారపడి ఉన్న వివేచన. సాధారణ విషయాలలోకూడా ఒక భావన స్థిరం / సత్యం అయితే నిర్ధిష్టంలో కూడా సత్యమవటాన్ని నిగమన గణిత వివేచన అంటారు. సమస్య సాధనలకు ఉ పయోగపడే గణిత వివేచన ఇది. విద్యార్థుల పూర్వజ్ఞాన ఆధారంగాకాక అప్పటికప్పుడు కలిగిన జ్ఞాన సముపార్జన ద్వారా సమస్య సాధనను చేసే ప్రయత్నం ఇది. ఒకే విషయంలో చెప్పాలి అంటే విద్యార్థికి సూత్రం ఎలా వచ్చిందో సంబంధం లేదు. ఆ సూత్రం సమస్య సాధనకు ఉపయోగపడి విలువలను ప్రతిక్షేపించి తద్వారా ఫలితాలను రాబట్టడమే ప్రధాన ధ్యేయం.

ఉదాహరణకు : ఒక వృత్త వ్యాసార్థము 14 సెం.మీ. అయిన ఆ వృత్త వైశాల్యం ఎంత ?

వృత్య వైశాల్యము $= \pi r^2$

$$= \frac{22}{7} x14x14$$

$$= 22x2x14$$

$$= 44x14 = 616$$ చ.సెం.మీ.

ఈ వివేచన అత్యధికంగా విద్యార్థులు పోటీ పరీక్షలలో విజయం సాధించటానికి ఉపయోగపడుతుంది. విద్యార్థులకు ఆలోచనా శక్తిని పెంచే సామర్థ్యం ఈ వివేచనకు లేదు.

కృత్యం :-

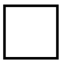
- ఒక దీర్ఘచతురస్రం పొడవు 50 సెం.మీ., వెడల్పు 20 సెం.మీ. అయిన దాని వైశాల్యం ఎంత ?
- 4 మీ. పొడవు, 68 సెం.మీ. వెడల్పు గల ఒక దీర్ఘ చతురస్రం యొక్క వైశాల్యము చ.సెం.మీ. లలో కనుగొనుము.

జ్యామితీయ మరియు బీజగణిత ఆలోచనల ద్వారా గణిత వివేచన :-

నేటి విద్యా ప్రణాళికలో పొందు పరచబడిన విద్యా ప్రమాణాలలో గణిత వివేచన కూడా ఉంది. గణిత వివేచన విద్యార్థులలో అలవరచడానికి ఎ.పి.ఎస్.సి.ఎఫ్., ఎన్.సి.ఎఫ్.లు సూచించినట్లుగా గణిత పాఠ్యపుస్తకాలలో అన్ని విద్యాప్రమాణాలకు సంబంధించిన భావనలను, ఆ భావనలను మూల్యాంకనం చేసేవిధంగా తగు ప్రశ్నలను రూపొందించటం జరిగింది. వీటిద్వారా విద్యార్థులలో గణిత వివేచనా సామర్థ్యాన్ని అభివృద్ధి చేయవచ్చు. నేటి సమాజంలో ఉపాధ్యాయుడు బోధన ఒకటే లక్ష్యం కాదు. విద్యార్థులలో సమగ్రాభివృద్ధిని తీసుకురావటం కూడా లక్ష్యమే. అందుకు అనుగుణంగా విద్యార్థులకు తగిన కృత్యాలను ఏర్పాటు చేసి వారు ప్రతీ విషయాన్ని ఎందుకు, ఏమిటి, ఎలా అనే ఆలోచనల ద్వారా వారిలో వివేచనా సామర్థ్యాలను పెంపొందించటానికి ప్రయత్నిస్తున్నారు.

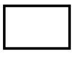
మొదటగా జ్యామితీయ భావనలకు వేస్తే విద్యార్థి మొదటగా ఆకారాలను తెలుసుకొని వాటి పేర్లను తెలుసుకుంటాడు.

దీర్ఘ చతురస్రం

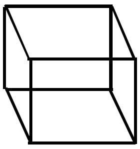

చతురస్రం లాంటివి తరువాత

వాటిని పోలిన ఆకారాలను తన చుట్టూ ఉన్న పరిసరాలలో గమనిస్తాడు.

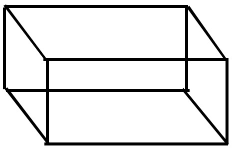
పుస్తకంలోని కాగితం


50-50 బిస్కెట్ లాంటివి

తరువాత తరగతులు పెరిగే కొద్దీ



సమఘనం



దీర్ఘఘనం లాంటి పటాలను తెలుసుకుంటాడు.

తాను ఆడుకునే వస్తువులలో రూబిక్ క్యూబ్, పాచిక లాంటివి సమఘూన్ని పోలి ఉంటాయని, పుస్తకం, అగ్గిపెట్టె లాంటివి దీర్ఘఘనాన్ని పోలి ఉంటాయని తెలుసుకుంటాడు. తద్వారా వాటి పరిణామాల ఆధారంగా సూత్రాలను ఉపయోగించి సమస్యలను సాధించటానికి ప్రయత్నిస్తాడు. ఈవిధంగా విద్యార్థులలో ప్రాథమిక స్థాయినుండే ప్రాథమికోన్నత స్థాయికి గణిత వివేచన జరుగుతుంది.

కృత్యం :

- శంఖువు ఆకారం పోలిన వస్తువుల పేర్లను వ్రాయండి.
- సమఘనం మరియు చతురస్రాలు సమానమైన ఆకారాలు కలిగిన పటాలో కాదో తెలపండి.

బీజగణితం :

విద్యార్థులకు ప్రాథమిక భావనల ఆధారంగా తెలియని అవ్యక్త రాశులను తెలుసుకోవటానికి చరరాశులను ఉపయోగించటం ప్రథమంగా నేర్చుకుని వాటిలో సంకలన, వ్యవకలన ప్రక్రియలను విద్యార్థి అధ్యయనం చేస్తాడు. నేటి మన విద్యా ప్రణాళికలో ఈ ప్రక్రియలు మనకు 6వ తరగి నుంచే పరిచయం చేయబడ్డాయి. బీజగణితంలోని సంకలన, వ్యవకలన ప్రక్రియలే విద్యార్థులకు తమదైనందిన జీవితంలోని సంఘటలనతో ఏకీభవిస్తూ విద్యార్థులచేత అధ్యయనం చేయించటం జరుగుతుంది.

ఉదాహరణకు :

ఒక పెన్ను ధర రూ. 7 అయిన 'n' పెన్నులు కొనడానికి సూత్రం రాయండి? అను సమస్యలో విద్యార్థుల చేత $7n$ అని జవాబు రాయబడుతుంది.

అంటే పిల్లలకు తెలియని రాశులను కనుక్కోవటానికి సూత్రాలు ఏవిధంగా రూపొందించాలో రాయడం ఈ అధ్యయనం ద్వారా తెలియజేయబడుతుంది.

కృత్యం :

- ప్రతి విద్యార్థికి 6 పెన్సిళ్ళ చొప్పున ఉపాధ్యాయుడు పంచాడు. తరగతిలో విద్యార్థుల సంఖ్య 'z' అయిన ఉపాధ్యాయునికి ఎన్ని పెన్సిళ్ళు అవసరం అవుతాయి ?
- $x+y+z=A, x-y=B$ అయిన $A+B, A-B$ విలువలను కనుక్కోండి ?
- ఈ విధంగా విద్యార్థులకు జ్యామితీయ మరియు బీజగణిత భావాల ద్వారా విద్యార్థులలో గణిత వివేచనను రూపొందించవచ్చు.

1.6 ధృవీకరణ ప్రక్రియ

పరిచయం : విద్యార్థి నేర్చుకున్న గణిత భావనలు సిద్ధాంతాలు నిరూపణలు మొదలైన అంశాలను ధృవీకరణన ప్రక్రియ ద్వారా నిజ నిర్ధారణ చేయడం గణిత అభ్యసనలో ఒక ఉన్నత దశ సాధారణంగా ధృవీకరణ ప్రక్రియ పూర్తి కావడానికి ఎక్కువ సమయం పడుతుంది. ఒక సిద్దాంత నిరూపణను ఉదాహరణగా తీసుకున్నట్లయితే ఆ నిరూపణకు ధృవీకరించి,సార్వత్రీకరణ చేయడం విద్యార్థిలోని ఉన్నత అభ్యసన స్థాయిని నిర్ణయిస్తుంది. ధృవీకరణ ప్రక్రియలో ఇచ్చిన గణితాంశాన్ని ఒకే మొత్తంగా లేదా ఉప విభాగాలుగా చేసి ధృవీకరించడం జరుగుతుంది. ప్రశ్నించడం, ఉప నిరూపణలు తయారు చేయడం, సంబంధిత సిద్ధాంతాలు, అంశాల నిర్వచనాలను జ్ఞప్తికి తెచ్చుకొని ధృవీకరణ చేస్తున్న అంశంలో ఉపయోగించడం అంతిమంగా ఎంచుకున్న అంశాలన్ని అన్ని నియమాలు వద్ద ధృవీకరించడం జరుగుతుంది. సెల్డన్ మరియు సెల్డన్ ప్రకారం ధృవీకరణ ప్రక్రియ అనేది ఒక మానసిక ప్రక్రియ . ఒక గణితాంశాన్ని ధృవీకరించటం అంటే దాన్ని నిరూపించటమే అవుతందని వారు పేర్కొన్నారు.వాస్తవానికి ఒక గణితాంశాన్ని నిరూపణ చేయడం, నిరూపణను ధృవీకరించటం రెండు వేర్వేరు అంశాలు, నిరూపణ కన్నా ధృవీకరణ ఉన్నత స్థాయికి చెందినది కావడం నిరూపణలోని వాస్తవాలను సృష్టించడం మొదలైన లక్షణాల ధృవీకరణ ఉండడం వల్ల ధృవీకరణను కూడా ఉన్నతస్థాయి గణిత నిరూపణగా పెర్కొనడం జరిగింది. వాస్తవానికి నిరూపణలో భాగంగా ధృవీకరణ జరుగుతుంది. ఈ మొత్తం చర్చ వల్ల తేలిన సారాంశం ఏమిటంటే ధృవికరణ ప్రక్రియలో సిద్ధాంతాల నిరూపణలను ధృవనరిచే సామర్థ్యం ఉంటే సిద్ధాంతాలకు నిరూపణను ఇచ్చే సామర్థ్యం కూడా పెరుగుతుంది.అని పరిశోధనలో తేలింది. ఇప్పటికీ నిరూపించబడిన సిద్ధాంతానికి విభిన్న పద్ధతుల్లో నిరూపణలు ఇచ్చే సామర్థ్యం కూడా ధృవీకరణ ప్రక్రియ వల్ల వృద్ధి చెందుతుంది. ధవీకరణ ప్రక్రియను కింది పటం ద్వారా చూపించవచ్చు.

నిరూపణ నిర్మాణం నిరూపణ ధృవీకరణ

ఏవిధంగా నిరూపణకు ధృవీకరిస్తారు? ఉప నిరూపణల నిర్మాణ ఆవశ్యకత

గణిత సిద్ధాంతాలు / ప్రవచనాల నిరూపణ ఒక హేతువాద ప్రక్రియ ఒక సోపానం నుంచి మరొక సోపానానికి వెళ్ళే ప్రతీ సోపానాన్ని ధృవీకరించడం జరుగుతుంది. అలా చేసినప్పుడే గణిత సోపానానికి సార్వత్రకత ఏర్పడుతుంది. ఇలా గణిత సిద్ధాంతాలు ధృవీకరణ ప్రక్రియలో విద్యార్థి ప్రదర్శించే విశ్లేషణ ధోరణి అతడిలో పరిశీలన / పరిశోధనాత్మక భావాలను పెంపొందింపచేస్తుంది. ఫలితంగా విద్యార్థిలో తార్కిక ధోరణి అభివృద్ధి చెంది భావి జీవితంలో అతడికి సన్నద్ధుడిని చేస్తుంది.

ధృవీకరణ ప్రక్రియ

ధృవీకరణ ప్రక్రియ ఈ క్రింది విధంగా ఎక్కువగా ఉంది.

ధృవీకరణ ప్రక్రియ
- నియత నిరూపణలు
- అనియత నిరూపణలు
- అంతర్ బౌద్ధిక నిరూపణలు
- దృశ్య నిరూపణలు

నియత నిరూపణలు : గణిత పారిభాషిక పదాలు, గుర్తులు మరియు అమరికల ద్వారా నిరూపించే పద్ధతిని నియత నిరూపణ అంటారు. నియత నిరూపణలు తయారు చేయడానికి విద్యార్థిలో గణిత సామర్థ్యాలు అధికంగా ఉండాలి. ప్రాథమిక స్థాయి విద్యార్థులకు ఈ నిరూపణలు కష్టం అనిపించినా ప్రాథమికోన్నత స్థాయి విద్యార్థులకు ఈ నిరూపణలు అధిక్రశమ లేకుండానే నిరూపించే అవకాశం మన విద్యా ప్రణాళికలోని అంశాలు కల్పించాలి.

ఉదాహరణ : ' b ' అనేది ఒక సమఘనం, b మరియు c అనునవి రెండూ సమఘనం కావు. అయిన c అనేది ఒక సమఘనం అని నిరూపించండి.

నియత నిరూపణ : పై ఉదాహరణను నిరూపించడానికి గణిత పరిభాషిక పదాలు, గుర్తులను వినియోగిస్తారు.

c అనేది ఒక సమఘనం అని నిరూపించడానికి

దత్తాంశం ప్రకారం 'b' అనేది ఒక సమఘనం

మరియు అనేవి మరియు , కాదు అనే అంశాలను గుర్తులుగా ఉపయోగిస్తారు.

నిరూపణ

b అనునది సమఘనం

b,c సమఘనం, c సమఘనం

c అనునది సమఘనం

b సమఘనం c సమఘనం

పై విధంగా నిరూపణ చేయటానికి రాయబడిన సోపానాలు

సోపానాల వారీగా ఒక్కొక్క అంశాన్ని నిరూపించడం జరుగుతుంది.

ప్రయోజనములు :

- ప్రతీ సోపానంలో విద్యార్థి తర్కానికి సంబంధించిన నియమాలను పాటించే సామర్థ్యాన్ని పొందుతాడు.
- ఈ నిరూపణలు చేయునపుడు విద్యార్థి ప్రారంభంలోనే నిరూపణ వ్యూహాన్ని అంచనా వేస్తాడు.
- ప్రాథమికోన్నతస్థాయి విద్యార్థి నిరూపణ సామర్థ్యాన్ని అభివృద్ధి చేసుకుంటాడు.
- ఈ నియమాలలో ప్రతి సోపానాన్ని సమర్థించగల సామర్థ్యం విద్యార్థి పొందుతాడు.
- దైనందిన వ్యవహారాల్లో విద్యార్థులు మరియు తార్కాన్ని అన్వయం చేసే సామర్థ్యం సాధిస్తాడు.

అనియత నిరూపణలు :

నియత నిరూపణకు భిన్నంగా వ్యతిరేక దిశలో సాగే నిరూపణను అనియత నిరూపణ అంటారు. అనియత నిరూపణలో విరుద్ధ పద్ధతిలో నిరూపణ చేయడం జరుగుతుంది. విద్యార్థులు సాధారణంగా ఏ నిరూపణ చేయలన్నా తొలిదశలో అనియత నిరూపణల ద్వారా నిరూపణ చేయడానికి ప్రయత్నించచి విఫలం అయినపుడు మాత్రమే నియత నిరూపణలు చేయడానికి సుముఖత చూపిస్తారు. ఎలిమెంటరీస్థాయిలో చాలా వరకు సిద్ధాంతాలు అనియత నిరూపణలు ద్వారారానే నిరూపించడం జరిగింది.

ఉదాహరణ: b అనేది ఒక సమఘనం, b మరియు c అనునవి రెండు సమఘనం కావు అయిన c అనేది ఒక సమఘనం అని నిరూపించండి.

రెండవ ఉదాహరణ : ఏవైనా రెండు అంకెల లబ్ధం అంకె అవుతుంది' అనునది సంవృత ధర్మాన్ని పాటిస్తుంది. ఈ విషయాన్ని నిరూపించడానికి విరుద్ధంగా అనునది సంవృత ధర్మం పాటించదె

$3\times4=12$

3,4 అంకెలె అయిన 12 – సంఖ్య అవుతుంది.

విరుద్ధం సరియైనది కాబట్టి నిరూపణ సంపూర్ణం అవుతుంది..

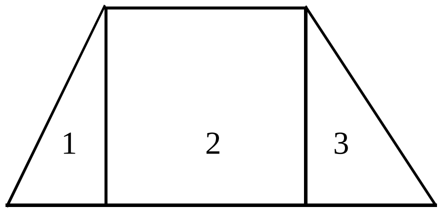
అంతర్ బౌద్ధిక నిరూపణలు

ఆదిమ మానవ దశ నుంచీ క్రంగా నాగరకుడిగా మారుతున్న క్రమంలో జరిగిన మానవ మేధోవికాసంతో పాటుగా గణిత శాస్త్ర వికాసం కూడా జరిగింది. ఇంకా చెప్పాలంటే మనిషిలోని గణిత వివేచనే అతని మేధో వికాసానికి బాటలు వేసింది. లెక్కించే ప్రక్రియలో ప్రారంభమయిన గణిత వివేచన అతని అంర్‌బుద్ధి ఆధారంగానే ముందుకు సాగింది.లెక్కించడం తరువాత తన అంర్‌బుద్ధి ఆధారంగా మరిన్ని గణితభావనలను ప్రక్రియలను మానవుడు రూపకల్పన చేశాడు. ఇవన్నీ అంతర్‌బుద్ధి జనితాలే. సహజంగా వచ్చిన జ్ఞానం ఆధారంగా చేసుకుని దానికి తన పరిశీలన దృష్టిని అన్వయం చేసిన మానవుడు బీజగణిత భావాలకు రూపకల్పన చేశాడు. క్రమంగా గణితం శాఖోపశాఖలుగా విస్తరించింది. ఈ మొత్తం ప్రక్రియ జరగడానికి మానవుని అంతర్‌బుద్ధి పునాది అని నిస్సందేహముగా చెప్పవచ్చు. నియత పాఠశాల వ్యవస్థలో మనం ఒక గణిత విషయాన్ని నిరూపించడానికి కొన్ని ఇతర గణిత భావనలను ఆధారం చేసుకుని కొన్ని ఇతర గణిత భావనలు ఆధారంచేసుకుని కొన్ని సపాలను అనుసరిస్తూ తార్కిక క్రమంలో నిరూపణ చేయడం జరుగుతుంది. ఇందుకు భిన్నంగా అంర్‌బుద్ధి ప్రక్రియలో కొన్ని గణింతాంశాలకు నిరూపణలు ఇవ్వటాన్ని మనం గుర్తించవచ్చు ఉదాహరణకు శ్రీనివాసరామానుజన్ నిరూపించిన ఎన్నో గణిత భావనలు అతని అంతర్‌బుద్ధి ఆధారంగా సాగినవే.ఇప్పటికీ కొన్ని సాంఖ్యకశాస్త్రం,సంఖ్యాశాస్త్రం తదితర గణిత విభాగాలన్నీ అంతర్‌బుద్ధి ఆధారంగానే అభివృద్ధి చేందుతున్నాయి.

దృశ్యనిరూపణలు

తరగతి గదిలో ఉపాధ్యాయుడు బోధించునపుడు బోధన అభ్యసన పరికరాలను ఉపయోగిస్తూ పాఠ్యాంశాన్ని బోధిస్తాడు. ఉపాధ్యాయుని శాబ్దిక ప్రవనచాల పరిశీలనలో విద్యార్థి నిరూపణలను చేయగల సామర్థ్యం పొందగలిగేలా చేయడం దృశ్యనిరూపణల ప్రధాన లక్ష్యం.

ఉదాహరణ : ఒక సమలంబ చతుర్భుజ వైశాల్యం తెలియచెప్పాలి అనునపుడు సమలంబ చతుర్భుజ వైశాల్యం = రెండు లంబకోణ త్రిభుజాల వైశాల్యం + దీర్ఘచతురస్రవైశాల్యం. అని చెప్పవచ్చు.



ఉపాధ్యాయుడు ఏ శాబ్ధిక ప్రవచనాలను ఉపయోగించకుండా సమలంబ చతుర్భుజ నమూనాను పై విధంగా తయారు చేసి విద్యార్థులు తమంతట తాముగా సమలంబ చతుర్భుజ వైశాల్య సూత్ర సమీకరణాన్ని పైన తెలిపిన విధంగా చెప్పేటట్లు ప్రేరేపించాలి అన్నమాట. తద్వారా విద్యార్థులలో పరిశీలన, అన్వేషణలాంటి సామర్థ్యాలను ఈ నిరూపణ ద్వారా వెలికి తీయవచ్చు.

1.7. నిర్మాణాత్మక వాదము – గణిత అభ్యసన :

1.7.0 పరిచయం :

అభ్యసనము క్రియాత్మకమైనది. ఇందులో విద్యార్థులు తమ పూర్వజ్ఞానం ఆధారంగా నూతన భావాలను నిర్మించుకుంటారు. విద్యార్థి సమాచారాన్ని ఎంపిక చేసుకోవటం, పరికల్పనలను నిర్మించటం, నిర్ణయాలను తీసుకోవటం తదితర ప్రక్రియ అంతా జ్ఞాన నిర్మాణంపై ఆధారపడి జరుగుతుంది. జ్ఞాననిర్మాణం అనుభవాలకు అర్థాన్ని కల్పిస్తుంది. సోక్రటీస్ కూడా జ్ఞాననిర్మాణానికి అధిక ప్రాధాన్యత ఇచ్చేవారు. సోక్రటీస్ ప్రకారం అభ్యసన విధానంలో బోధకుడు, విద్యార్థి ఇద్దరూ క్రియాత్మకంగా పాల్గొనాలి. బోధకుడు,విద్యార్థి అవగాహన స్థాయికి అనుగుణంగా సమాచారాన్ని అందజేయాల్సి ఉంటుంది. ఇలా అందుకున్న సమాచారాన్ని విద్యార్థి గత అనుభవాల ఆధారంగా నూతన అంశాలను నేర్చుకునేందుకు ఉపయోగించుకుంటాడు. పాఠ్య ప్రణాళిక కూడా ఈ విధానానికి ప్రాధాన్యత నిస్తూ సర్పిలాకార పద్ధతిలో రూపొందించాలి. బ్రూనర్ నిర్మాణాత్మక సిద్ధాంతం జ్ఞాన అధ్యయనంపై ఆధారపడి ఉంది. Going Beyond Informantion Given" (1973) అనే గ్రంథంలో బ్రూనర్ తన నిర్మాణాత్మక సిద్ధాంతాన్ని సోదాహరణంగా వివరించారు. గణితం, సామాజిక శాస్త్రాల కార్యక్రమాల రూపకల్పనలను బ్రూనర్ సోదాహరణంగా తీసుకున్నాడు.

1.7.1. నిర్మాణాత్మకవాదం – సూత్రాలు :

1. విద్యార్థి విషయాన్ని ఇష్టంగా, సమర్థతతో అభ్యసనం చేయటానికి వీలుకల్పించే అనుభవాలతో బోధన సంబంధం కలిగి ఉండాలి.
2. విద్యార్థి సులువుగా గ్రహించేలా, బోధన జరిగేలా విద్యాప్రణాళిక రూపొందించబడాలి.
3. బహిర్వేశనం (Extrapolation) లేక ఖాళీలను పూరించు (Fill in the gaps) ఆటలను అందచేసే విధంగా బోధనా పథక రచన జరుపబడాలి.

అభ్యసన లక్షణాలు :

- విషయానికి సంబంధించిన వివిధ దృక్పధాలు తెలియజేయబడతాయి.
- భావాలకు సంబంధించిన బహుళ దృక్పధాలు అందజేయబడతాయి.

- అభ్యసనాన్ని నియంత్రించడంలో విద్యార్థి ముఖ్యపాత్ర వహించాలి.
- జ్ఞాన పునరుత్పత్తికి కాకుండా జ్ఞాన నిర్మాణానికి ప్రాముఖ్యత ఇవ్వాలి.
- అభ్యసన సందర్భాలు, నైపుణ్యాలు, విషయం, కృత్యాలు ఒకదానితో ఒకటి సంబంధం కలిగిఉండాలి.
- ప్రామాణికత, వాస్తవిక, ప్రాపంచిక క్లిష్టతలను దత్తాంశ ప్రాథమిక వనరుల నుంచే స్వీకరించాలి.
- ఉన్నత స్థాయి ఆలోచనా నైపుణ్యాలు, లోతైన అవగాహనకు స్థానం కల్పించాలి.
- జ్ఞాననిర్మాణ ప్రక్రియలో విద్యార్థి యొక్క గతజ్ఞానానికి, నమ్మకాలకు, వైఖరులకు సముచిత స్థానం ఇవ్వాలి.

1.7.2. నిర్మాణాత్మకవాదం – బోధనా వ్యూహాలు :

- ప్రామాణికమైన సమస్యలను విద్యార్థులకు అందజెయ్యాలి. అవి వారిలో తక్కువస్థాయిలో తత్తరపాటు కలిగించాలి.
- విద్యార్థులు సమస్యలు/ప్రశ్నలు వారిని అడుగుతూ వారు ముందుండే అవకాశాలివ్వాలి.
- విద్యార్థులు తమస్వంత విధానంలో సమస్యలను సాధించటానికి ప్రయత్నించేలా ప్రోత్సహించాలి. వారిని పరిశీలిస్తూ ఫలితాలను మూల్యాంకనం చేయాలి. తగినరీతిలో సమస్యగూర్చి విద్యార్థులు ఆలోచించేలా ఉపాధ్యాయులు ప్రశ్నించాలి.
- విద్యార్థుల ప్రశ్నలకు సమాధానాలు చెప్పడం ద్వారా తమ హేతువాదాన్ని మాటలలోకి మార్చడం, తమ అభిప్రాయాలను, సాధనాలను, వ్యూహాలను ఉపాధ్యాయులతోను, ఇతరులతోను పంచుకునేలా వారికి సహాయం చేయాలి.
- విద్యార్థులకు వారి అభిరుచుల ఆధారంగా భావనలను ఎంపిక చేసుకునే అవకాశం ఇవ్వాలి.
- సమవయస్కుల అభ్యసనం, సహకార అభ్యసనం, సామూహిక అభ్యసనాలను ఉపయోగించాలి.

1.7.3. ప్రయోజనాలు :

- విద్యార్థులలో ఆలోచనా, వివేచన, ముగింపులకు స్థానం కల్పిస్తుంది.
- విషయ ఆవిష్కరణకు ప్రత్యేకమైన స్థానం ఉంది.
- గణిత అభ్యసనలో విద్యార్థికి అనుకూల ప్రభావాన్ని చూపిస్తుంది.
- సహకార అభ్యసనం, సామూహిక అభ్యసనాలను ప్రోత్సహిస్తుంది.
- విద్యార్థిలో గణన నైపుణ్యాలు పెంపొందింపబడతాయి.
- సమస్యా సాధన వల్ల విద్యార్థిలో భావనిర్మాణం జరుగుతుంది. తద్వారా నిత్య జీవిత సమస్యలను సులబంగా పరిష్కరించుకునే నైపుణ్యం విద్యార్థికి కలుగుతుంది.
- విద్యార్థి కొత్త విషయాలను ఆసక్తిగా, ఉత్సాహంగా నేర్చుకుంటాడు.
- ఈ పద్ధతిలో "మొత్తం నుంచి భాగాలు" అనే విధానంలో అధ్యయనం చేయుట ద్వారా అభ్యసన మనోవైజ్ఞానిక సూత్రాల అనుగుణంగా జరుగుతుంది.
- విద్యార్థి జ్ఞానం కోసం నిశ్చయింపబడిన వాడిగా ఉంటాడు.
- విషయం పట్ల సందేహాలు విద్యార్థికి కలుగవు.

1.7.4. పరిమితులు :

- భావన నిర్మాణానికి తగిన పునాది ఇవ్వటంలో ఉపాధ్యాయుడు విఫలమైతే విద్యార్థిలో నిరుత్సాహం, విషయం పట్ల అసత్యభావం కలుగుతుంది.
- జ్ఞాన నిర్మాణానికి అధికసమయం అవసరమవుతుంది.
- అతితక్కువ సంఖ్యలో విద్యార్థులు ఉండే తరగతులకు మాత్రమే ఈ విధానం తగినది.
- అధిక సంఖ్యలో విద్యార్థులు ఉంటే ఉపాధ్యాయుడు వ్యక్తిగత శ్రద్ధ చూపించలేడు.
- ప్రతి విద్యార్థిలోనూ భావన నిర్మాణం జరుగుతుందని నిర్ణయించటం అసాధ్యం.
- పరిపక్వం చెందని విద్యార్థి ఎక్కువ ఇబ్బందులు ఎదుర్కోవలసి ఉంటుంది.

కృత్యం :

గణిత అభ్యసనలో నిర్మాణాత్మక వాదాన్ని, ఉపాధ్యాయ విద్యార్థిగా నీవు ఏవిధంగా ఉపయోగిస్తావో మీతోటి అభ్యాసకులతో చర్చించి నివేదికను తయారు చేయుము.

1.8. గణితశాస్త్ర చరిత్ర

గణితాన్ని దాని చరిత్ర నుంచి విడగొట్టే ఏ ప్రయత్నం వల్లనైనా ఏ శాస్త్రము ఇట్టి ప్రయత్నాల వల్ల గణితం నష్టపోయినంతగా తాను నష్టపోదు.

1.8.0. పరిచయం :

అనాదిగా మానవ జీవితావసరలను తీర్చటానికి సహకరించేదిగా గణితం రూపొందుతూ వచ్చింది. దీంతో పాటు మానవ నాగరికత అభివృద్ధి చెందటానికి కూడా గణితం సహాయపడుతూ వచ్చింది. ఇంకా చెప్పాలంటే, ఆదిమ సమాజంలో జరిగిన గణితశాస్త్ర అభివృద్ధే ఆ సమాజం అన్ని విధాలుగా అభివృద్ధి చెందటానికి ఆసరాగా నిలిచింది. అందుకనే ఒక దశ అభివృద్ధిని అంచనా వేయాలంటే ఆ దేశంలో జరిగిన గణితశాస్త్ర అభివృద్ధిని పరిశీలిస్తే సరిపోతుందని నెపోలియన్ పేర్కొన్నాడు.

నాగరికత పరిణామక్రమంలో ఆదిమ మానవుడు పశువులను, మచ్చిక చేసుకుని, వాటిని పెంచటం ప్రారంభించాడు. వాటిని మేతకోసం వదిలినపుడు ఎన్నింటిని పంపిస్తున్నది గుర్తు పెట్టుకునేందుకు ఒక్కో పశువుకు గుర్తుగా ఒక్కోరాయిని కేటాయించి, ఆ రాళ్ళ కుప్పను తనవద్ద ఉంచుకునేవాడు. తిరిగివచ్చిన పశువులను గుర్తించే ప్రక్రియలో, ఒక్కో పశువుకు గుర్తుగా ఒక్కోరాయిని కుప్ప నుంచి వేరు చేసేవాడు. ఇలా చేసి కుప్పలో మిగిలిన రాళ్ళ ఆధారంగా, అన్ని పశువులు తిరిగి వచ్చినది / లేనిది గుర్తించేవాడు. ఒకవేళ పశువుల సంఖ్య ఎక్కువగా ఉంటే, వాటిని సమూహాలుగా విడకొట్టడం ద్వారా లెక్కించేవాడు. ఈవిధంగా తనకు తెలియకుండానే మనిషి లెక్కించటం, సమూహాలు, సమితిలు, అన్వేక సంబంధాలు వంటి గణిత భావనకు రూపకల్పన చేశాడు.

ఇప్పటికీ గ్రామప్రాంతాల్లో పండ్లు, కాయలను ఒక చేయి (5), రెండు చేతులు (1), మూడు చేతులు (15), కుచ్చి (4), కట్టు (8) మొదలగు పదాలతో సమూహాలుగా లెక్కించే అలవాటు ఉంది. అలాగే జతలు, డజన్లుగా కూడా వస్తువుల్ని లెక్కించటం జరుగుతోంది.

ఇలా లెక్కించటంతో ప్రారంభమైన గణన పద్ధతులు క్రమంగా 'సంఖ్య' అనే భావనకు దారి తీసాయి. ఎప్పుడైతే సంఖ్యలకు సంబంధించిన భావనలు రూపుదిద్దుకున్నాయో, క్రమంగా 'లెక్కించే ప్రక్రియలో' అనేక విధానాలు ఏర్పడ్డాయి.

మొదటగా తన అవసరాలు తీర్చటానికి, తద్వారా ప్రకృతిని అర్థం చేసుకుని, దాన్ని తన అవసరాలకు ఉపయోగించటానికి మానవుడు గణితశాస్త్రాన్ని అభివృద్ధి పరిచాడు. తద్వారా గణితం మానవుడు కల్పించిన, సృష్టించిన మహోన్నతమైన శాస్త్రమని స్పష్టమవుతోంది.

ప్రాచీన నాగరికత – గణితం :

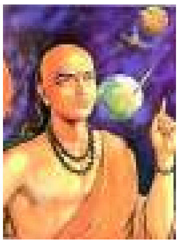
గణితంలో నూతన ఫలితాలను అవగాహన చేసుకోవటానికి సాధారణంగా పూర్వ ఫలితాలపై అవగాహన కలిగి ఉండాలి. గణితంలోని భావనలు ఒకదానిపై మరొకటి ఆధారపడి ఉంటాయి. కాబట్టి మనకు గణితశాస్త్రం క్రమపద్ధతిలో ఉండే అనేక భావనల కూర్పు అవుతుంది.

మానవ నాగరికతకు అద్దము వంటిదిగా భావింపబడే గణితశాస్త్రంలోని విశేషాలు, స్వభావం, ఉపయోగం, గణితశాస్త్రజ్ఞుల కృషి మొదలైనవి తెలిపే గణితశాస్త్ర చరిత్ర అధ్యయనం ఎంతో అవసరం. ప్రాచీన నాగరికతలు ఎన్ని ఉన్నా అందులో ముఖ్యంగా సుమేరియన్, బాబిలోనియన్, ఈజిప్టు, గ్రీకు, చైనా, హిందూనాగరికతలలోనే గుర్తించదగిన స్థాయిలో గణితం అభివృద్ధి చెందింది. సుమేరియన్లు షష్ట్యంశమాన పద్ధతి, ఏకాంక భిన్నాలు, దీర్ఘచతురస్ర వైశాల్యం, π విలువ మరియు కొన్ని ఖగోళ శాస్త్ర విషయాలు పేర్కొనగా, బాబిలోనియన్లు సంఖ్యావాదం, వర్గ సమీకరణాలు సాధించగల్గే అంకగణితజ్ఞానం ప్రదర్శించారు. ఈజిప్టియన్లు వైశాల్యంకు సంబంధించి సమస్యలు – సాధనలు, 2 లవముగా భిన్నాలు, స్థూపం, దీర్ఘఘనం పరిమాణలు, పిరమిడ్ వంటి కొలతలు, π విలువ 3.1605 మొదలైనవి సాధించారు.

గ్రీకులు తమ పూర్వీకుల నుండి గణితజ్ఞానం పొందినప్పటికీ వారివలేగాక హేతువాద పద్ధతులలో గణితాన్ని అభివృద్ధి పరిచారు. థేల్స్‌తో ప్రారంభమై అనాక్సగోరస్ వరకు సుమారు వంద సంవత్సరాలు కొనసాగిన అయోనిక్ పాఠశాల, పైథాగరస్‌తో మొదలై సుమారు రెండు వందల సంవత్సరాలు కొనసాగిన పైథాగరియన్ పాఠశాల, ఏథెన్స్ ప్రధానకేంద్రంగా సోఫిస్ట్ పాఠశాల, అలెగ్జాండ్రియా కేంద్రంగా ప్రసిద్ధి పొందిన అలెగ్జాండ్రియన్ పాఠశాలలు, గ్రీకు గణితానికి స్థావరాలు. చైనా నాగరికత కేలండర్ సమస్యలు, క్షేత్రమితి, నవవిభాగ అంకగణిత పద్ధతులు, లెక్కించు చువ్వలు మొదలగు గణితాంశాలను సాధించింది.

హిందూ నాగరికతకు ప్రాతిపదిక అయిన వేదాలలో కాలగణన, 10^{12} వరకు సంఖ్యలు, దీర్ఘవృత్తం మొదలగు అంశాలు, వేదాంగ జ్యోతిష గ్రంథాలలో కాలగణన, శుల్బ సూత్రాల్లో రేఖాగణితం, జ్యామితీయ నిర్మాణాలకు సంబంధించిన వివరాలు విస్తారంగా ఉన్నాయి. తరువాతి కాలంలో జైనులు, బౌద్ధులు గణితంలో అపార కృషి జరిపారు. భారతీయ (హిందూ) గణితంలో ప్రముఖులైన ఆర్యభట్ట, బ్రహ్మగుప్త, భాస్కరాచార్యల గురించి ఈ అధ్యాయంలో తెలుసుకుందాం.

1.8.1. ఆర్యభట్ట :



ఇతడు క్రీ.శ.476, మార్చి 21న పాటలీపుత్రంలో జన్మించాడు. ప్రసిద్ధ నలంద విశ్వ విద్యాయలంలో విద్యాభ్యాసం చేశాడు. తన 23వ ఏట ఆర్యభట్టీయం అనే గణితశాస్త్ర గ్రంథాన్ని రచించాడు. ఈ గ్రంథం అత్యంత ప్రసిద్ధి పొందటమే కాకుండా, అప్పటి గుప్తరాజైన బుద్ధగుప్తుడు ఆర్యభట్ట ప్రతిభకు అబ్బురపడి, ఆయన్ను ఘనంగా సత్కరించి, నలంద విశ్వవిద్యాలయానికి కులపతిగా నియమించాడు.

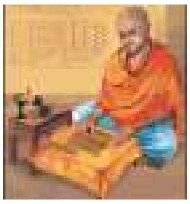
ఆర్యభట్టీయంలో మొత్తం 121 శ్లోకాలు ఉన్నాయి. ఈగ్రంథం గీతిక, గణిత, కాలక్రియ, గోల అనే నాలుగు పాదాలు (అధ్యాయాలు)గా విభజితమై ఉంది. మొదటిదైన గీతికా పాదంలో 10 శ్లోకాలు ఉండటం వల్ల 'దశగీతికాసూత్రం' అనే పేరు వచ్చింది. ఈ శ్లోకాల్లో అంకెలను సంకేతంగా అక్షరాలను ఉపయోగించి, అతి సంక్షిప్తరూపంలో రాసే విధానం భూమికి పరిభ్రమణం, దానివల్ల పగలు, రాత్రి ఏర్పడడటం, యుగాల ప్రమాణం, భూమి, సూర్యుడు, చంద్రుల వ్యాసం, గ్రహాల కాంతి నిక్షేపాలు మొదలైన అంశాలు ఉన్నాయి. గణితపాదంలోని 33 శ్లోకాల్లో దశగుణిజాలైన సంఖ్యలు, వర్గం, వర్గమూలం, క్షేత్రగణితం, ఘనం, ఘనమూలం, వృత్తం, శంఖువు, త్రిభుజం, త్రికోణమితి అంశాలు, 'సైన్' పట్టికలు, బీజగణిత భావనలు, శ్రేఢి తదితర అంశాలు ఉన్నాయి. కాలపాదంలో 22 శ్లోకాలు ఉన్నాయి. ఇందులో కాలమానం, గ్రహగతుల గురించిన వివరాలు ఉన్నాయి. గోలపాదంలో 50 శ్లోకాలు ఉన్నాయి. ఇందులో ఉత్తరాయణ, దక్షిణాయనాలు, సూర్యపరిభ్రమణ మార్గం, గ్రహాల నుంచి సూర్యుని మధ్యగల దూరం, భూమి, గ్రహాలు, కాంతి విహీనం కావటానికి గల కారణాలు, సాపేక్ష సిద్ధాంత భావాలు, గ్రహాలను లెక్కించే పద్ధతి మొదలైన అంశాలు వర్ణితమై ఉన్నాయి.

ఆర్యభట్ట గణితానికి అందించనసేవలు :

- 'సైన్'కు సంబంధించిన పట్టికలు తయారు చేశాడు.
- 'పై' ఇలువ ఉజ్జాయింపుగా 3.1416 అని మొదటిసారిగా తెలియజేసాడు.
- త్రిభుజ, వృత్తవైశాల్యాలను కనుక్కునే సూత్రాలను తెలియజేశాడు.
- అంకశ్రేఢిలో 'ఎన్' పదాల మొత్తానికి సూత్రాన్ని తెలియజేశాడు.
- $ax+by=c$ $(a,b,c$ లు పూర్ణసంఖ్యలు) వంటి అనిశ్చిత సమీకరణాలను 'కుట్టక' పద్ధతి ద్వారా సాధించాడు.
- భూమి గోళాకారంలో ఉంటుందని, అది సూర్యుని చుట్టూ భ్రమిస్తూ ఉంటుందని తెలియజేసాడు.
- దీపం ఎత్తు, దూరాలను నీడలను బట్టి లెక్కించే పద్ధతులు చెప్పాడు.

ఆర్యభట్ట ప్రతిపాదించిన 'కుట్టక' పద్ధతి నేటి కంప్యూటర్లకు ఎంతో అనువైనదని పరిశోధనలు నిరూపించాయి. ఆర్యభట్ట గణితశాస్త్రానికి చేసిన సేవలను గౌరవిస్తూ, భారతదేవం తాను ప్రయోగించిన మొదటి అంతరిక్ష ఉపగ్రహానికి 'ఆర్యభట్ట' పేరు పెట్టింది. భారతప్రభుత్వం విడుదల చేసిన రెండు రూపాయల నోటు మీద ఈ ఉపగ్రహం ఛాయాచిత్రం ముద్రితమై ఉంటుంది.

1.8.2. బ్రహ్మగుప్త :



ప్రస్తుత రాజస్థాన్ ప్రాంతంలోని భిల్లమం అనే ప్రాంతంలో క్రీ.శ. 598లో జన్మించాడు. ఇతని తండ్రి జిష్ణువు ఉజ్జయిని గణిత పరిషత్తులో గొప్పమేధావిగా అందరి ప్రశంసలు అందుకునానడు. క్రీ.శ. 628లో ఇతడు రచించిన 'బ్రహ్మ స్ఫుట సిద్ధాంతము' గణిత పరిశోధనల్లో కొత్త ఆలోచనలకు నాంది పలికింది.

బ్రహ్మస్ఫుట సిద్ధాంతం అరబ్బీ భాషలోకి "సింద్-హింద్" పేరుతో అనువాదం పొందింది. దీంతో భారతీయ గణితశాస్త్ర ప్రజ్ఞ విశ్వవిఖ్యామైంది. ఈ గ్రంథలో ప్రతిఅంశం అత్యంత వివరంగా ఉంటూ స్పష్టమైన విశ్లేషణలతో సాగుతుంది.

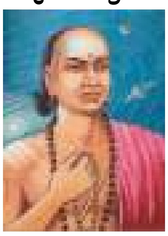
బ్రహ్మస్ఫుట సిద్ధాంతానికి ఖగోళశాస్త్రం ప్రధానభూమిక. గ్రంథంలోని 12వ అధ్యాయాన్ని 'గణిత', 18వ అధ్యాయాన్ని 'కుట్టక' పేరుతో బ్రహ్మగుప్తుడు వ్యవహరించాడు. 'గణిత' అధ్యాయంలో అంకగణితం, శ్రేఢులతో పాటు కొన్ని జ్యామితీయ అంశాల వివరణ ఉంది. 'కుట్టక' అధ్యాయం 'విశ్లేషణ'తో సాగుతుంది. బ్రహ్మగుప్తుడు రచించిన మరొక గ్రంథం 'కరణఖండ-ఖాద్యక' ఇది ఆర్యభట్ట రాసిన 'ఆర్యభట్ట సిద్ధాంతం' (ఈగ్రంథం ఇపుడు లభించటం లేదు) అనే గ్రంథానికి వ్యాఖ్యానంగా రాయబడింది. అయినప్పటికీ కొన్నిచోట్ల బ్రహ్మగుప్తుడు ఆర్యభట్ట సిద్ధాంతాలతో విభేధించి, వరాహమిహరుని విధానంలో విశ్లేషణలు చేశాడు. భూమి గుండ్రంగా ఉంది, నీటికి ప్రవహించటం ఎలా సహజగుణమో అదేవిధంగా వస్తువులను, జీవజలాలను ఆకర్షించటం భూమికి సహజగుణం అని బ్రహ్మగుప్తుడు ఈ గ్రంథంలో వివరణాత్మకంగా చెప్పాడు.

బ్రహ్మగుప్తుడు గణితశాస్త్రానికి చేసిన మేలు :

- 'a' అనేది ఒక ధన లేక ఋణరాశి అయితే $a+0=1$, $a-0=a$, $ax0=0$, $a \div 0=$అనంతం అని 'సున్న' గురించి స్పష్టమైన వివరణలను గ్రంథస్థం చేశాడు.
- అజ్ఞాతం / అవ్యక్త రాసులను 'యావత్ - తావత్' వంటి పదాలతో పేర్కొన్నాడు.
- "Numerical Analysis" వంటి అధునాతన గణిత భావనలకు సంబంధించి ప్రతిపాదికలు బ్రహ్మగుప్తుని గ్రంథంలో ఉన్నాయని విశ్లేషకులు అంచనా వేశారు.
- $ax+d=0$ అనే సామాన్య సమీకరణం, $ax^2+bx+c=0$ వర్గసమీకరణాలను సాధించాడు.
- $nx^2+1=y^2$ రూపలోని అనిశ్చిత సమీకరణాలకు / చక్రవాళ పద్ధతిలో సాధనలు ఇచ్చాడు.
- అంకగణితం, భిన్నాలు, సామన్యవడ్డీ మొదలైన అంశాలు ఇదే గ్రంథంలో ప్రస్తావించబడ్డాయి.
- సెకండ్ ఆర్డర్ డిఫరెన్స్‌లు ప్రయోగించిన మొదటి గణితశాస్త్రవేత్త కూడా బ్రహ్మగుప్తుడే.

బ్రహ్మగుప్తుడు గణితశాస్త్రాన్ని అంకగణితం, బీజగణితం అని రెండు ప్రత్యేక శాస్త్ర విభాగాలుగా గుర్తించాడు. భాస్కరాచార్యుడు బ్రహ్మగుప్తుని 'గణక చక్ర చూడామణి' అని పేర్కొన్నాడు. సమకాలీన గణిత విజ్ఞాన వేత్తలందరికన్నా అత్యంత ప్రతిభావంతుడిగా బ్రహ్మగుప్తుడు ఖండాంతరాలు దాటిన ఖ్యాతిని పొందాడు.

భాస్కరాచార్య :



భారతీయ గణితశాస్త్ర చరిత్రలో ఇద్దరు భాస్కరాచార్యులు ఉన్నారు. క్రీ.శ. 550-630 ప్రాంతంలో జీవించిన భాస్కరుడు (కేరళ ప్రాంత నివాసి) మొదటివాడు. క్రీ.శ. 1114 సహ్యాద్రి సమీపంలోని "విజ్జలవిడ" అనే గ్రామంలో జన్మించిన భాస్కరుడు రెండవవాడు . రెండవ భాస్కరుడే

భాస్కరాచార్యగా ప్రసిద్ధుడు. ఇతని తండ్రి మహేశ్వరుడు. బ్రహ్మగుప్తుని సిద్ధాంతాలతో ఉత్తేజితుడై భాస్కరుడు జీవితకాలమంతా గణిత పరిశోధనల్లోనే గడిపాడు. భాస్కరునికి జ్యోతిషశాస్త్రంలో కూడా చక్కటి ప్రతిభ ఉంది.

భాస్కరుడు తన కుమార్తె లీలావతి వివాహానికి ముహూర్త కాలాన్ని నిర్ణయించటం కోసం జలఘటికా యంత్రాన్ని తయారుచేశారు. ఆశ్చర్యంతో పరిశీలిస్తున్న ఏడేళ్ళ లీలావతి మెడలోని ముత్యాలదండలో ఒక ముత్యం జారి, ఆ యంత్రంలో పడటంతో, కాలనిర్ణయంలో తేడా ఏర్పడుతుంది. ఇది గమనించని, భాస్కరుడు యంత్రం చూపించిన సమయానికే (అదే సరైన ముహూర్తమని నమ్మి) వివాహం చేస్తాడు. యాదృచ్ఛికమో, దైవఘటనోకాని, వివాహం జరిగిన ఏడాదికే లాలావతికి భర్త చనిపోతాడు. దీంతో తీవ్రనిరాశకు గురైన భాస్కరుడు జరిగిన పొరపాటును గుర్తిస్తాడు. నిరాశతో కుంగిపోతున్న కుమార్తె గణితశాస్త్రాన్ని బోధించి, ఆమెను మామూలు మనిషిని చేస్తాడు. తాను రచించిన 'సిద్ధాంత శిరోమణి' గ్రంథంలో మొదటి భాగమైన పాటీ గణితానికి 'లీలావతి' అనే పేరుపెట్టి, కుమార్తె పేరు పెట్టి, ఆమె పేరును చరిత్రలో శాశ్వతం చేస్తాడు. లీలావతి గణితం వెనుక ఉన్న చరిత్ర ఇది అని ప్రముఖ పర్షియన్ చరిత్రకారుడు ఫైజి తెలియజేసాడు.

సిద్ధాంత శిరోమణిలో లీలావతి గణితం, బీజగణితం, గణితాధ్యాయం, గోలాధ్యాయం అనే నాలుగు భాగాలు ఉంటాయి. ఈ గ్రంథాన్ని భాస్కరుడు అతి తేలికైన భాషలో, మనోజ్ఞమైన కావ్యంగా తీర్చిదిద్దాడు. లీలావతి గణితంలో ద్రవ్యమార్పిడి, వివిధ ప్రమాణాలు, కొన్ని విదేశీ కొలతలు, 'ఏక' నుంచి పరార్థ్య (10^{17}) వరకు సంఖ్యలు, చతుర్విధ ప్రక్రియలు, వర్గ, వర్గమూల, ఘన, ఘనమూల పర్మికలు, ఋణ సంఖ్యలకు వర్గమూలాన్ని నిషేధించటం, 'సున్న'తో భాగహార్ని అంకగణితంలో నిషేధించటం, విలోమపద్ధతి, త్రైరాశికం, వడ్డీ, లాభనష్టాలు, ప్రస్తారాలు – సంయోగాలు, అంక, గుణ శ్రేఢులు, దశాంశ పద్ధతి, అనుబంధ వివరాలు మొదలైన అంశాలు వున్నాయి.

బీజగణిత విభాగంలో 213 శ్లోకాల్లో ధన, ఋణ రాశులతో వ్యవహారాలు, 'సున్న'తో పర్మికలు, సంకేత వ్యవహారాలు, కరణీయ సంఖ్యలు, కుట్టకం, రెండవ తరగతి, అనిశ్చిత సమీకరణాలు, వర్గ సమీకరణాలు, భావిత వర్గసమీకరణాలు (ఇచ్చిన సమీకరణం ఒక వర్గం అయ్యేట్లు తగిన పదాలను కలపటం / తీసివేడం ద్వారా ఏర్పడు సమీకరణాలు) మొదలైన అంశాలు ఉన్నాయి.

గణితాధ్యాయంతో గ్రహాలకు సంబంధించిన గణితాన్ని విస్తృతంగా వివరించాడు భాస్కరాచార్యుడు. గోలాధ్యాయం మొత్తం 15 భాగాలుగా ఉంటుంది. 'కరణ కుతూహలం' భాస్కరుడు రచించిన మరొక గణిత గ్రంథం. ఇందులో గ్రహాలు, వాటి గమనాలకు సంబంధించి గణనలు ఉన్నాయి.

భాస్కరాచార్య గణితానికి చేసిన సేవలు :

- 'సున్న'కు చెందిన నియమాలను భాస్కరుడు వివరించాడు.
  అంటే $a+0=0, a-0=a, a.0=0, a \div 0=$ ఖ హారం (అనంతం అని వివరించాడు)
- ప్రస్తారాలు సంయోగాలు భావనను వ్యాప్తిలోకి తీసుకువచ్చాడు.
- ఒక ధనరాశి వర్గమూలం ధన ఋణ రాశుల్లో ఏదైనా కావచ్చు. కానీ ఒక ఋణరాశి వర్గమూలం లేదని చెప్పాడు.
- బీజగణితంలో ధన, ఋణ సంఖ్యల గురించి చర్చించాడు.

- బీజగణితంలో సంజ్ఞ సంఖ్యలు, సామాన్య సమీకరణాలు, వర్గ సమీకరణాలను సాధించే పద్ధతిని వివరించాడు.
- చలనరాశులకు కీలక, నీలక వంటి పదాలు ఉపయోగించాడు.
- సామాన్య గణలలకు $\Pi = \sqrt{10}$ గా తీసుకోవచ్చని చెప్పాడు.
- బ్రహ్మగుప్తుని కంటే మరింత పరిణితిను ప్రదర్శించి $Nx^2 + 1 = y^2$ సమీకరణాన్ని చక్రవాళ పద్ధతిలో సాధించాడు.
- భూమి నీడ వల్ల చంద్రగ్రహణం, చంద్రకళలు ఏర్పడతాయని చెప్పాడు.
- ప్రతి డిగ్రీ యొక్క 'సైన్' కోణ విలువ కనుక్కొనే పద్ధతిని వివరించాడు.
- పైథాగరియన్ సిద్ధాంతానికి అనుభావిక స్వభావం ఉన్న ఉత్పత్తిని ఇచ్చాడు.
- రోత్సధీరం, డిఫరెన్షియల్ ఆఫ్ ఎఫంక్షన్ భావనలు మొదలైన కలనగణిత అంశాలు ప్రస్తావించారు.
- భూమికి ఆకర్షణ శక్తి ఉందని వివరణ ఇచ్చాడు.
- గ్రహాలు, వాటి పరిభ్రమణాలు, కాలగణనం, త్రికోణమితి సూత్రాలు, ఉత్తర, దక్షిణ ధృవాలు, గ్రహణాల విస్తరణలు మొదలైన వాటి గురించి వివరణ ఇచ్చాడు.
- స్వయంచాలిత (Automatic) మంత్రాలను పేర్కొన్నాడు.

యూక్లిడ్ :

గ్రీకు దేశానికి చెందిన యూక్లిడ్ సుప్రసిద్ధ గణిత శాస్త్రజ్ఞుడే కాక ఉత్తమ ఉపాధ్యాయుడు కూడా. ఇతని జనన కాలానికి సంబంధించి కచ్చితమైన ఆధారాలు లభించలేదు. అయితే, క్రీ.పూ. 325 ప్రాంతంలో జన్మించినట్లు చరిత్రకారులు అంచనా వేస్తున్నారు. ఏథేన్స్‌లోని ప్లాటో అకాడమీలో ఇతని ప్రాథమిక విద్యాభ్యాసం జరిగింది. అలెగ్జాండ్రియన్ విశ్వవిద్యాలయంలో యూక్లిడ్ గణిత పాఠాలు బోధించేవాడు. తన పూర్వీకులైన థేల్స్, పైథాగరస్, ప్లాటోలతో పాటు ఈజిప్టు దేశానికి చెందిన గణిత శాస్త్రవేత్తలు చేసిన కృషిని యూక్లిడ్ అధ్యయనం చేశాడు.

అప్పటివరకు ఉన్న గణిత అంశాలను ఒక క్రమపద్దతిలో అమర్చి 'ఎలిమెంట్స్' అనే పేరుతో గ్రంథాన్ని రచించాడు. నిర్వచనాలు, స్వీకృతాలు వీటిని అనుసరించి తర్కం చేత నిరూపించగలిగిన ప్రవచనాలు (సిద్ధాంతాలు) అన్నింటిని తన గ్రంథంలో విశ్లేషణాత్మకంగా వివరించాడు. కరణీయ సంఖ్యలకు సంబంధించిన అనేక సమస్యలను సాధించాడు. ప్రధానసంఖ్యలు అనంతమని తెలిపాడు.

గ్రీకు భాషలో యూక్లిడ్ రాసిన 'ఎలిమెంట్స్' గ్రంథం ప్రపంచవ్యాప్తంగా అన్ని భాషలలోకి అనువాదం పొందింది. బైబిల్ తరువాత అత్యంత ఎక్కువ ప్రతులు అమ్మకం పొందిన పుస్తకంగా 'ఎలిమెంట్స్' చరిత్ర సృష్టించింది.

యూక్లిడ్ రాసిన ఎలిమెంట్స్ గ్రంథంలో 13 భాగాలున్నాయి. మొదటి భాగంలో నిర్వచనాలు, స్వీకృతాలు మొదలైన జ్యామితికి సంబంధించిన ప్రాథమిక విషయాలు, త్రిభుజాలు, వాటి సర్వసమానత్వాలు, సమాంతర చతుర్భుజాలకు సంబంధించిన విషయాలున్నాయి. రెండో భాగంలో వైశాల్యాలు, బీజగణిత సంబంధమైన విషయలున్నాయి. నాలుగో భాగంలో అంతర్లిఖిత, పరిలిఖిత క్రమ బహుభుజులను గురించిన విషయాలున్నాయి. ఐదోభాగంలో అనుపాతానికి చెందిన అంశాలున్నాయి. ఆరోభాగంలో సరూప త్రిభుజాలకు సంబంధించిన ప్రాథమిక

సిద్ధాంతాలు, తృతీయ, చతుర్ధ, మధ్యమ అనుపాతాల నిర్మాణాలు మొదలైనవి. ఏడు, ఎనిమిది, తొమ్మిది భాగాల్లో ప్రాచీన సంఖ్యాసిద్ధాంతాలు, జ్యామితీయ భావనలతో కూడి అంకగణిత వివరాలున్నాయి. పదోభాగంలో త్రిపరిణామ జ్యామితికి చెందిన విషయాలున్నాయి.

1,3,4,6,11,12 గ్రంథాలలో ఉన్న అంశాలనే నేడు మనం పాఠశాలల్లో రేఖాగణితం పేరుతో చదువుతున్నాం. ఇతని గ్రంథం ద్వారానే పైథాగరస్ సిద్ధాంత నిరూపణ మనకు తెలిసింది. రేఖా గణితంలోని కొత్త సమస్యలకు నిరూపణలు ఇవ్వడంలో కాక, అప్పటివరకు తెలిసిన సత్యాలు, సిద్ధాంతాలు, పరిశీలనలు ఒక వ్యవస్థగా మార్చి కొత్త ఆలోచనలకు దారితీసే క్రమంలో అమర్చడంలోనే యూక్లిడ్ గొప్పతనం ఉంది.

యూక్లిడ్ రాసిన మరొక గ్రంథం 'డాటా'. ఇందులో విశ్లేషణకు సంబంధించిన అనేక పద్ధతులు ఇవ్వబడ్డాయి. రేఖాగణితానికి సంబంధించి దేనికి దానికే విడివిడిగా ఉన్న సమాచారాన్ని ఒక దానితో మరొకటి సంధాన పరచి, ఒకదాని నుండి మరొక దానికి నిరూపణలు వరుసగా వచ్చేట్లు ఒక ప్రత్యేకమైన కూర్పును యూక్లిడ్ తన పుస్తకం ద్వారా అందించాడు. దీనితో ఇతనికి ఫాదర్ ఆఫ్ జామెంట్రీ (Father of Geomentry) అనే పేరు వచ్చింది.

ఫెర్మా :

ఫెర్మా సుప్రసిద్ధ యూరోపియన్ గణిత శాస్త్రవేత్త. క్రీ.శ. 1601లో జన్మించిన ఫెర్మా న్యాయశాస్త్రాన్ని అధ్యయనం చేసి కొంతకాలం న్యాయవాద వృత్తిచేశాడు. గణితంమీద మక్కువతో తనకు పూర్వం జరిగిన గణిత పరిశోధన లన్నింటిని అధ్యయనం చేశాడు.

పైథాగరస్ సిద్ధాంతం (కర్ణం^{2} = భుజము^{2}+భుజం^{2}) నూతన ఘాతాలకు మార్చి నిరూపించడం సాధ్యమవుతుందా? అనే విషయంపై ఫెర్మా చేసిన పరిశోధనలు ప్రపంచ ప్రసిద్ధి పొందాయి.

$5^2 = 4^2 + 3^2$ కాబట్టి {3,4,5} సంపుటిని ఒక పైథాగరస్ త్రికుటి అంటారు. ఇటువంటి త్రికుటాలను ఉపయోగించి ఫెర్మా అనేక సంఖ్యా సిద్ధాంతాలను నిరూపించే ప్రయత్నాలు చేశాడు. అతని ప్రయత్నాల ఫలితంగా $n > 2$ కైనా $x^n + y^n = z^n$ కు సున్నాకాని, పూర్ణాంక సాధనలు x, y, z లు ఉండవు అనేది ఫెర్మా చివరి సిద్ధాంతంగా ప్రసిద్ధి పొందింది. ఫెర్మా తరువాత 300 సం॥లకు ఏండ్రూవెల్స్ అనే శాస్త్రవేత్త 1993లో ఫెర్మా చివరి సిద్ధాంతానికి 130 పేజీల నిరూపణను ప్రకటించాడు.

సాధారణ పరిశోధకులకు భిన్నంగా ఫెర్మాకు ఒక ప్రత్యేకమైన అలవాటు ఉండేది. తన పరిశోధనలను, వాటి ఫలితాలను ప్రత్యేక పుస్తకాలలో తాను సాధారణంగా చదివే పుస్తకాలలో ఉండే ఖాళీ ప్రదేశంలో రాసేవాడు.

ఇదే తీరులో ఫెర్మా తన చివరి సిద్ధాంత నిరూపణ విషయాన్ని కూడా తాను చదివిన 'అర్థమెటిక' పుస్తకం మార్జిన్లో చూపిద్దామంటే 'ఈ మార్జిన్లో ఉన్న ఖాళీ సరిపోదు' ఈ వాక్యాలే అతనికి, అతని చివరి సిద్ధాంతానికి ప్రపంచ స్థాయి గుర్తింపు తీసుకువచ్చాయి.

ఫెర్మాకు ఉన్న ఈ విచిత్ర లక్షణం వల్ల అతని సిద్ధాంతాలనేకం. చాలాకాలం మరుగున ఉండిపోవటంతో పాటు ఆయన మరణించిన తర్వాత కొన్ని సిద్ధాంతాలు వెలుగులోకి వచ్చాయి. క్రీ.శ. 1665లో ఫెర్మా మరణించాడు. ఇతని కుమారుడు ఫెర్మా వ్యాఖ్యాలు, సూత్రాలు మొదలైనవి సేకరించి ప్రచురించాడు.

GRK

ఫెర్మా గణిత శాస్త్రానికి చేసిన సేవలు :

1. బీజీయ పద్ధతుల ద్వారా వక్రాల నిరూపణ, విశ్లేషనకు 'రెనెడెకార్టే' అనుసరించిన పద్దతులనే తాను అనుసరించాడు.
2. సంభావ్యత శాస్త్రంలో అనేక అంశాలు కనుగొన్నాడు.
3. వక్రరేఖలకు స్పర్శరేఖలు, గీయటం, ప్రమేయాల గరిష్ఠ, కనిష్ఠ విలువలు కనుగొనటం తదితర అంశాలలో కలన గణిత భావాలను న్యూటన్ కన్నా ముందే వ్యక్తపరిచాడు.
4. సంఖ్యా సిద్ధాంతంలో అనేక సాధనలు చేశాడు.
5. క్రీ.శ. 1729లో గోల్డ్‌బాక్ ఫెర్మా ప్రతిపాందించిన అంశాలు, సాధించిన ఫలితాలను మరొక ప్రసిద్ధ గణిత శాస్త్రవేత్త ఆయిలర్‌కు ఉత్తరాలలో ప్రస్తావించాడు. ఆయిలర్ 'ప్రతి $n \geq 1$కి $2^{2^{n+1}}$ ఒక ప్రధానాంకమవుతుంది' అనే ఫెర్మా ఆలోచన తప్పు అని నిరూపించాడు.
6. వాలిస్ అనే గణిత శాస్త్రజ్ఞుడు తన 'బపెరా మాథమెటికా' గ్రంథంలో ఫెర్మా ఉత్తరాలను ప్రచురించాడు.

1.8.6. గణిత చరిత్ర జ్ఞానం వల్ల ఉపాధ్యాయునికి కలిగే ప్రయోజనంగణిత బోధనను ఆసక్తికరంగా తీర్చిదిద్దటంలో ఉపాధ్యాయుడికి సహాయం చేసే అంశాలలో గణిత చరిత్ర పరిజ్ఞానం కూడా ఒకటి ఆయా సందర్భాలలో గణిత భావనలు అభివృద్ధి చెందిన విధానం,నూతన ఆవిష్కరణలకు దారితీసిన పరిస్థితులు/ సన్నివేశాలు మొదలైన చారిత్రక ఘటనలను మిళితం చేయడం వల్ల బోధన స్ఫూర్తివంతంగా సాగుతుంది. ఇది జరగడానికి ఉపాధ్యాయునికి గణిత చరిత్రకు సంబంధించిన జ్ఞానం తప్పనిసరిగా ఉండాలి. గణిత చరిత్ర జ్ఞానం కలిగి ఉండ వల్ల ఉ పాధ్యాయునికి కలిగే మరికొన్ని ప్రయోజనాలుం–

- చారిత్రక అంశాలో కలిపి బోధించడం వల్ల గణిత భావలను మరింత స్పష్టంగా, స్ఫూర్తిదాయకంగా విద్యార్థులకు పరిచయం చేయవచ్చు.
- మానవ వైజ్ఞానిక అభివృద్ధికి సంబంధించిన అనేక అంశాలను గణితం పునాదిగా నిలిచిందనే విషయాన్ని బోధించవచ్చు.
- మానవ జీవన పరిణామ క్రమంలో అతని అవసరాలను తీర్చిదిద్దేందుకు ఉద్దేశించబడిన గణిత భావనలు క్రమంగా అత్యున్నతస్థాయికి చేరిన విషయాన్ని విద్యార్థులకు అందించవచ్చు.
- ఖగోళం,జ్యోతిష్యం మొదలగు శాస్త్రాల ఆవిర్భావానికి, వికాసానికి గణితం అందించిన తోడ్పాటును విద్యార్థులకు వివరించవచ్చు.
- గణిత నియమాలు, సూత్రాలు ,సిద్ధాంతాలను అవి ఆవిర్భవించిన క్రమంలో వరుసగా అధ్యయనం చేయటంతో పాటు అదే క్రమంలో విద్యార్థులకు బోధించవచ్చు.
- గణిత శాస్త్ర చరిత్రతో ప్రత్యేక పాఠాలను తయారు చేసి విద్య బోధించవచ్చు
- గణిత నాటికలు వంటి సహపాఠ్య కార్యక్రమాల నిరూపణకు చరిత్ర జ్ఞానం ఉపయోగించవచ్చు.
- గణిత శాస్త్ర శాఖలన్నీ ఒకదానితో ఒకటి అంతర్గత సహసంబంధం కలిగి ఉన్నాయని తెలుసుకోవచ్చు.
- గణితం మానవ నిర్మిత వైజ్ఞానికశాస్త్రమనే విషయాన్ని విద్యార్థికి తెలియజేయడం ద్వారా వారిని కూడా గణితశాస్త్ర అభివృద్ధిలో భాగస్వాములను చేసే దిశగా ప్రేరేపించవచ్చు.

– ఊహకు అందని పూర్వకాలంలోనే అత్యున్నత గణిత వైజ్ఞానిక అంశాలను అభివృద్ధి చేసిన శాస్త్రవేత్తలు జీవితగాథలను స్ఫూర్తివంతంగా బోధించవచ్చు.
– గణిత వాస్త్రం అన్ని ఇతర శాస్త్రాలతో సంబంధం కలిగి ఉందని ఇది వ్యక్తిగత / విడిపడిన శాస్త్రం కాదని తెలుస్తుంది.
– గణిత వైజ్ఞానిక అంశాలతో పాటు మానవ నాగరిక అభివృద్ధి చరిత్ర ,సంస్కృతి కూడా అవగాహన చేసుకోవచ్చు.
– చరిత్ర అధ్యయనం ద్వారా విద్యార్థుల్లో అన్వేషణా పరిశోధన దృక్పథాన్ని పెంపొందించవచ్చు.
– గణిత శాస్త్రజ్ఞులు చేసిన కృషిని ప్రశంసించే లక్షణం అలవాటు చేయవచ్చు.

ఇవి చేయండి

8వ తరగతి గణిత పాఠ్యపుస్తకాల్లోని అధ్యాయాలకు సంబంధించిన గణిత చారిత్రక అంశాలను సేకరించండి ఆ వివరాలతో చార్టులను తయారు చేయండి.

ముఖ్యాంశాలు :–

– Mathematics అనే పదం Manthanein అనే గ్రీకు పదం నుండి ఉద్భవించింది. Manthanein అంటే సూక్ష్మ పద్ధతి అని అర్థం.
– గణిత శాస్త్ర స్వభావం అనుసారం గణితంలో అంశాలన్నీ ఒక క్రమంలో బోధించాలి.
– విద్యార్థిలో వేగం, కచ్చితత్వం పెంపొందించడం గణితశాస్త్ర ముఖ్యలక్షణం.
– ప్రాథమిక స్థాయి నుండీ ప్రాథమికోన్నత స్థాయికి మారునపుడు అభ్యాసకునిలో పరివర్తన తప్పనిసరిగా వస్తుంది.
– ఒక విషయాన్ని లేదా అంశాన్ని నిర్ధారించునపుడు సమయం, సాధికారికత మొదలుగున్నవి కారకాలుగా ఉంటాయి.
– ప్రాథమిక స్థాయి నుండీ ప్రాథమికోన్నత స్థాయికి మారునపుడు అభ్యాసకునిలో పరివర్తన మూర్త ఆలోచనల నుంచీ అమూర్త ఆలోచనలకు మారి ఆ పరివర్తన అభ్యాసకుడి వైఖరిగా రూపొందుతుంది.
– దైనందిన వివిధ శాఖల మధ్య సంబంధం కలిగిన సమస్యలను సాధించడం ద్వారా గణితపరమైన ఆలోచనలు విద్యార్థుల్లో అభివృద్ధి చేయవచ్చు.
– విద్యార్థుల్లో పరోక్ష అనుభవాల ద్వారా గణిత భావాలను స్పష్టపరచటమే అమూర్త ఆలోచనలు.
– ఉపాధ్యాయుడు విద్యార్థులకు బోధించేటపుడు తెలిసిన విషయం నుండి తెలియని విషయానికి బోధిస్తాడు.
– విద్యార్థుల పూర్వజ్ఞానం ఆధారంగా వాదన ద్వారా ముగింపు రాబట్టడమే గణిత వివేచన.
– గణిత పరిశోధనలు / భావనలు సాధారణీకరించటం ద్వారా గణిత వివేచన ఏర్పడుతుంది. అని జాతీయ గణిత ఉపాధ్యాయుల సంఘం చెప్పింది.
– అప్పటికే అంగీకరింపబడిన గణిత భావనల మీద ఆధారపడి, ప్రవచనాన్ని సత్యమో / అసత్యమో తెలపటాన్ని సమర్ధనాత్మక వివేచన అంటారు.
– ఒక ప్రవచనాన్ని ఊహించి సత్యమో / అసత్యమో చెప్పటాన్ని ఊహాత్మక గణిత వివేచన అంటారు.
– ఒక భావనను కొన్ని సందర్భాఆల ద్వారా సత్యము అని చెప్పి దాని బట్టి సార్వత్రీకరించుటకు సాధారణీకరణ

గణిత వివేచన అంటారు.

- సూత్ర ఆధారంగా వివేచన చేసి సమస్యలను సాధించటాన్ని నిమగన గణిత వివేచన అంటారు.
- విద్యార్థులు తమ ప్రస్తుత / పాత జ్ఞానంపై ఆధారపడి నూతన భావాలను నిర్మించటమే నిర్మాణాత్మక వాదం.
- గణితశాస్త్రానికి ఆర్యభట్ట, భాస్కరాచార్య, బ్రహ్మగుప్త, యూక్లిడ్, ఫెర్మాలు చేసిన సేవలు ఎనలేనవి.

మూల్యాంకనం

వ్యాసరూప ప్రశ్నలు :-

1. గణితశాస్త్రాన్ని నిర్వచించి, దాని స్వభావాన్ని వివరించుము ?
2. గణితశాస్త్ర లక్షణాలను ఉదాహరణలతో సహా వివరింపుము?
3. నిజ నిర్ధారణ అంటే ఏమిటి? నిజనిర్ధారణ చేయుటలో ఉపయోగించే వ్యూహాలు ఏమిటి?
4. ప్రాథమిక స్థాయినుండీ ప్రాథమికోన్నత స్థాయికి వచ్చిన విద్యార్థిలోని నీవు గమనించిన పరివర్తన లక్షణాలు ఏవి?
5. విద్యార్థిలో గణితపరమైన ఆలోచనలను వృద్ధి చేయుటకు ఉపాధ్యాయునిగా నీవు తీసుకునే చర్యలు ఏవి?
6. నిర్మాణాత్మకవాదం ద్వారా గణిత అభ్యసనను ఎట్లు మెరుగు పరచెదవు?
7. ప్రముఖ భారతీయ గణితశాస్త్రవేత్త భాస్కరాచార్య చేసిన సేవలు ఎట్టివి?
8. గణిత వివేచన అంటే ఏమిటి? గణిత వివేచనా ప్రక్రియలోని ఏవైనా నాలుగు ప్రక్రియలను ఉదాహరణలతో సహా వివరింపుము ?

సంక్షిప్త సమాధాన ప్రశ్నలు :-

1. గణితశాస్త్ర శబ్దపర లక్షణ అర్థాన్ని రాయండి?
2. ప్రాథమికోన్నత స్థాయిలో గణితశాస్త్ర ఉద్దేశాలు ఏవి?
3. ప్రాథమికోన్నత స్థాయిలో పిల్లల స్వభావం ఎలా ఉంటుంది?
4. విద్యార్థులలో మూర్త ఆలోచనలను కలిగించుటకు ఉపాధ్యాయుడిగా నీవు చేపట్టే కృత్యాలు ఏవి?
5. నిర్దిష్టం నుంచి సాధారణీకరణానికి సాగే గణిత ఆలోచనలు ఏవిధంగా మార్పు చెందుతాయి?
6. ధృవీకరణ ప్రక్రియలో దృశ్య నిరూపణకు ఉదాహరణ సహితంగా రాయుము?
7. గణితశాస్త్ర అధ్యయనం వల్ల ఉపాధ్యాయునికి కలిగే ప్రయోజనాలు ఏమిటి?
8. నియత నిరూపణల వల్ల కలిగే ప్రయోజనాలు ఏవి?
9. ఆర్యభట్ట గణిత శాస్త్రానికి చేసిన సేవలు ఎట్టివి?
10. యూక్లిడ్ రాసిన గ్రంథం 'డాటా' లో చర్చించిన అంశాలు ఏవి ?
11. బ్రహ్మగుప్తుడు గణిత శాస్త్రానికి చేసిన సేవలు ఏమిటి?

అతి సంక్షిప్త సమాధాన ప్రశ్నలు :-

1. కచ్చితత్వాన్ని మెరుగుపరచే గణితశాస్త్ర స్వభావం ఏది ?
2. చతుర్విధ ప్రక్రియల పరిచయం ఏ స్థాయి గణిత శాస్త్ర ఉద్దేశము?
3. నిజనిర్ధారణ అంటే ఏమిటి?
4. అభ్యాసకుని పరివర్తన ప్రక్రియలో ఉండే రకాలు ఎన్ని ?
5. నిర్మాణాత్మక వాదంలో ఉపాధ్యాయుడు తీసుకోవాల్సిన రెండు జాగ్రత్తలు తెలుపుము?
6. ఆర్యభట్ట రాసిన గ్రంథం పేరేమిటి?
7. భాస్కరాచార్యుని కూతురు పేరేమిటి?
8. $= 3.1416$ అని మొదటసారిగా తెలియజేసిన శాస్త్రవేత్త ఎవరు ?
9. ఊహించి ప్రతిపాదించే ప్రవచనాలు ఏ రకమైన గణిత వివేచన క్రిందకు వస్తుంది ?
10. సూత్రాన్ని రాబట్టే ప్రక్రియ ఏ రకమైన గణిత వివేచన ?
11. మూర్త భావలను స్థిరం చేయటం అనేది విద్యార్థిలో ఏ స్థాయి గణితశాస్త్ర లక్షణం ?

2. పాఠశాల గణిత విషయాలు మరియు ప్రక్రియలు

2.1 సంఖ్య భావన –వ్యవస్థ

2.1.1 పరిచయం

2.1.2 బోధనా లక్ష్యాలు

2.1.3 సంఖ్యావ్యవస్థ

2.1.4 సంఖ్యలను అంచనా వేయడం, పోల్చడం

2.1.5 భిన్నాలు

2.1.6 శాతాలు

2.1.7 నిష్పత్తి

2.1.8 అనుపాతం

2.1.9 బారువడ్డి (సరళవడ్డి)

2.1.10 చక్రవడ్డి

2.1.11 ఘాతాలు – ఘాతాంకాలు

2.1.12 కారణాంకాలు

2.1.13 వర్గమూలాలు, ఘనమూలాలు

2.1.1 పరిచయం:

అంకెలతో ఏదైనా నిరూపించవచ్చు. – కార్లయిల్.

గణిత శాస్త్రంలో అంకగణితం ఒక ప్రధానమైన విభాగం సంఖ్యాసంబంధిత సత్సంబంధ పరిజ్ఞానమే అంకగణితం లెక్కింపు, గణన నైపుణ్యాల గణిత శాఖే అంకగణితం. 'అర్థమెటికా' అనే గ్రీకు పదం నుండి Arthematics (అంకగణితం) పుట్టింది. అర్థమెటికా అంటే Science of numbers with the art of computing కానీ ఆధునికంగా దీనిని సంఖ్యాశాస్త్రం (Number theory) అని పరిగణించడం జరుగుతుంది. ఎలిమెంటరీ స్థాయిలో ఉపాధ్యాయుడు అంకగణితం బోధనకు ప్రాధాన్యత నివ్వాలి. సంఖ్యాసంబంధాలను అవగాహనపరచడం వాటి ప్రత్యేకతలను గుర్తించడం. వాటిని ఉపయోగించి ప్రక్రియలు చేయడం. అందుకు వాటిని రకరకాలుగా వినియోగించుకొని సమన్వయపరచడం చేయాలి. గణిత బోధనా లక్ష్యాలు ఏర్పరుచుకొన్నట్లే గణితంలోని ప్రధాన భాగమైన అంకగణితానికి ఉన్న ప్రత్యేక బోధనా లక్ష్యాలను కూడా ఉపాధ్యాయుడు తెలుసుకోవాలి.

2.1.2 బోధనా లక్ష్యాలు:

1. సంఖ్యా వ్యవస్థ బోధనకు అవసరమైన సమాధానాలను పెంపొందించుకోవడం.
2. సంఘానికి వ్యక్తి జీవితానికి అంకగణితం కూర్చిన సహాయాన్ని అవగాహన చేసుకోవడం.
3. చతుర్విధ పరికర్మలకు సంబంధించిన ప్రతిపాదిక, యధార్థ విషయాలలో అర్థవంతమైన పాండిత్యాన్ని సంపాదించుకోవడం.
4. పూర్ణాంకాలకు సామాన్య భిన్నాలకు దశాంశ భిన్నాలకు మధ్య ఉన్న సంబంధాలను భేదాలను అవగాహన చేసుకోవడం.
5. గణితంలోని సమస్యలకు జవాబులను సాధించడం.
6. ఉన్నత పాఠశాలలో కొనసాగించే గణితాధ్యయనాన్ని ప్రేరేపించడానికి కావలసిన సామర్థ్యాలను విలువలను అభిరుచులను పెంపొందించడం.
7. వ్యక్తిగత, వ్యాపార, ఆర్థిక శాస్త్రంలో ప్రాతిపదిక గణితాలనుప్రయుక్తాన్ని దాని విలువను అవగాహన చేసుకోవడం సామర్థ్యాన్ని పెంపొందించుకోవడం.

2.1.3 సంఖ్యావ్యవస్థ

సున్న గురించి:

అంకగణితంలో 'సున్న'కు ప్రత్యేక స్థానముంది. '0'ను కనుక్కోవడం వల్ల హిందూ సంఖ్యామానంలో సంఖ్యలు రాయడంలో చాలా సౌలభ్యం కలిగింది. 9 సంఖ్యల తరువాత వచ్చే 10ని ఒక యూనిట్‌గా తెలియజేయడానికి '1' పక్కన సున్నాను ఉపయోగించారు. సున్నాకు విలువలేదు. కాని సంఖ్యలోని అంకెల కుడి పక్కన ఉన్నప్పుడు ఆ సంఖ్యలకు విలువనిస్తుంది. సంఖ్యలో స్థానాన్ని కలిగి ఉంటుంది. 10 అంటే ఒక పది అని, ఒకట్లు సంఖ్య శూన్యమని భావన. 405 లో 4 వందల స్థానాన్ని సూచిస్తుంది. 'సున్నా' పదులస్థానం ఆక్రమించడంవల్ల పదులు ఏమిలేవని '0' సూచిస్తుంది. భారతీయ ప్రాచీన గ్రంథాలలో శూన్యం గురించిన ప్రస్తావన ఉన్నట్లు చరిత్రకారులు చెబుతున్నారు. క్రీ.శ. 476కు చెందిన గణితశాస్త్రవేత్త ఆర్యభట్ట పుస్తకంలో ఉపయోగించిన సంజ్ఞా విధానంలో సున్నగురించి స్థాన విలువలు తెలిపినట్లు విదితమవుతుంది. 9వ శతాబ్దానికి చెందిన భారతీయ గణితవేత్త 'మహవీర' సున్న నియమాలు రచించాడు. ఒక సంఖ్యను సున్నాతో గణిస్తే ఫలితం సున్న. ఒక సంఖ్యకు సున్నాను కూడినరా తీసివేసినా, ఫలితం అదే సంఖ్య, సున్నాను ఇతర సంఖ్యలచే బాగిస్తే దాని విలువలో మార్పు ఉండదు అని ఇతడు చెప్పాడు. సున్నాను ఉపయోగించే విధానం అరబ్బులు ద్వారా యూరోపియన్లకు తెలిసిందని చరిత్ర తెలుపుతుంది.

"సున్నను ప్రవేశపెట్టి గణితానికి చుక్కానిని బిగించారు భారతీయులు" **– హార్డే**

"సంఖ్యలు మేధస్సుకు సాక్ష్యాలు అవి మానవ జాతికి మాత్రమే పరిమితం" **– బాల్టిక్**

సంఖ్యామానం:

హిందూ – అరబిక్ సంఖ్యామానములో 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 లను అంకెలు అంటారు.

సంఖ్య:

అంకెలతో సంఖ్యలు ఏర్పడతాయి. సంజ్ఞను రాశిని సంధానం చేసినప్పుడు సంఖ్య అంటారు. '7' కేవలం సంజ్ఞ. దీని విలువ ఏడు వస్తువులను సూచిస్తుంది అనటం వల్ల '7' అనే సంఖ్య ఏర్పడుతుంది.

'35' ఈ సంజ్ఞకు విలువ ఆపాదిస్తే ముప్పఐదు అనే సంఖ్యారాశిని సూచిస్తుంది. ఈ సంఖ్యలో '5' అనే అంకె ఒకట్లు స్థానంలోను, '3' అనే అంకె పదుల స్థానంలో ఉన్నాయంటాం.

ఈ అంకెలు తయారైతే ఏర్పడే సంఖ్యారాశిని ‘53’ అనే సంజ్ఞలతో గుర్తిస్తాం.

సంఖ్యలను బోధించేటప్పుడు కూడా ఇలాగే సంఖ్యను గుర్తింపజేయడం. సంజ్ఞకు రాశికి వస్తువులను ఉపయోగించి సంధానం చేయడం, సంఖ్యాక్రమాన్ని అంటే ఎక్కువ తక్కువ గుర్తింపజేయడం క్రమంలో జరగాలి.

1, 2, 3 ......7, 8, 9లను ఒక అంకె సంఖ్యలు అంటారు. సంఖ్యలోని అంకెలకు ముఖ (నిజ)విలువ, స్థానవిలువ ఉంటాయి.

ముఖ(నిజ) విలువ:

ఒక అంకెకు ఉండే అసలు విలువను ముఖ విలువ అంటారు. ఇది ఎప్పటికి మారదు. స్థాన విలువ సంఖ్యలో అంకె స్థానాన్నిబట్టి మారుతుంది. ఉదాహరణకి 5437 లో

5 యొక్క స్థాన విలువ	5 × 1000	=	5000	→	ముఖ విలువ 5
4 యొక్క స్థాన విలువ	4 × 100	=	400	→	ముఖ విలువ 4
3 యొక్క స్థాన విలువ	3 × 30	=	30	→	ముఖ విలువ 3
7 యొక్క స్థాన విలువ	7 × 1	=	7	→	ముఖ విలువ 7

సహజ సంఖ్యలు:

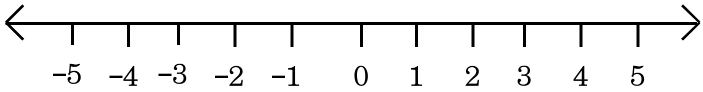
లెక్కించడానికి ఉపయోగించే 1, 2, 3 .... అనంతం దాకా ఉండే సంఖ్యలను సహజ సంఖ్యలు అంటారు. ‘0’ సహజ సంఖ్య కాదు.

సహజ సంఖ్యల సమితి రూపం N = {1, 2, 3 ......}

పూర్ణాంకాలు – పూర్ణసంఖ్యలు:

0, 1, 2, 3 ..... అనంతం దాకా ఉండే సంఖ్యలను పూర్ణాంకాలు అంటాం. ఈ సంఖ్య సమితిని W చేత సూచిస్తాం. ‘0’ నుంచి కుడివైపుకు పోయే కొద్దీ సంఖ్య విలువ పెరుగుతుంది. కొన్ని పరిక్రియలు చేయడానికి ధన సంఖ్యలు మాత్రమే సరిపోవు. ఋణ సంఖ్యలు కూడా కావాలి. ఇవి సున్న నుంచి ఎడమ వైపు పోయే కొద్దీ −1, −2, −3 ...... ఉంటాయి. వాటిని ఋణ సంఖ్యలు అంటారు. ధన సంఖ్యలు, ఋణ సంఖ్యలు, సున్న కలిసి పూర్ణసంఖ్యలు అంటాం. ఈ సంఖ్యాసమితిని Z చే సూచిస్తారు.

Z = {..... −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3 ......}



సముద్ర మట్టం నుంచి లోతులను పోల్చేటప్పుడు ఋణ సంఖ్యలను, ఉష్ణోగ్రతకు సంబంధించి '0' కంటే తక్కువ ఉష్ణోగ్రతలకు ఋణ సంఖ్యలలో సూచిస్తారు.

పరమ మూల్యం:

ఒక సంఖ్య పరమమూల్యం లేక మాపం అంటే అ సంఖ్య ఋణ, ధన గుర్తులతో సంబంధం లేని విలువ మాత్రమే.

ఉదా: ఇద్దరు బాలికలు ఒక స్థానం వ్యతిరేక దిశలలో 5 కి.మీ.లు సైకిలుపై ప్రయాణం చేసినప్పుడు ఒక్కొక్కరు ప్రయాణం చేసే దూరం పరమమూల్యం 5 కి.మీ. మాత్రమే.

సరి, బేసి సంఖ్యలు:

సహజ సంఖ్యలలో '2'తో నిశ్శేషంగా భాగించే సంఖ్యలను 'సరిసంఖ్యలు' అంటారు.

ఉదా: 2, 4, 6, 8.....

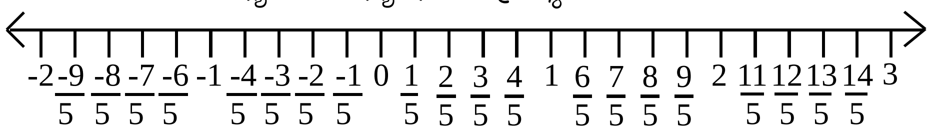
ఏ సహజ సంఖ్యలను 2తో భాగించినప్పుడు శేషం '1' మిగులుతుందో ఆ సంఖ్యలను బేసి సంఖ్యలు అంటారు. ఉదా: 1, 3, 5, 7, 9...

అకరణీయ సంఖ్యలు:

పూర్ణ సంఖ్యల సమితిలో లేని సంఖ్యల అవసరం కొన్ని సందర్భాల్లో కనిపిస్తుంది. ఉదా: $\frac{7}{2}, \frac{9}{4}, \frac{12}{5}$

a, b లు పూర్ణసంఖ్యలై $b \neq 0$ గా ఉన్నప్పుడు $\frac{a}{b}$ రూపంలోనున్న సంఖ్యను అకరణీయ సంఖ్య అంటాం. వాటినే భిన్న రూపంలో ఉండే సంఖ్యలని కూడా అంటాం. $\frac{a}{b}$ లో $b = 1$ అయినప్పుడు $\frac{a}{b} = a$ అవుతుంది. అందువల్ల అకరణీయ సంఖ్యలలో పూర్ణసంఖ్యలు కూడా ఇమిడి ఉన్నాయి. అకరణీయ సంఖ్యల సమూహాన్ని 'Q' చేత సూచిస్తాం.

అకరణీయ సంఖ్యలను సంఖ్యారేఖ మీద ప్రదర్శించడం.



ఈ సంఖ్యారేఖను ఉపయోగించి సంఖ్యలను సులభంగా పోల్చవచ్చు.

$$\frac{4}{5} > \frac{3}{5}$$

$$\frac{8}{5} > \frac{6}{5}$$

$$\frac{-8}{5} > \frac{-6}{5}$$

ఒక ధన అకరణీయ సంఖ్య ఋణ అకరణీయ సంఖ్య కంటే ఎప్పుడూ పెద్దది. ప్రతి ఋణ అకరణీయ సంఖ్య కంటే '0' ఎక్కువ. ప్రతి ధన అకరణీయ సంఖ్య కంటే '0' తక్కువ.

ప్రతీ అకరణీయ సంఖ్యను అంతం ఉన్న ఒక దశాంశంగా లేదా అంతం లేని ఆవర్తన దశాంశ సంఖ్యగా రాయవచ్చు.

ఉదా: $\frac{3}{8}$ = 0.375 ఇది అంతం ఉన్న దశాంశ భిన్నం

$\frac{1}{3}$ = 0.333 ఇది అంతం ఉన్న దశాంశ భిన్నం

$\frac{15}{7}$ = 2.142857 ఇది అంతం ఉన్న దశాంశ భిన్నం

కరణీయ సంఖ్యలు:

1, 4, 9, 16, 25 సంఖ్యలకు వర్గమూలాలు వరుసగా 1, 2, 3, 4, 5 అంటే వరుస సంఖ్యలు. కాని 1, 4 మధ్య 2, 3 అనే పూర్ణాంకాల వర్గమూలాలు 1, 2 లకు మధ్య పూర్ణాంకాలు లేవు. అందువల్ల 2, 3ల వర్గమూలాలు పూర్ణాంకాలు కాలేవు. అయితే ఇవి అకరణీయ సంఖ్యలవుతాయా? వాటిని అకరణీయ సంఖ్యారేఖపై చూపగలమా? అనే అంశాన్ని పరిశీలిద్దాం.

$\sqrt{2}$ అనేది 1, 2 కు మధ్య ఉండాలి.

అందువల్ల $(1.5)^2 = 2.25 \therefore \sqrt{2} > 1.5$

ఇప్పుడు 1.4 చేత ప్రయత్నిద్దాం $(1.4)^2 = 1.96 \therefore \sqrt{2} > 1.4$

$\sqrt{2}$, 1.5 కు 1.4 కు మధ్య ఉంటుందని గమనించవచ్చు.

1.41 తో ప్రయత్నిస్తే $(1.41)^2 = 1.9881 \quad \therefore \sqrt{2} > 1.4$

1.42 తో ప్రయత్నిస్తే $(1.42)^2 = 2.0164 \quad \therefore \sqrt{2} < 1.42$

1.415 తో ప్రయత్నిస్తే $(1.415)^2 = 2.002225 \quad \therefore \sqrt{2} < 1.415$

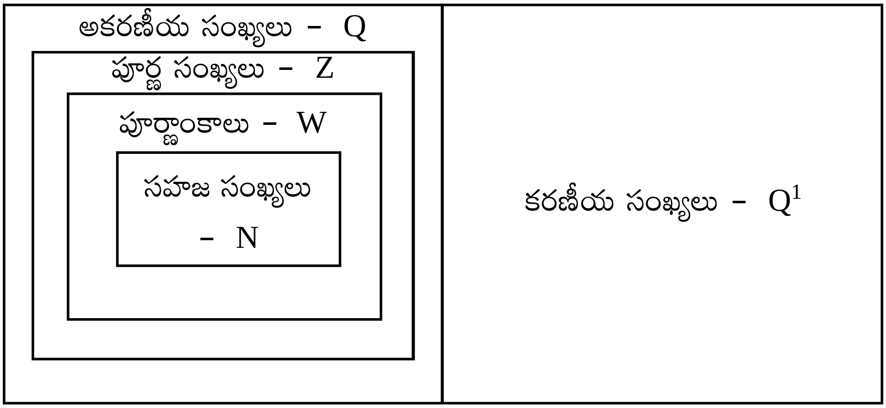
1.414 తో ప్రయత్నిస్తే $(1.414)^2 = 1.999396 \quad \therefore \sqrt{2} > 1.414$

ఈ విధంగా ప్రయత్నిస్తూపోతే అంతమయ్యే దశాంశంగాని ఆవర్తనమయ్యే దశాంశంగాని లభించవు. ఇటువంటి సంఖ్యలను అంటే $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$ మొదలయినవి వాటిని కరణీయ సంఖ్యలు అంటారు.

వాస్తవ సంఖ్యలు:

అకరణీయ సంఖ్యలు, కరణీయ సంఖ్యలు అన్నీ కలిసి వున్నా సమితి వాస్తవ సంఖ్యాసమితి. దీనిని R తో సూచిస్తారు. ప్రతి వాస్తవ సంఖ్యకు సాదృశంగా రేఖపై ఒక బిందువు ఉంటుందనీ, సంఖ్యారేఖపై ప్రతి బిందువుకు సదృశ్యంగా ఒక వాస్తవ సంఖ్య ఉంటుంది. అందుచేతనే ఈ రేఖను వాస్తవ సంఖ్యారేఖ అంటాం. ఈ సంఖ్యలకు సంఖ్యారేఖపై బిందువులుగా చూపించడానికి వీలుగా ఉండటంవల్లనే వాస్తవ సంఖ్యలకు ఆ పేరు వచ్చింది.

$\longleftarrow R = Q \cup Q^1 \longrightarrow$



సంఖ్యా ధర్మాలు:

సంవృత ధర్మం

రెండు పూర్ణాంకాలను కూడితే ఒకే ఒక సంఖ్య వస్తుంది. అది కూడా పూర్ణాంకమే.

a, b అనే రెండు పూర్ణాంకాల మొత్తం $a + b$ కూడా పూర్ణాంకమే. ఈ ధర్మాన్ని పూర్ణాంక సంకలన సంవృత దర్మం అంటారు.

ఉదా: $10 + 5 = 15$

$25 + 15 = 40$

సంకలన వినిమయ ధర్మం లేక సంకలన స్థిత్యంతర ధర్మం:

రెండు పూర్ణాంకాలను ఏ వరుసలో కూడానా మొత్తం మారదు. a, b అనే పూర్ణాంకాలకు $a + b = b + a$

ఉదా: $12 + 15 = 15 + 12 = 27$

సంకలన సహచర ధర్మం:

మూడు పూర్ణాంకాల సంకలనంలో మొదట ఏ రెండు కూడినా, దానికి మూడవ దానిని కూడితే వచ్చే ఫలితం మారదు.

a, b, c అనే పూర్ణాంకాలకు

$a + (b + c) = (a + b) + c$

$18 + (12 + 10) = (18 + 12) + 10 = 40$

తత్సమ ధర్మం:

'a' అనే ఏదయినా పూర్ణాంకానికి $a + 0 = 0 + a = a$ పూర్ణాంకాలలో ఈ ధర్మాన్ని సంకలన తత్సమ ధర్మం అంటారు. '0' ను సంకలన తత్సమానం అంటారు.

$5 + 0 = 0 + 5 = 5$

$12 + 0 = 0 + 12 = 12$

పూర్ణాంకాలలో గుణకార సంవృత ధర్మం:

ఏవయినా రెండు పూర్ణాంకాల లబ్దం కూడా పూర్ణాంకమే. a, b అనే రెండు పూర్ణాంకాల లబ్ధం a, b కూడా ఒక పూర్ణాంకమే. ఈ ధర్మాన్నే పూర్ణాంకాల గుణకార సంవృత ధర్మం అంటాం.

ఉదా: $15 \times 7 = 105$ $\qquad$ $12 \times 4 = 48$

పూర్ణాంకాలలో గుణకార వినిమయ (స్థిత్యంతర) ధర్మం:

ఏవయినా రెండు పూర్ణాంకాలు a, b కు $a \times b = b \times a$. రెండు ధర్మాన్ని పూర్ణాంకాల గుణకార వినిమయ ధర్మం అంటాం.

ఉదా: $17 \times 3 = 51 \;=\; 3 \times 17$

$25 \times 2 = 2 \times 25 = 50$

పూర్ణాంకాలలో గుణకార సహచర ధర్మం:

రెండు కంటే ఎక్కువ పూర్ణాంకాలను గుణించేప్పుడు ఏ వరుసక్రమంలో గుణించినా లబ్ధం మారదు a, b, c అనే ఏవయినా మూడు పూర్ణాంకాలకు $a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$

ఈ ధర్మాన్నే పూర్ణాంకాల గుణకార సహచర ధర్మం అంటారు.

$8 \times (9 \times 6) = (8 \times 9) \times 6 = 432$

పూర్ణాంకాల గుణకార తత్సమ ధర్మం:

ఏ పూర్ణాంకాన్ని గాని 1తో గుణిస్తే లబ్ధం ఆ పూర్ణాంకమే a అనే పూర్ణాంకానికైనా $a \times 1 = 1 \times a = a$ ఇక్కడ '1' ని గుణకార తత్సమాంశం అంటారు.

గుణకారంలో '0' ధర్మం:

ఏ పూర్ణాంకం "a" కైనా $a \times 0 = 0 \times a = 0$ అట్లాగే $a \times b = b \times a = 0$ అయితే $a = 0$ లేదా $b = 0$ లేదా $a = b = 0$

ఉదా: $4 \times 0 = 0$; $0 \times 0 = 0$; $0 \times 5 = 0$

గుణకార విభాగధర్మం:

ఏవేని మూడు పూర్ణాంకాలు a, b, c లకు $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$ ఈ ధర్మాన్ని కూడికపై విభాగ ధర్మం అంటాం.

ఉదా: $4 \times (5 + 9) = 4\times5 + 4\times9 = 56$

పూర్ణాంకాల వ్యవకలనానికి సంబంధించిన ధర్మాలు:

1. **పూర్ణాంకాల వ్యవకలన సంవృత ధర్మం:** రెండు పూర్ణాంకాల బేధం కనుక్కునేటప్పుడు వచ్చే విలువలు పూర్ణాంక సమితిలోనే ఉంటాయి. కాబట్టి పూర్ణాంకాల వ్యవకలనానికి సంవృత ధర్మం వర్తిస్తుంది.
   ఉదా: $9 - 5 = 4$, $15 - 25 = -10$

2. **పూర్ణాంకాల వ్యవకలన వినిమయ ధర్మం:** $9 - 5 \neq 12 - 9; 15 - 6 \neq 6 - 15$ పూర్ణాంకాలలో వ్యవకలనం వినిమయం కాదు.
3. **పూర్ణాంకాల వ్యవకలనంలో సహచర ధర్మం:** $8 - (10 - 4) \neq (8 - 10) - 4$ పూర్ణాంకాల వ్యవకలనంలో సహచరధర్మం వర్తించదు.

పూర్ణాంకాల భాగహారానికి సంబంధించిన ధర్మాలు:

1. $\frac{10}{5} = 2;\ \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3};\ \frac{15}{4} = 3\frac{3}{4}$

   పై ఉదాహరణలను పరిశీలిస్తే పూర్ణాంకాల బాగహారంలో భాగఫలం ఎల్లప్పుడూ పూర్ణాంకమై ఉండకపోవచ్చు. కాబట్టి పూర్ణాంకాల సమితిలో భాగాహారానికి సంవృతధర్మం వర్తించదు.

2. వినిమయ ధర్మం:

   $8 \div 4 = 2;\ 4 \div 8 \neq 2$

   ఏదయినా రెండు పూర్ణాంకాలకు $a \neq b$ అయితే $a \div b \neq b \div a$ కాబట్టి పూర్ణంకాల భాగాహారంలో వినిమయ ధర్మం వర్తించదు.

3. సహచర ధర్మం:

   $15 \div (12 \div 6) \neq (15 \div 12) \div 6$

   $a, b \neq 0,\ c \neq 0$ అనే ఏవయినా మూడు పూర్ణాంకాలకు

   $(a \div b) \div c \neq a \div (b \div c)$

   కాబట్టి పూర్ణాంకాల బాగహారానికి సహచర ధర్మం వర్తించదు.

4. పూర్ణాంకాలలో '0'తో భాగహారం నిర్వచించడం జరగలేదు.

   $8 \div 0 = ?$

   $\frac{8}{0} = a$ అనుకొందాం (a ఒక పూర్ణాంకం)

   భాగహారం, గుణకార విలోమం కాబట్టి

   $0 \times 9 = 8$ కావాలి 'a' పూర్ణాంకం కాబట్టి, ఒక పూర్ణాంకం, సున్నాల లబ్దం అంటే $a \times 0$ ఎప్పుడూ సున్న అవుతుంది. కాబట్టి లబ్దం '8' కాదు.

   దీనిని బట్టి $8 \div 0$ భాగఫలం ఏ పూర్ణాంకం కాదు.

   $\therefore$ సున్నాతో భాగహారం నిర్వచించడం జరగలేదు.

మరొక ప్రత్యేక సందర్భం:

$0 \div 5$ తీసుకోండి, $0 \div 5 = a$ అనుకోండి. $5 \times a = 0$ కాని రెండు పూర్ణాంకాల లబ్ధం అయితే కనీసం ఒక పూర్ణాంకమైన సున్న కావాలి. కాని $5 \neq 0$, కాబట్టి $a = 0$.

$0 \div 5 = 0$

అంటే $a \neq 0$ అనే ఏ పూర్ణాంకానికైనా $0 \div a = 0$

కాబట్టి '0' కాని ఏ పూర్ణాంకంలోనైన '0'ను భాగిస్తే వచ్చే భాగఫలం సున్న.

ప్రధాన సంఖ్యలు, సంయుక్త సంఖ్యలు

కింది పట్టికలో సంఖ్యలు, వాటి కారణాంకాలు ఇవ్వబడ్డాయి. అలాగే ఒక సంఖ్యకు ఎన్ని కారణాంకాలున్నాయో తెలిపే సంఖ్య కూడా ఇవ్వబడింది. పరిశీలించండి.

సంఖ్య	కారణాంకం	కారణాంకాల సంఖ్య
1	1	1
2	1, 2	2*
3	1, 3	2*
4	1, 2, 4	3
5	1, 5	2*
6	1, 2, 3, 6	4
7	1, 7	2*

పై పట్టికలో ఏ యే సంఖ్యలు కేవలం రెండు కారణాంకాలను మాత్రమే కలిగి ఉన్నాయి?

2, 3, 5, 7 సంఖ్యలు కేవలం రెండు కారణాంకాలను మాత్రమే కలిగియున్నాయి. * గుర్తుతో చూపబడినవి 1 మరియు అదే సంఖ్య వీటికి కారణాంకాలు.

1 మరియు అదే సంఖ్య కారణాంకాలుగా కలిగిన సంఖ్యలను "ప్రధాన సంఖ్యలు" అంటారు.

ఏ సంఖ్యలు రెండు కంటే ఎక్కువ కారణాంకాలు కలిగియున్నవి? 4, 6 .... మొదలగు సంఖ్యలు రెండు కంటే ఎక్కువ కారణాంకాలు కలిగియున్నవి. వీటిని సంయుక్త సంఖ్యలు అంటారు.

10 కంటే పెద్దవైన 5 సంయుక్త సంఖ్యలను తెలపండి.

ఒకే ఒక కారణాంకం కల్గిన సంఖ్య ఏది?

1 కేవలం ఒక ఒక కారణాంకం కలిగియుంది. 1 ప్రధాన సంఖ్య కాదు మరియు సంయుక్త సంఖ్య కాదు.

‘1’ ప్రధాన సంఖ్య కాదు. సంయుక్త సంఖ్యకాదు. ప్రధాన సంఖ్యలను కనుక్కోవడానికి ‘ఎరటోస్తనీసు జల్లెడను’ ఉపయోగిస్తాం. క్రీ.పూ. 276–196 కాలంలో గ్రీకు గణిత శాస్త్రజ్ఞుడు భౌగోళిక శాస్త్రవేత్త అయిన ఎరటోస్తనీసు సహజ సంఖ్యలలో ప్రధాన సంఖ్యలను కనుక్కొనే సులభ పద్ధతిని సూచించాడు. ఈ పద్ధతిని ‘ఎరటోస్తనీసు జల్లెడ’ అంటారు. దీనిని దశాంశ సంఖ్యామానంలో ఈ కింది విధంగా సూచిస్తాం.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

ప్రధాన సంఖ్యలను కనుక్కోవడానికి 1 నుండి 100 దాకా సంఖ్యలు రాయాలి. 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 అనేవి 20 లోపలున్న ప్రధాన సంఖ్యలు. మిగిలిన ప్రధాన సంఖ్యలను కింది విధంగా ఏరివేయవచ్చు.

1. 2 మాత్రమే సరి ప్రధాన సంఖ్య. 4 తో మొదలుపెట్టి సరిసంఖ్యలన్నీ 2చే నిశ్శేషంగా భాగింపు పొందుతాయి. ఇవన్నీ సంయుక్త సంఖ్యలు కాబట్టి 4, 6, 8, 10 .... సంయుక్త సంఖ్యలు. కాబట్టి 2 నుంచి మొదలు పెట్టి సంఖ్య విడిచి సంఖ్యలన్నింటి చుట్టూ గుండ్రంగా గీయాలి.
2. 3 ఒక ప్రధాన సంఖ్య. 3 తరువాత ప్రతి మూడవ సంఖ్య 3 గుణిజం కాబట్టి ఆ సంఖ్యల చుట్టూ గుండ్రంగా చుట్టాలి. 6, 9, 12 .... సంఖ్యల చుట్టూ చుట్టడం జరుగుతుంది.
3. 5 ఒక ప్రధాన సంఖ్య. 5 తరువాత ప్రతి 5వ సంఖ్య 5కు గుణిజాలవుతాయి. ఆ సంఖ్యల చుట్టూ గుండ్రంగా చుట్టాలి. 5, 10, 15 .... చుట్టూ చుట్టడం జరుగుతుంది.
4. అట్లాగే 7 ఒక ప్రధాన సంఖ్య. 7 తరువాత ప్రతి ఏడవ సంఖ్య 7కు గుణిజం అవుతుంది. కాబట్టి ప్రతి 7వ సంఖ్య 7కు గుణిజం అవుతుంది. కాబట్టి ప్రతి 7వ సంఖ్య చుట్టూ గుండ్రంగా చుట్టాలి.
5. 11 ప్రధాన సంఖ్య. కాబట్టి ప్రతి 11వ సంఖ్య 11 కు గుణిజమవుతుంది. ఇట్లాగే 13 గుణిజాలన్నింటి చుట్టూ చుట్టాలి. మిగిలిన సంఖ్యలు ప్రధాన సంఖ్యలవుతాయి.

పరస్పర ప్రధాన సంఖ్యలు లేదా సాపేక్ష ప్రధాన సంఖ్యలు:

3 మరియు 8లను పరిశీలించండి.

3 యొక్క కారణాంకాలు 1 మరియు 3

8 యొక్క కారణాంకాలు 1, 2, 3 మరియు 4

3 మరియు 8 యొక్క ఉమ్మడి కారణాంకం '1' మాత్రమే.

'1' మాత్రమే ఉమ్మడి కారణాంకంగాగల సంఖ్యలను ప్రధాన సంఖ్యలు, సాపేక్ష ప్రధాన సంఖ్యలు అంటారు.

ఉదా: రెండు సాపేక్ష ప్రధాన సంఖ్యలు 4 మరియు 5లను తీసుకోండి. ఈ రెండు సంఖ్యలు ప్రధాన సంఖ్యలేనా?

సాధన: లేదు, 4 ప్రధాన సంఖ్య కాదు. 5 మాత్రమే ప్రధాన సంఖ్య. "అందుచే అన్ని ప్రధాన సంఖ్యలు సాపేక్ష ప్రధాన సంఖ్యలు. కాని సాపేక్ష ప్రధాన సంఖ్యలోని అన్ని సంఖ్యలు ప్రధాన సంఖ్యలు కావు"

కవల ప్రధాన సంఖ్యలు:

2 బేధంగా గల ప్రధాన సంఖ్యలను కవల ప్రధాన సంఖ్యలు అంటారు. ఉదాహరణకు (3, 5); (5, 7); (11, 13); (41, 43) మొదలగునవి.

కవల ప్రధాన సంఖ్యలన్నీ సాపేక్ష ప్రధాన సంఖ్యలవుతాయా?

సంఖ్యలను అంచనా వేయడం , పోల్చడం:

కింది సంఖ్యలలో పెద్ద సంఖ్యను, చిన్న సంఖ్యను కనుగొనండి.

క్ర.సం.	సంఖ్యలు	పెద్ద సంఖ్య	చిన్నసంఖ్య
1.	3845, 485, 34, 13845	13845	34
2.	856, 1459, 35851, 23	....	....
3.	585, 9335, 678, 44	....	....
4.	39, 748, 19651, 7850	....	....

సంఖ్యలలో గల అంకెల సంఖ్యను బట్టి సులభంగా అంచనా వేసి పెద్ద సంఖ్యను, చిన్న సంఖ్యను కనుగొన్నాం. సాధారణంగా పరిశీలిస్తే 5 అంకెలతో కూడిన సంఖ్య ఎప్పుడూ రెండంకెలతో కూడిన సంఖ్య కన్నా పెద్దది కదా!

1845 మరియు 41694 సంఖ్యలను పోల్చవలసి వచ్చినప్పుడు 10 పదివేల స్థానంలో అంకెలను పోలిస్తే సరి. 51845 సంఖ్య యొక్క పదివేల స్థానంలో 5 ఉన్నది. అలాగే 41694 సంఖ్య యొక్క పదివేల స్థానంలో 4 ఉంది కదా! అందుచేత 51845 > 41964 అని చెప్పగలం.

మరి ఇప్పుడు చెప్పండి. 58672 మరియు 57875 లలో ఏది పెద్దది? ఇచ్చట రెండు సంఖ్యలలో అంకెల సంఖ్య సమానం మరియు పదివేల స్థానంలో రెండింటిలోనూ కలదు.

మరి ఇప్పుడు చెప్పండి. 58672 మరియు 57875 లలో ఏది పెద్దది? ఇచ్చట రెండు సంఖ్యలలో అంకెల సంఖ్య సమానం మరియు పదివేల స్థానంలో రెండింటిలోను 5 కలదు.

మనం ఇప్పుడు దిగువ స్థానం అంటే వేల స్థానం చూసి సంఖ్యను పోలుస్తాం. వేలస్థానంలో గల అంకెలలో 877 కావున 58672 పెద్ద సంఖ్య అవుతుంది. అందుచేత 58672 > 57875.

ఒక వేళ వేల స్థానంలో గల అంకెలు కూడా సమానం అయితే ఏమి చేస్తావు? వందల స్థానంలో అంకెలను, తర్వాత పదుల స్థానంలో అంకెలు చివరిగా ఒకట్ల స్థానంలో అంకెలు పోల్చుతూ వెళ్ళాలి.

2.1.4 అంచనా వేయడం – సంఖ్యలను సమీప పదులు, వందలు, వేల స్థానాలను సవరించి రాయడం.

మనం నిత్యజీవితంలో దిగువనుదహరించిన కొన్ని సందర్భాల్లో సంఖ్యలను ఎలా ఉపయోగిస్తామో గమనించండి.

- నవంబరు నెలలో ఒకరోజు దాదాపుగా 60,000 మంది తిరుమలను సందర్శించారు.
- మన రాష్ట్రంలో ఈ సంవత్సరం ఎస్.ఎస్.సి. పబ్లిక్ పరీక్షలకు సుమారుగా 6 లక్షల మంది విద్యార్థులు హాజరగుతున్నారు.
- విశాఖపట్నం పోర్టులో ఈ మధ్యన ఒక నౌకలో (రమారమిగా) 43,500 టన్నుల ఇనుప ఖనిజం నింపారు.

పై ఉదాహరణలలో వాడిన పదాలు “దాదాపు”, “సుమారు”, “రమారమి”లతో ప్రజలు, విద్యార్థులు లేదా సామాగ్రిని ఒక అంచనా సంఖ్యగా తెలుపుట జరిగింది. కాని యదార్థంగా చూసినప్పుడు ప్రజల సంఖ్య కొంచెం తక్కువగా లేదా కొంచెం ఎక్కువగా ఉండవచ్చు. ఖచ్చితంగా 60,000 కానవసరం లేదు. ఈ విధంగా కొన్ని సంఖ్యలను వాటికి దగ్గరలోగల సంఖ్యలకు సవరించి రాయడం అనేది ఒక రకమైన అంచనాగా భావించవచ్చు.

అంచనా అనేది సమాధానాలను సులభంగా గుర్తించడానికి, సవరించడానికి సహాయ పడుతుంది.

మనం సాధారణంగా సంఖ్యలను దగ్గరగా గల 10, 100, 1000, 10000 .... మొదలగు స్థానాలకు సవరించి అంచనా వేస్తారు.

కింది సంఖ్యలను సమీప పదుల స్థానాలకు సవరించే విధానాన్ని పరిశీలించండి.

80 (81) 82 83 84 (85) 86 (87) 88 89 90

పై సంఖ్యలో గరిష్ట సంఖ్య 90, మధ్య సంఖ్య 85, కనిష్ఠ సంఖ్య 80.

- 81 సంఖ్య 90 కన్నా 80 కు దగ్గరగా కలదు. అందుచే 81కు పదులలో సవరించిన సంఖ్యను 80 అవుతుంది.

- 87 సంఖ్య 80 కన్నా 90 కు దగ్గరగా కలదు. అందుచే 87 కు పదులలో సవరించిన సంఖ్య 90 అవుతుంది.
- 85 సంఖ్య 80 కి, 90 కి సమాన దూరంలో ఉన్నది కదా! కాని సాంప్రదాయంగా మనం 85 ను 90గా సవరించి రాస్తాం.

సంఖ్యలను సమీప వందల స్థానాలకు సవరించే విధానాన్ని పరిశీలించండి.

200 210 220 230 240 250 260 270 280 290 300

- ఇందులో కనిష్ఠ సంఖ్య 200, గరిష్ఠ సంఖ్య 300, మధ్య సంఖ్య 250.
- 220 సంఖ్య వందలలో చూస్తే 300 కన్నా 200 సంఖ్యకు దగ్గరగా కలదు. అందుచే 220 కు సవరించే సంఖ్య 200 అవుతుంది.
- 280 సంఖ్య వందలలో చూస్తే 200 కన్నా 300 సంఖ్యకు దగ్గరగా కలదు. అందుచే 280 కు సవరించే సంఖ్య 300 అవుతుంది.

మనం ఇదే విధంగా వేలల్లో గల సంఖ్యలను కూడా సవరిస్తాం.

స్థాన విలువలపై అవగాహన కల్గించే పద్ధతి:

ఒక సంఖ్యకు స్థాన విలువల ప్రకారం ఏ విధంగా వివరించి రాయవచ్చో మనకు తెలుసు.

ఒకసారి రెండంకెల, మూడంకెల, నాల్గంకెల, అయిదు అంకెల సంఖ్యలను ఎలా విస్తరించాలో పునర్విమర్శ చేసుకుందాం.

1. 64ను విస్తరించండి

పదులు	ఒకట్లు
6	4

64 = 6 పదులు, 4 ఒకట్లు

$= 6 \times 10 + 4 \times 1$

$= 60 + 4$

2. 325 ని విస్తరించండి

325 =

వందలు	పదులు	ఒకట్లు
3	2	3

= (3×100) + (1×10) + (5×1)

= 300 + 20 + 5

3. 29,508 ని విస్తరించండి.

29,508 =	పదివేలు	వేలు	వందలు	పదులు	ఒకట్లు
	2	9	5	0	8

= $(2\times10,000) + (9\times1000) + (5\times100) + (0\times10) + (8\times1)$

= 20,000 + 9000 + 500 + 0 + 8

= 20,000 + 9000 + 500 + 8

దిగువ పట్టికలో ఇవ్వబడిన సంఖ్యలను చదివి, స్థాన విలువలతో విస్తరించి రాయండి. ఉదాహరణ పరిశీలించండి.

సంఖ్య	**విస్తరణ**	**విస్తరణ రూపం**
21504	$2\times10,000 + 1\times1000 +$ $5\times500 + 0\times10 + 4\times1$	20000 + 1000 + 500 + 4
38400		
77888		
20050		
41501		

అతి పెద్ద సంఖ్యల పరిచయం చేసే పద్ధతి:

అయిదు అంకెల సంఖ్యలన్నింటిలో పెద్ద సంఖ్య ఏది?

అయిదు అంకెల పెద్ద సంఖ్యకు 1 కలిపితే, ఏ సంఖ్య వస్తుంది?

అయిదు అంకెల పెద్ద సంఖ్య = 99,999.

దీనికి 1 కలిపితే 99,999 + 1 = 1,00,000 వస్తుంది.

ఈ సంఖ్యను ఒక లక్ష అంటారు. అంటే 99,999 తర్వాత వెంటనే వచ్చే సంఖ్య ఒక లక్ష అన్న మాట.

అనగా, 1,00,000 ఇప్పుడు చెప్పండి.

ఒక లక్షలో ఎన్ని పదులు ఉన్నాయి?

ఒక లక్షలో ఎన్ని వందలు ఉన్నాయి?

ఒక లక్షలో ఎన్ని వేలు ఉన్నాయి?

ఇప్పుడు ఆరు అంకెల సంఖ్యను విస్తరణ రూపంలో ఎలా రాస్తారో చూద్దాం.

ఉదాహరణకు 3,15,645 తీసుకోండి.

$$3,15,645 = 3\times1,00,000 + 1\times10,000 + 5\times1000 + 6\times100 + 4\times10 + 5\times1$$

$$= 3,00,000 + 10,000 + 5000 + 600 + 40 + 5$$

పట్టిక పరిశీలించండి:

లక్షలు	పదివేలు	వేలు	వందలు	పదులు	ఒకట్లు
3	1	5	6	4	5

ఈ సంఖ్యకు ఒకట్ల స్థానంలో '5', పదుల స్థానంలో '4', స్థానంలో '6', వేల స్థానంలో '5', పదివేల స్థానంలో '1' లక్షల స్థానంలో 3 ఉన్నాయని గమనించవచ్చు. ఇప్పుడు మనం ఈ సంఖ్యను మూడు లక్షల పదిహేను వేల ఆరు వందల నలభై అయిదు అని రాస్తాం.

సంఖ్యలో అన్ని అంకెలు '9' లు అయితే ఎటువంటి సంఖ్య వస్తుంది? దీనిని ఆరు అంకెల సంఖ్యలలో అతి పెద్ద సంఖ్య అనవచ్చా? అతిపెద్ద ఆరు అంకెల సంఖ్యను '1' కలపండి, ఏ సంఖ్య వస్తుందో చూడండి?

9,99,999 + 1 = 10,00,000 దీనిని 'పది లక్షలు' అంటారు.

9	+	1	=	10
99	+	1	=	100
999	+	1	=	1000
9999	+	1	=	....
99999	+	1	=	....
999999	+	1	=	....
9999999	+	1	=	1,00,00,000

ఏడు అంకెల అతిపెద్ద సంఖ్యకు '1' కలిపితే ఎనిమిది అంకెల సంఖ్యలలో అతి చిన్న సంఖ్య ఏర్పడిందని గమనించవచ్చు. ఈ సంఖ్యనే 'ఒక కోటి' అంటారు.

ఎనిమిది అంకెల అతి పెద్ద సంఖ్యకు '1' కలిపితే ఏ సంఖ్య వస్తుందో చెప్పగలరా?

విరామ చిహ్నాల (కామాల) వాడుక:

పెద్ద సంఖ్యలు రాసే సందర్భంలో, అప్పుడప్పుడు కామాలు వాడడం గమనించే ఉంటారు. హిందూ సంఖ్యామాన పద్ధతిలో మనం ఒకట్లు, పదులు, వందలు, వేలు, లక్షలు, కోట్లు వంటి స్థానాలను రాస్తాం. వేలను, లక్షలను, కోట్లను చదవడంలో కామాలు ఉపయోగిస్తాం. మొదటి కామాను వందల స్థానం తర్వాత (అంటే కుడి వైపు నుండి మూడంకెల తర్వాత) రాసి ముందు సంఖ్య అంతా 'వేలు' అని గుర్తిస్తాం. రెండవ కామాను మరి రెండు అంకెల తర్వాత అంటే పదివేల స్థానం తర్వాత (అంటే కుడి వైపు నుండి అయిదు అంకెల తర్వాత) రాసి ముందు సంఖ్య అంతా 'లక్షలు' అని రాస్తాం. మూడవ కామాను తిరిగి మరి రెండు అంకెల తర్వాత అంటే పదిలక్షల స్థానం తర్వాత (అంటే కుడి వైపు నుండి ఏడు అంకెల తర్వాత) రాసి ముందు మిగిలిన సంఖ్య అంతా 'కోట్లు' అని గుర్తిస్తాం. కామాలు పెద్ద సంఖ్యలను స్థానాల ఆకారం చదవడానికి, రాయడానికి ఉపయోగపడతాయి.

ఉదా: ఏడు కోట్ల నలభై అయిదు లక్షల పదిహేడువేల అయిదు వందలు సంఖ్యను కామాలతో ఎలా రాస్తామో గమనించండి.

7,45,17,500

ఇదే విధంగా కామాలతో విభజింపబడిన పెద్ద సంఖ్య. 45,30,14,252 ను నలభై అయిదుకోట్ల ముప్పై లక్షల పద్నాలుగు వేల రెండు వందల యాభై రెండు అని సులభంగా చదువవచ్చు.

అంతర్జాతీయ సంఖ్యామానం (ఆంగ్ల సంఖ్యామానం):

మనం సంఖ్యలను చదివే విధానం, రాసే విధానం ప్రపంచ దేశాలకు భిన్నంగా ఉంది. మనం 6 అంకెలుగల సంఖ్యలను 'లక్షలు' గానూ, 7 అంకెల సంఖ్యను 'పది లక్షలతో'నూ అదే విధంగా కోట్లు, పది కోట్లు అని తర్వాతి సంఖ్యలను చదువుతాం. కాని అంతర్జాతీయ సంఖ్యామాన పద్ధతి పద్ధతిలో ఒకట్లు, పదులు, వందలు, వలు, పదివేలు తర్వాత వందవేలు, మిలియన్లు అని చదువుతారు. ఒక మిలియన్ అంటే వేలు వేల లేదా 'పది లక్షలకు' సమానం. అదే విధంగా, పది మిలియన్లు 'వంద మిలియన్లు తర్వాత, ఒక బిలియన్ అంటారు. ఒక బిలియన్ అంటే వెయ్యి మిలియన్లకు సమానం. ఒకట్ల స్థానంతో మొదలిడి ప్రతి మూడు స్థానాల తర్వాత కామాలు వస్తాయి.

ఉదాహరణకు ఒక సంఖ్యను పరిశీలిద్దాం 45690255

హిందూ సంఖ్యామానం	**అంతర్జాతీయ (ఆంగ్ల) సంఖ్యామానం**
4,56,90,255	45,690,255
నాలుగు కోట్ల యాభై ఆరు లక్షల తొంభై వేల రెండు వందల యాభై అయిదు	నలభై ఐదు మిలియన్ల ఆరు వందల తొంభై వేల రెండు వందల యాభై అయిదు

రెండు సంఖ్యామాన పద్ధతులలో వందల స్థానం వరకు ఎటువంటి తేడా లేదని మీరు గమనించే ఉంటారు. మీరు పరిశీలించిన ఇతర అంశాలు చెప్పండి.

మన ఇప్పుడు ఒకసారి రెండు సంఖ్యామాన పద్ధతుల్లో స్థానాలను పోలుద్దాం.

హిందూ సంఖ్యామానం	వంద కోట్లు	పది కోట్లు	కోట్లు	పది లక్షలు	లక్షలు	పది వేలు	వేలు	వందలు	పదులు	ఒకట్లు
అంతర్జాతీయ (ఆంగ్ల) సంఖ్యామానం	బిలియన్	వంద మిలియన్లు	పది మిలియన్లు	మిలియన్	వంద వేలు	పది వేలు	వేలు	వందలు	పదులు	ఒకట్లు

పైన స్థానాల పట్టిక ఆధారంగా మనం ఈ సంఖ్యామానం మధ్య కొన్ని సంబంధాలను ఏర్పరచవచ్చు.

10 లక్షలు	=	1 మిలియన్
1 కోటి	=	10 మిలియన్లు
10 కోట్లు	=	100 మిలియన్లు
100 కోట్లు	=	1 బిలియన్

గమనిక: హిందూ(భారత) దేశం నుండి ఎనిమిదో శతాబ్ద ప్రారంభకాలంలో అరేబియాన్ దేశాలకు (ప్రధానంగా ఇప్పటి ఇరాక్) పరిచయం చేయబడ్డ దశాంశ సంఖ్యాపద్ధతి క్రమంగా పాశ్చాత్య దేశాలకు వ్యాప్తిచెందింది. ఆ దేశాల వారు ఈ సంఖ్యాపద్దతులను ప్రారంభంలో 'హిందూ–అరబిక్ సంఖ్యామానంగా' భావించారు.

అభ్యాసం

I. వ్యాసరూప ప్రశ్నలు

1. సంఖ్యా ధర్మాలను వివరించండి.
2. "ప్రధాన సంఖ్యల అవగాహన" అనే అంశాన్ని ఎలా బోధిస్తారో ఉదాహరణలతో తెలపండి.

II. లఘుసమాధాన ప్రశ్నలు

1. హిందు అరబిక్ సంఖ్యామానంలో '0' ప్రాముఖ్యతను వివరించండి.
2. స్థాన విలువలపై పిల్లలకు అవగాహన కల్పించటానికి కొన్ని కృత్యాలను రాయండి.
3. కింది సంఖ్యను హిందు సంఖ్యామానంలోను ఆంగ్ల సంఖ్యామానంలోను అక్షరాలలో రాయండి.

   (i) 223115027 (ii) 80643092

   (iii) 42356403 (iv) 10345028
4. కింది సంఖ్యను చదివి ప్రశ్నలకు జవాబు రాయండి.

   636,971,684

   (i) 'మిలియన్ల' స్థానంలో గల అంకె ....

   (ii) వందల స్థానంలో గల అంకె ....

   (iii) పది మిలియన్ల స్థానంలో గల అంకె ....

   (iv) సంఖ్యలో ఎన్ని మిలియన్లు ఉన్నాయి? ....

2.1.5 భిన్నాలు

పరిచయం:

నిత్యజీవితంలో పూర్ణవస్తువులే కాకుండా వస్తువులను భాగాలుచేసి, ఆ భాగాల విలువలు లెక్కగట్టి ఆ భాగాలను ఉపయోగించే సందర్భాలు అనేకం.

భిన్నాలను మొదట 'ఎమ్స్‌పాపిరస్' Ahmespapyrus (1550BC) అదే రాతప్రతిలో వాడినట్లు తెలుస్తుంది.

యూనిట్ భిన్నం (Unit fraction) ను ఈజిప్టులు మొదట ఉపయోగించినట్లు తెలుస్తుంది.

ఇప్పుడు ఉపయోగించే సామాన్య భిన్నాలను రాసే పద్ధతి ఇండియా (Hindus) లో వాడుకలో ఉన్న పద్ధతికీ దగ్గరగా ఉంది. బ్రహ్మగుప్త, (వ.శ 628), భాస్కర (వ.శ 1150) ప్రస్తుత "2/3" ని $\frac{2}{3}$ గా రాశారు. అరబ్బులు "—" ను పరిచయం చేశారు.

భిన్నం:

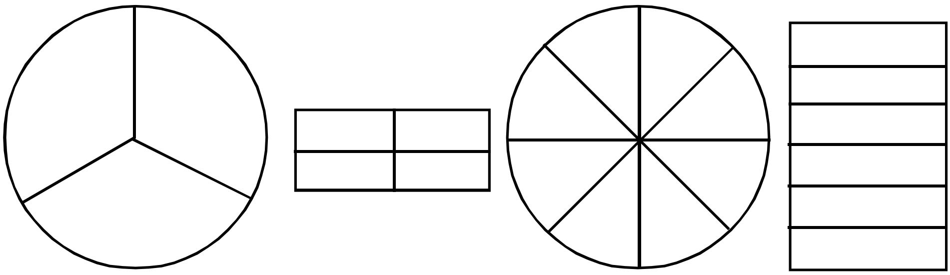
వస్తువును కొన్ని సమాన భాగాలుచేసి దాంట్లో కొన్ని భాగాలు తీసుకొన్నప్పుడు ఆ భాగాలను భిన్నాలు అంటారు.

ఉదా: ఒక వస్తువును నాలుగు సమాన భాగాలుగా విభజించి 3 భాగాలు తీసుకున్నప్పుడు వాటిని $\frac{3}{4}$ గా సూచిస్తాము. $\frac{3}{4}$ ఒక భిన్నం. దీనిని మనం "3 బై 4" అని చదువుతాము, దీనిలో 4 ఒక వస్తువును ఎన్ని సమాన భాగాలుగా విభజించబడిందో తెలిపే సంఖ్య. మరి 3 మనము తీసుకున్న లేదా ఎంచుకోబడిన సమాన భాగాల సంఖ్యను సూచిస్తుంది. దీనిలో 3 ను లవము అని, 4 ను హారము అని అంటారు.

భిన్నాల గురించి ప్రాథమిక భావనలు, భిన్నాలలో చతుర్విధ పరికర్మలు (పరిక్రియలు) చేయడం ప్రాథమిక స్థాయినుంచే సాగుతుంది. పిల్లలు పాఠశాలకు వచ్చేసరికే భిన్నాల గురించి కొంత తెలుసుకొని ఉంటారు. చపాతీ, రొట్టె, జామపండు, ఆపిల్ పండు, బిస్కట్లు, నిమ్మకాయ మొదలయిన వాటిని సమాన భాగాలు చేసి పంచుకోవడం తెలుసు. అర్థ భాగాలు, పావు భాగాలు చేసుకొంటారు. ఏ భాగం ఎక్కువో తెలుసు. అయితే వాటిని ఎలా రాయాలో, చదవాలో తెలియదు. 3వ తరగతి నుంచి భిన్నాలను పాఠ్యాంశంగా నేర్పడం జరుగుతోంది.

భిన్నాలను ఎలా నేర్పాలి?

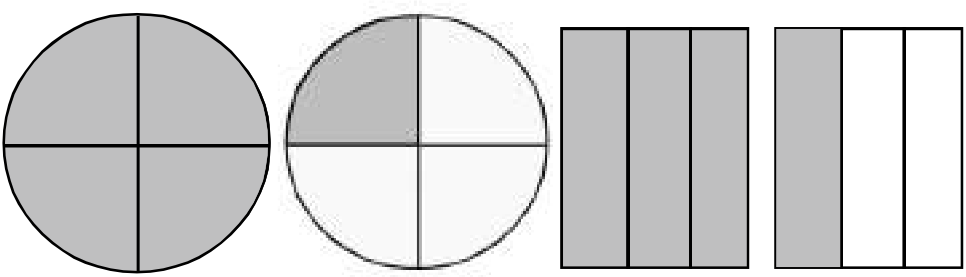
- భిన్నాలను రాయించడం, చదివించడం.
- భిన్నాలు రకాలను పరిచయం చేసేటప్పుడు కాగితం ముక్కలు, అట్టముక్కలు కత్తిరించడంగాని చింపటంగాని చేయించడం.



- వివిధ భాగాలు షేడ్ చేయడం.
- షేడ్ చేసిన భాగాన్ని చదివించడం ఇలా $\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{8}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}$ మొదలైన వాటిని క్రమభిన్నాలని గుర్తింపజేయడం.

అపక్రమ భిన్నాలు:

లవం ఎక్కువ, హారం త్కవగా ఉండే భిన్నాలను అపక్రమ భిన్నాలంటారు. వీటిని చిత్రరూపంలో తెలియజేస్తు, విద్యార్థులతో షేడ్ చేయించడం రంగులు వేయడం ద్వారా చేయవచ్చు.

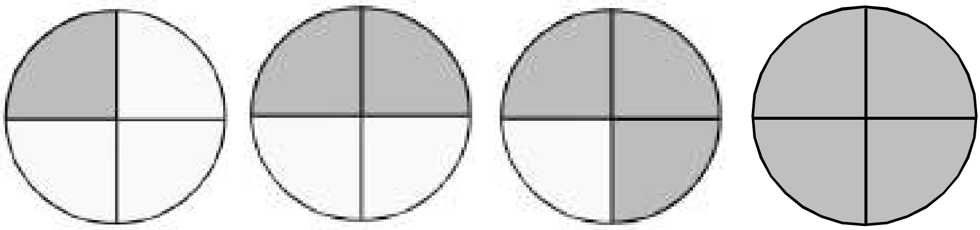


$\frac{4}{3}$

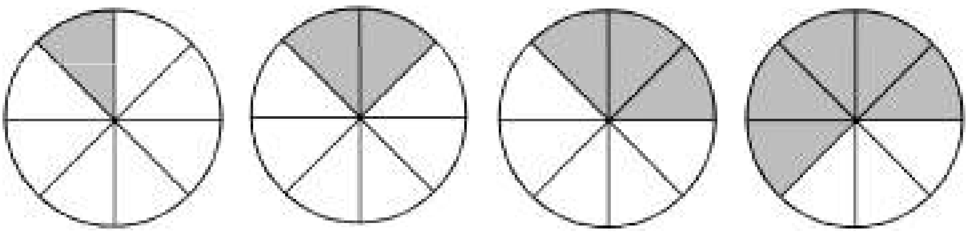
అపక్రమ భిన్నంలో ఒకటి పూర్తిగా గాని, ఒకటి కంటే ఎక్కువ వస్తువులు వినియోగించడం జరుగుతుందని గుర్తింపజేయాలి.

మిశ్రమ భిన్నం:

అపక్రమ భిన్నం మరొక రూపమే మిశ్రమ భిన్నం. ఇది అపక్రమ భిన్నంలోని పూర్ణ వస్తువులను, క్రమభిన్న భాగాన్ని తెలియజేస్తుంది.



$\frac{1}{4}$ $\frac{2}{4}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{4}{4}$



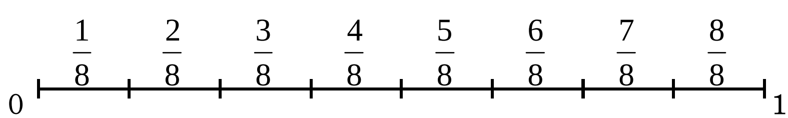
$\frac{1}{8}$ $\frac{2}{8}$ $\frac{3}{8}$ $\frac{5}{8}$

ఈ భిన్నాలను గమనిస్తే సజాతి భిన్నాల శ్రేణులని అర్థమవుతుంది. ఒక వస్తువును తీసుకొని కొన్ని సమాన భాగాలు చేసి వివిధ భాగాలు తీసుకొంటే సజాతి భిన్నాలు ఏర్పడతాయి.

$\frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{4}{4}$ ....

$\frac{1}{8}, \frac{2}{8}, \frac{3}{8}, \frac{4}{8}$ ....

సజాతి భిన్నాలలో హారలు సమానంగా ఉంటాయి. లవాలు మాత్రం వేరువేరుగా ఉంటాయి. సజాతి భిన్నాలను సంఖ్యారేఖపై ప్రదర్శించడం. ఈ రేఖను 8 సమాన భాగాలు చేయాలి.



ఒక భాగం తీసుకుంటే $\frac{1}{8}$

రెండు భాగాలు తీసుకుంటే $\frac{2}{8}$

మూడు భాగాలు తీసుకుంటే $\frac{3}{8}$

నాలుగు భాగాలు తీసుకుంటే $\frac{4}{8}$

ఐదు భాగాలు తీసుకుంటే $\frac{5}{8}$

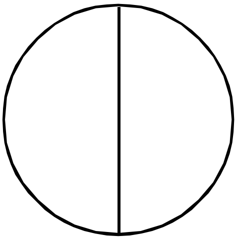
ఆరు భాగాలు తీసుకుంటే $\frac{6}{8}$

ఏడు భాగాలు తీసుకుంటే $\frac{7}{8}$

ఎనిమిది భాగాలు తీసుకుంటే $\frac{8}{8}$

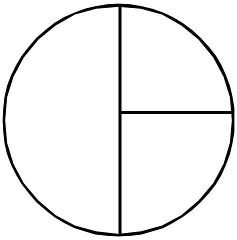
సమాన భిన్నాలు:

ఒక భిన్నాన్ని మళ్ళీ కొన్ని సమాన భాగాలు చేస్తే, వాటి మొత్తం మొదటి భిన్నానికి సమానం.



$$\frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$$

ఇది $\frac{1}{2}$ ను సూచించే భిన్నం, దీన్ని మళ్ళీ రెండు భాగాలుగా విభజిస్తే ఒక్కొక్క భాగం $\frac{1}{4}$ అవుతుంది.



ఈ $\frac{1}{4}$ భిన్నాన్ని మళ్ళీ కొన్ని సమాన భాగాలు చేస్తే, ఒక్కొక్క భాగం $\frac{1}{8}$ వ భాగం అవుతుంది.

గళ్ళ కాగితం (గ్రిడ్ పేపరు) పై దీనిని స్పష్టంగా ప్రదర్శించవచ్చు.

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}$$

$$= \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16}$$

<table>
<tr><td rowspan="4"></td><td colspan="8">$\frac{1}{2}$</td></tr>
<tr><td colspan="4">$\frac{1}{4}$</td><td colspan="4">$\frac{1}{4}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\frac{1}{8}$</td><td colspan="2">$\frac{1}{8}$</td><td colspan="2">$\frac{1}{8}$</td><td colspan="2">$\frac{1}{8}$</td></tr>
<tr><td>$\frac{1}{16}$</td><td>$\frac{1}{16}$</td><td>$\frac{1}{16}$</td><td>$\frac{1}{16}$</td><td>$\frac{1}{16}$</td><td>$\frac{1}{16}$</td><td>$\frac{1}{16}$</td><td>$\frac{1}{16}$</td></tr>
</table>

ఒక భిన్నానికి సమాన భిన్నం కావాలంటే లవహారాలను ఒకే సంఖ్యతో గుణించాలి.

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{2} = \frac{2}{4}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{3}{3} = \frac{3}{6}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{4}{4} = \frac{4}{8}$$

ఒక భిన్నంలోని లవహారాలను ఒకే సంఖ్యతో భాగిస్తే సమాన భిన్నం వస్తుంది.

$$\frac{4}{8} \div \frac{4}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{3}{6} \div \frac{3}{3} = \frac{1}{2}$$

భిన్నాలను పోల్చడం:

భిన్నాలను పోల్చడంలో విద్యార్థులను

- భిన్నంలో హారం ఎక్కువయితే విలువ తగ్గుతుందని గుర్తింపజేయాలి.
- లవాలు సమానంగా ఉన్నప్పుడు ఏ భిన్నం హారం పెద్దగా ఉంటుందో దాని విలువ తక్కువని గుర్తింపజేయాలి.

$\frac{1}{7}, \frac{1}{5}$ లలో $\frac{1}{5}$ పెద్దది.

$\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}$ భిన్నాలు ఉన్న పేపరు ముక్కలను ఒకదానిపై ఒకటి పెట్టి పోల్చడం ద్వారా పెద్ద చిన్న భిన్నాలను గుర్తింపజేయవచ్చు.

విద్యార్థులలో భిన్నాలపై అవగాహన పెంపొందించడానికి కొన్ని కృత్యాలు చేయించాలి.

Maths kit లోని భిన్నాల డిస్క్‌లోని $\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$ ముక్కలను ఒక దాని పై ఒకటి ఉంచి పోల్చడం ద్వారా కూడా పెద్ద, చిన్న భిన్నాలను గుర్తింపజేయవచ్చు.

సజాతి భిన్నాలను పోల్చినప్పుడు వాటి హారాలు సమానంగా ఉంటాయి. కాబట్టి దీని లవం ఎక్కువ ఉంటే అదే పెద్ద భిన్నం $\frac{2}{3}, \frac{3}{5}$ మొదలయిన విజాతి భిన్నాలను పొల్చాలంటే వాటి హారాలను సమాన పరచుకొని సజాతి భిన్నాలుగా మార్చి పోల్చవచ్చు.

సజాతి భిన్నాల సంకలనం:

$$\frac{1}{8} + \frac{2}{8} = \frac{3}{8}$$

సజాతి భిన్నాల సంకలనంలో లవాలను కలిపి అదే హారాన్ని రాయాలి.

సజాతి భిన్నాల వ్యవకలనం:

$$\frac{5}{8} - \frac{2}{8} = \frac{3}{8}$$

సజాతి భిన్నాల వ్యవకలనంలో లవాల భేదం రాసి అదే హారాన్ని తీసుకోవాలి.

విజాతి భిన్నాల సంకలనం, వ్యవకలనం:

హారాలు వేరువేరుగా ఉన్న విజాతి భిన్నాల సంకలనం, వ్యవకలనం ఈ పద్ధతిలో చేయాలి.

$\frac{2}{3} + \frac{3}{7}$ 3, 7 ల క.సా.గు. = 21

$\frac{2}{3} \times \frac{7}{7} \div \frac{3}{7} \times \frac{3}{3}$

$= \frac{14}{21} + \frac{9}{21}$

$= \frac{25}{21}$

- ఇచ్చిన భిన్నాల హారాల క.సా.గు. కనుక్కోవాలి.
- అన్ని భిన్నాలను ఆ క.సా.గు. హారంగా ఉన్న భిన్నాలుగా మార్చాలి. లవాల విలువలతో సంకలనం, వ్యవకలనం చేయాలి. వచ్చిన ఫలితాన్ని లవంగా, క.సా.గు ను హారంగా రాసుకోవాలి.

  మిశ్రమ భిన్నాల సంకలనం, వ్యవకలనం చేయాలంటే వాటిని అపక్రమ భిన్నంగా మార్చుకొని చేయాలి.

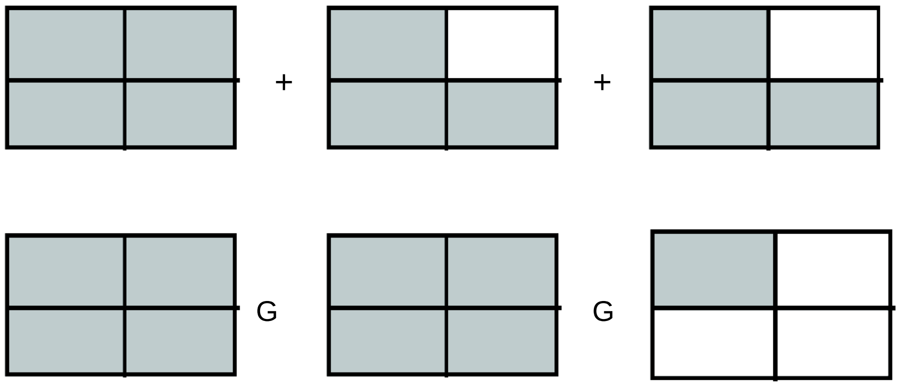
భిన్నాన్ని పూర్ణాంకంతో గుణించడం:

$\frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4}$

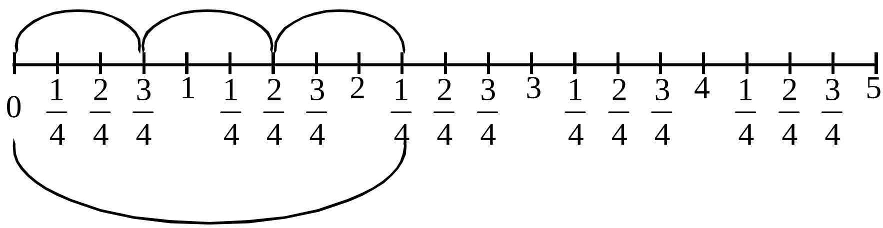
$= \frac{9}{4}$

$\frac{3}{4} \times 3 = 2\frac{1}{4}$

ఇట్లా షేడింగ్ ద్వారా చూపవచ్చు.



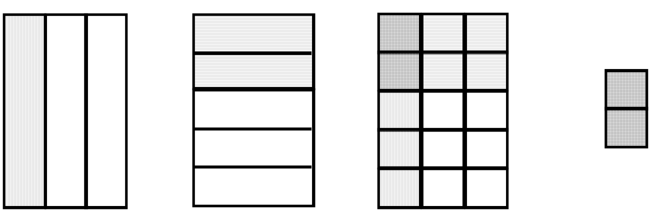
$esÐ: d¥U²«sK|™Õ{ ²¢#ä| ¥#ä.



$2\frac{1}{4}$

ఒక భిన్నాన్ని మరొక భిన్నంతో గుణించడం

$\frac{1}{3} \times \frac{2}{5} = \frac{2}{15}$ అంటే $\frac{1}{3}$ లో $\frac{2}{5}$ వ వంతు



ఈ షేడ్ సూచించే భాగం $\frac{2}{15}$ కు సమానం

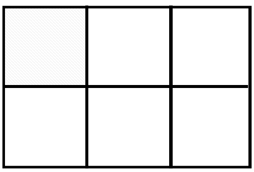
$\frac{1}{3}$ $\frac{2}{5}$ $\frac{2}{15}$

పటం – 1

భిన్నాల భాగహారం:

ఒక భిన్నాన్ని పూర్ణాంకంచే భాగించడం

$$\frac{1}{3} \div 2 = \frac{1}{6}$$



$\frac{1}{3}$ భాగాన్ని '/// ' గీతలతో చేశాం. తిరిగి ఈ భాగాన్ని రెండు భాగాలుగా విభజించడం ' 'ఈ గీతలతో షేడ్ చేయడం జరిగింది.

భిన్నాన్ని మరొక భిన్నంతో భాగించాలంటే మొదటి భిన్నాన్ని రెండవ భిన్నం విలోమంతో గుణించాలి.

దశాంశ సంఖ్యలు:

దశాంశ సంఖ్యా భావన:

హిందూ అరబిక్ సంఖ్యామానం '10' ఆధారం వుండే సంఖ్యామానం ఒక స్థానం నుంచి మరొక స్థానం కుడి నుంచి ఎడమకు పోయే కొలది పదిరెట్లు పెరుగుతుంది. ఒకట్ల స్థానం నుంచి కుడివైపు ఆలోచిస్తే ఇది '1' లో 10వ భాగం. ఆ తరువాత 100వ భాగంగా వుండాలి. అంటే ఒకట్ల స్థానం నుంచి కుడివైపుకు వెళితే 10వ భాగంగా తగ్గుతూ పోతుంది. ఈ సంఖ్యలనే దశాంశ సంఖ్యలు అంటారు.

పదివేలు	వేలు	వందలు	పదులు	ఒకట్లు	దశాంశం	శతాంశం	సహస్రాంశం	దశసహస్రాంశం
10000	1000	100	10	1	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{1000}$	$\frac{1}{10000}$

దశాంశ సంఖ్యల స్థానాలను పైన చూపినట్లు రాయవచ్చు. దశాంశ సంఖ్యలను అవగాహన చేయించడానికి ఘనాకారపు కడ్డీలను ఉపయోగించవచ్చు.

పది యూనిట్ల కడ్డీలో ఒక భాగం $\frac{1}{10}$ ని

రెండు భాగాలు $\frac{2}{10}$ ని

మూడు భాగాలు $\frac{3}{10}$ ని

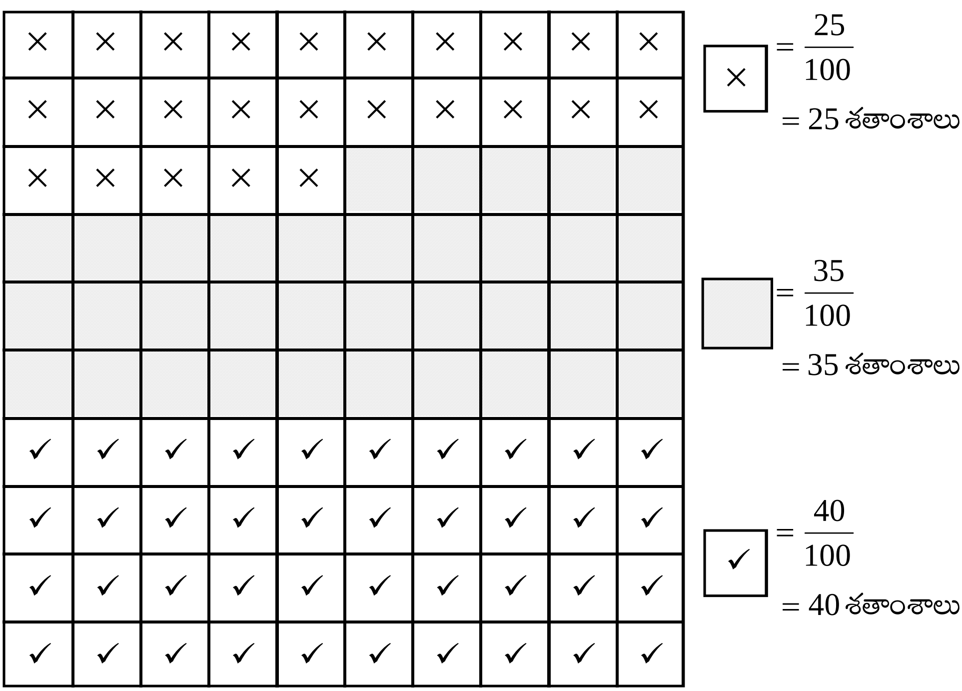
.... సూచిస్తాయని చెప్పవచ్చు.

పది యూనిట్ల కడ్డీలను పదింటిని వరసగా అమర్చి దాని పక్కన 1 యూనిట్ కడ్డీని వుంచితే అది $\frac{1}{100}$ కు సమానమని = 0.01 చెప్పవచ్చు.

2 యూనిట్‌ల కడ్డీలుంచితే అది $\frac{2}{100}$ కు సమానమని = 0.02 చెప్పవచ్చు. 10 యూనిట్‌ల కడ్డీ మొత్తం తీసుకొంటే $\frac{10}{100}$ కు సమానమని చెప్పవచ్చు.

$$\frac{10}{100} = 0.1$$

గళ్ళ కాగితాన్ని ఉపయోగించి కూడా దశాంశ సంఖ్యల భావన బోధించవచ్చు. 10×10 గళ్ళ పేపరుని తీసుకోవాలి. దీనిలో వివిధ భాగాలకు రంగువేస్తూ రంగువేసే భాగాలను శతాంశాలుగా చెప్పవచ్చు. ఒక వరుస తీసుకుంటే దశాంశమని అవగాహన పరచవచ్చు.



ఇట్లాగే వివిధ శతాంశాలను అవగాహన చేయవచ్చు. దశాంశం, శతాంశాలు పూర్ణ సంఖ్యల కంటే చాలా తక్కువ విలువలని అవగాహన అవుతుంది. పూర్ణసంఖ్యల విలువలతో వీటిని పోల్చాలంటే కృత్యాల ద్వారా చేసినప్పుడే అవి ఎంత చిన్న సంఖ్యలో విద్యార్థులు తెలుసుకుంటారు.

దశాంశ భాగాలు వున్న పూర్ణసంఖ్యలను రాసినప్పుడే పూర్ణసంఖ్యా భాగాన్ని దశాంశ సంఖ్యాభాగాన్ని వేరుపరుస్తూ బిందువు వుంచడం జరుగుతుంది.

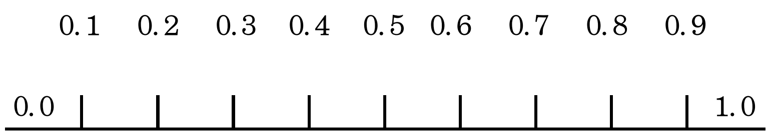
దశాంశ భాగంలోని అంకెలను స్థాన విలువలతో కాకుండా విడివిడి అంకెలుగా మాత్రమే చదవాలి.

ఒక సంఖ్య దశాంశ భాగం ఎప్పుడు 1 కంటే తక్కువ. ఒక దశాశం భిన్నం విలువ దాని చివర ఎన్ని సున్నాలుంచినా మారదు.

దశాంశ సంఖ్యలను పోల్చడం:

దశాంశ సంఖ్యలలో ఏది పెద్దదో, ఏది చిన్నదో నిర్ణయించటానికి సంఖ్యారేఖపై సులభంగా పోల్చవచ్చు. సంఖ్యారేఖపై ఒక సంఖ్య దాని కుడివైపు వున్న సంఖ్యలకంటే చిన్నది అని ఎడమవైపు వున్న సంఖ్య కంటే పెద్దదని తెలుసుకున్నాం. ఆ ధర్మం దశాంశ భిన్నాలకు కూడా వర్తిస్తుంది.

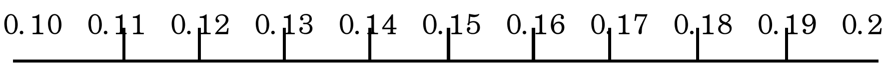
కింది పటంలో దశాంశ భాగాలను గుర్తించడం జరిగింది.



$0.1 < 0.2 < 0.3$ ....

$0.9 > 0.8 > 0.7$ ....

0, 1 ల మధ్య ప్రయాణాన్ని 100 సమాన భాగాలు చేస్తే శతాంశాలను కూడా సంఖ్యారేఖపై గుర్తించవచ్చు. కింది పటంలో 100 భాగాలు చేస్తే సంఖ్యారేఖపై 0.1, 0.2 మధ్య భాగాన్ని చూపడం జరిగింది.



$0.10 < 0.11 < 0.12$ ....

$0.20 > 0.19 > 0.18$ ....

సహస్రాంశాలను పొందటానికి సంఖ్యారేఖపై 0, 1 ల మధ్య భాగాన్ని 1000 సమాన భాగాలు చేయాలి.

రెండు దశాంశాలను పూర్ణసంఖ్యా భాగాన్ని ఒక దాని కింద ఒకటి రాయాలి. అట్లాగే దశాంశ భాగం కింద వచ్చేట్టు రాసుకోవాలి.

ఎడమ నుంచి మొదలుపెట్టి ఒక్కొక్క స్థానాన్ని పోల్చుకుంటూ పెద్ద, చిన్న నిర్ణయించాలి.

ఉదా: (1) 49.321

33.495

ఈ రెండు సంఖ్యలను పోల్చినప్పుడు 49 కంటే 33 చిన్నదని తెలుస్తుంది. కాబట్టి 49.321 > 33.495.

ఉదా: (2) 5.934

5.939

ఈ రెండు సంఖ్యలలో పూర్ణ సంఖ్యాభాగం రెండూ సమానం. తరువాతి రెండు స్థానాలు సమానం. సహస్రాంశం రెండవ సంఖ్యలో ఎక్కువ కాబట్టి 5.939 > 5.934.

మెట్రిక్ విధానం:

ఈ విధానం '10' ఆధారంగా వున్న సంఖ్యా విధానాన్నే అనుసరిస్తుంది. మెట్రిక్ యూనిట్ అయితే మీటరు / లీటరు / గ్రామును మన సంఖ్యా విధానంలోని ఒకట్ల స్థానంగా తీసుకొంటే మిగిలిన స్థానాలు, మిగిలిన ప్రమాణాలను పోలివుంటాయి.

వేలు	వందలు	పదులు	ఒకట్లు	దశాంశం	శతాంశం	సహస్రాంశం
1000	100	10	1	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{1000}$
కిలో	హెక్టా	డెకా	మీ/లీ/గ్రా	డెసి	సెం.మీ.	మి.మీ.

దశాంశ సంఖ్యలతో చతుర్విధ పరికర్మలు:

దశాంశ భిన్నాల సంకలనం, వ్యవకలనం, పూర్ణాంకాల సంకలనం, వ్యవకలనం లాగానే జరపవచ్చు. దశాంశ సంఖ్యలను స్థానాలను బట్టి ఒక దాని కింద ఒకటి రాసుకోవాలి. కలపడం లేదా తీసివేయడం చేయాలి.

ఉదా: 1) 35.432 + 23.942 ఎంత?

35.432
23.942

59.374

ఉదా: 2) 5.732 – 3.435 ఎంత?

5.732
3.435

2.297

దశాంశ సంఖ్యను పూర్ణాంకంతో గుణకారం:

దశాంశ భిన్నాలు పూర్ణాంకంచే గుణించినప్పుడు మొదట దశాంశ బిందువు లేదని భావించి సాధారణ గుణకారం చేయాలి. దశాంశ సంఖ్యలో, దశాంశ భాగాలు ఎన్ని వున్నాయో అన్ని ఎడమ నుంచి ఫలితంలో లెక్కించి బిందువునుంచాలి.

10,100, 1000 .... లతో గుణకారం:

దశాంశ సంఖ్యలను 10, 100, 1000 ..... వంటి సంఖ్యలచే గుణించేటప్పుడు ఈ సంఖ్యలో ఎన్ని సున్నాలున్నాయో లెక్కించి, దశాంశ సంఖ్యలో బిందువును అన్ని స్థానాలు కుడివైపుకు జరపాలి.

2.5324 × 100 = ?

100 లో రెండు సున్నాలున్నాయి. కాబట్టి ఫలితం 253.24

7.42 × 1000 = 7.420

ఇచ్చిన దశంశ సంఖ్యలో దశాంశ భాగాలు రెండు మాత్రమే మనం జరపాల్సిన స్థానాలు మూడు. కాబట్టి చివర '0' (సున్న) ఉంచవచ్చు.

దశాంశ సంఖ్యని దశాంశ సంఖ్యతో గుణించడం:

దత్త సంఖ్యలో దశాంశ బిందువు లేనట్లు భావించి సాధారణ గుణకారం చేయాలి.

రెండు సంఖ్యలలో మొత్తం ఎన్ని దశాంశ భాగాలున్నాయో గుర్తించాలి. లబ్దంలో కుడి నుంచి ఎడమకు లెక్కిస్తూ అన్ని స్థానాల తర్వాత బిందువునుంచాలి.

$2.25 \times 0.34 = ?$

$$\begin{array}{l} 900 \\ 675 \\ \hline 0.7650 \\ \hline \end{array}$$

దశాంశ సంఖ్యను పూర్ణాంకంతో భాగించడం:

ఒక దశాంశ భిన్నాన్ని పూర్ణాంకంతో భాగించడానికి సాధారణ పద్ధతిలో భాగహారం చేయాలి. విభాజ్యంలో దశాంశ బిందువు తరువాతి అంకెను దించుకునేటప్పుడు భాగఫలంలో దశాంశ బిందువునుంచాలి.

$34.65 \div 15 = ?$

$$\begin{array}{l} 15)\ 34.65\ (2.31 \\ \quad\ \ 30 \\ \hline \quad\ \ \ 46 \\ \quad\ \ \ 45 \\ \hline \quad\ \ \ \ 15 \\ \quad\ \ \ \ 15 \\ \hline \quad\ \ \ \ \ 0 \\ \hline \end{array}$$

దశాంశ సంఖ్యలను 10, 100, 1000 .... లతో భాగహారం చేయడం:

విభాజ్యంలో దశాంశ బిందువు ఉన్న స్థానం నుంచి, బిందువు ఎడమవైపుకు జరుపుకోవాలి అంటే భాజకంలో ఉన్న సున్నాల సంఖ్యను బట్టి ఎడమవైపుకు జరుపుకోవాలి. దత్తసంఖ్యలో ఎడమ వైపుకు కావలసినన్ని సంఖ్యలు లేకపోయినట్లయితే సున్నాలుంచి తరువాత దశాంశ బిందువును ఉంచాలి.

దశాంశ సంఖ్యను, దశాంశ సంఖ్యతో భాగించడం:

విభాజకంలోని దశాంశ భాగాన్ని పూర్ణభాగంగా మార్చుకోవాలి. దీని కోసం విభాజ్యాన్ని, విభాజకాన్ని తగిన సంఖ్యతో గుణించాలి. సాధారణ భాగహారంలో చేయాలి.

$0.3432 \div 0.26$

లవహారాలను 100 చే గుణిస్తే

$0.3432 \times 100 \div 0.26 \times 100$

$34.32 \div 26$

$= 1.32$

$$\begin{array}{l} 26)\ 34.32\ (1.32 \\ \quad\ \ 26 \\ \hline \quad\ \ \ 83 \\ \quad\ \ \ 78 \\ \hline \quad\ \ \ \ 52 \\ \quad\ \ \ \ 52 \\ \hline \quad\ \ \ \ \ 0 \\ \hline \end{array}$$

దశాంశ సంఖ్యను సామాన్య భిన్నంగా మార్చడం:

ఒక దశాంశ సంఖ్యను సామాన్య భిన్నంగా రాయటానికి దశాంశ బిందువును తొలగించి ఏర్పడిన సంఖ్యను లవంగా రాసి, దశాంశ భాగంలో ఎన్ని స్థానాలున్నాయో అన్ని సున్నాలను ఒకటి తరువాత వుంచి హారంగా రాసుకోవాలి.

ఉదా: (1) 0.25 $= \frac{25}{100}$

ఉదా: (2) 0.372 $= \frac{372}{1000}$

సామాన్య భిన్నాలను దశాంశ సంఖ్యలుగా మార్చడం:

భిన్నంలోని లవాన్ని, హారంచే భాగిస్తూ విభాజ్యంలో అంకెలన్నీ అయిపోయినా, శేషం ప్రక్కన '0' వుంచడం. భాగఫలంలో దశాంశ బిందువు నుంచి భాగహారాన్ని శేషం '0' వచ్చేదాకా కొనసాగించాలి.

ఉదా: 1) $10\frac{3}{1000}$ ని దశాంశ రూపంలోకి మార్చండి.

$$\frac{10\times1000+3}{1000} = \frac{10003}{1000}$$

```
1000) 10003 (1.003
      1000
      ----
         3000
         3000
         ----
            0
```

ఉదా: 2) $12\ \frac{2}{25}$ ని దశాంశ రూపంలోకి మార్చండి.

$$\frac{12\times25+2}{25} = \frac{300+2}{25}$$

$$= \frac{302}{25}$$

= 12.08

```
25) 302 (12.08
    25
    --
     52
     50
     --
      200
      200
      ---
        0
```

నియోజనాలు:

1. భిన్నాల గురించిన ప్రాథమిక భావనలు విద్యార్థికి నిత్యజీవితంలో కనిపించే సందర్భాలు తెలపండి.
2. భిన్నాల రకాలను పరిచయం చేసే విధానం రాయండి.
3. భిన్నాలలో వివిధ భావనలను అవగాహన పరచడానికి కొన్ని కృత్యాలు తయారుచేయండి.
4. భిన్నాల కూడిక, తీసివేతలను అభ్యాసం చేయడానికి స్వయం అభ్యసన కృత్యాలు కొన్ని తెలపండి.
5. భిన్నాల కూడిక, తీసివేత, గుణకార, భాగహారాలలో విద్యార్థులు చేసే కొన్ని తప్పులను గుర్తించండి. వాటిని ఎలా సరిదిద్దుతారు?

2.1.6. శాతాలు:

100 హారంగా ఉన్న భిన్నాలను శాతాలంటారు.

$\frac{5}{100}, \frac{8}{100}, \frac{10}{100}, \frac{21}{100}$ శాతాలకు ఉదాహరణలు

చాలా విషయాలను పోల్చేటప్పుడు '100' కి మార్చి చెబితే సులభంగా పోల్చడానికి వీలవుతుంది. '100' కి తెలపడాన్నే శాతం అంటారు. 'శత' అంటే '100' శాతం అంటే 100కి అని భావం శాతాలు కూడా భిన్నాలలో ఒక వర్గమే. శాతాన్ని సూచించడానికి % గుర్తును ఉపయోగిస్తారు.

$\frac{5}{100}$ అంటే 5% $\frac{45}{100}$ అంటే 45% అని తెలియజేయవచ్చు.

అట్లే 30 శాతం అంటే $\frac{30}{100} = 0.3$

గ్రిడ్ పేపరు ద్వారా శాతాన్ని బాగా అవగాహన పరచవచ్చు.

కృత్యం: గళ్ళ కాగితంలో 10 × 10 = 100 చదరపు గదులలొ పటంలో చూపిన విధంగా వివిధ సంఖ్యల్లో గదులకు గుర్తులుంచడం గాని, రంగులు వేయడంగాని చేయాలి. ఒక్కొక్క భాగాన్ని శాతంలో తెలపడం చేయించాలి.

×	×	×	×		✓	✓	O	O	O
×	×	×	×		✓	✓	O	O	O
×	×	×	×		✓	✓	O	O	O
×	×	×	×		✓	✓	O	O	O
×	×	×	×		✓	✓	O	O	△
×	×	×			✓	O	O	O	△
×	×	×			✓	O	O	O	△
×	×	×			✓	O	O	O	△
×	×	×			✓	O	O	O	△
×	×	×			✓	O	O	O	△

× భాగం = $= \frac{35}{100} = 35\%$

□ భాగం = $= \frac{15}{100} = 15\%$

✓ భాగం = $= \frac{14}{100} = 14\%$

O భాగం = $= \frac{30}{100} = 30\%$

△ భాగం = $= \frac{6}{100} = 6\%$

ఏది ఎక్కువో, తక్కువో పోల్చడం ఇప్పుడు సులభం అవుతుంది.

సామాన్య భిన్నాన్ని శాతంగా తెలపడం:

ఉదా: $\frac{3}{4}$ ను శాతంగా రాయండి.

శాతం అంటే 100కి అని అర్థం అంటే 100 హారంగా వున్న భిన్నం 4ను 100గా మార్చాలంటే లవ, హారాలను 25తో గుణించాలి.

$$\frac{3}{4} \times \frac{25}{25}$$

$$= \frac{75}{100} = 75\%$$

దీన్నే $\frac{3}{4} \times 100 = 3 \times 25$

$= 75\%$ అని కూడా చేయవచ్చు.

ఒక సామాన్య భిన్నాన్ని శాతంగా మార్చడానికి ఆ భిన్నాన్ని 100తో గుణించి లబ్దానికి విలువలను శాతాల రూపంలో తెలపడం వల్ల పోల్చడం సులభం. శాతాన్ని % సంకేతంతో తెలుపుతారు. వస్తువుల రాశుల పరిమాణాలను అంచనా వేయడానికి శాతాలు ఉపయోగపడతాయి.

వడ్డీరేటును శాతంలో తెలుపుతారు. జనాభా, ఆదాయం, ఎగుమతులు, దిగుమతులు, వర్షపాతం, సంస్థలోని విద్యార్థుల హాజరు, వారు సాధించిన ఫలితాలు, మార్కులు మొదలయిన వాటిని ఎక్కువగా శాతాలలో తెలుపుతారు. దీనివల్ల పెరుగుదల, తగ్గుదలను అంచనా వేయడం సులభం. ఒక వ్యక్తి ఆదాయం సంవత్సరానికి 10% పెరిగింది.

ఒక పాఠశాలలో హాజరు శాతం 5% తగ్గింది అని, ఫలితాలు 20% పెరిగాయని శాతాలలో తెలుపుతారు.

సామాన్య భిన్నాన్ని శాతంగా మార్చడానికి భిన్నాన్ని 100తో గుణించి, సూక్ష్మీకరించి, శాతం సంకేతాన్ని $\%$ను ఫలితంతో ఉంచాలి.

శాతాన్ని సామాన్య భిన్నంగా మార్చడానికి భిన్నాన్ని 100తో గుణించి, సూక్ష్మీకరించి, శాతం సంకేతాన్ని $\%$ను ఫలితంతో వుంచాలి.

శాతాన్ని సామాన్య భిన్నంగా మార్చడానికి $\%$ ను తీసివేసి 100తో గుణించి సూక్ష్మీకరించాలి.

ఉదా: $\frac{2}{5}$ ను శాతాలలో తెలపండి.

$$\frac{2}{5}\times 100$$

$$= 2 \times 20; = 40\%$$

ఉదా: 0.5 ను శాతంగా తెలపండి.

$$0.5 = \frac{5}{10}$$

$$= \frac{5}{10} \times 100$$

$$= 50\%$$

ఉదా: 8%, 20% లను భిన్నాలుగా మార్చండి.

$$8\% = \frac{8}{100}$$

$$= \frac{2}{25}$$

$$20\% = \frac{20}{100}$$

$$= \frac{1}{5}$$

ఉదా: 15% ను దశాంశ రూపంలో తెలపండి.

$$15\% = \frac{5}{100}$$

$$= \frac{3}{20}$$

$$= 0.15$$

ఒక రాశిని ఇంకొక రాశిలో శాతంగా తెలపడం.

15ను 60లో శాతంగా రాయండి.

$$\frac{15}{60} \times \frac{100}{100} = \frac{1}{4} \times \frac{100}{100} = 25\%$$

40 లీటర్లలో 20 లీటర్లను శాతంగా రాయండి.

$$\frac{20}{40} \times \frac{100}{100} = 2 \times \frac{100}{100} = 50\%$$

సమాన భిన్నాలకు స్నాప్ ఆట:

సామగ్రి: $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}$ ఇట్లా వివిధ భిన్నాల కార్డులు ఒక సెట్. వీటి సమాన భిన్నాల కార్డులు 4 సెట్లు.

విధానం: విద్యార్థులను నాలుగు జట్లు చేయాలి. జట్టుకొక సమాన భిన్నాల సెట్‌నివ్వాలి వారికి ఇచ్చిన భిన్నాలను జాగ్రత్తగా పరిశీలించమనాలి. ఉపాధ్యాయుడు తన దగ్గర ఉండే భిన్నాలలో ఒకటి చదవుతాడు. వెంటనే జట్లలోని వారు ఎవరు మొదట దాని సమాన భిన్నాన్ని కనుగొంటారో వారిని స్నాప్ అంటారు. వారి జవాబు సరైనదైతే వారికే ఈ కార్డు ఇచ్చివేయాలి. ఇలాగే ఆటను కొనసాగించాలి.

జతపరిచే ఆట:

2.86 + 3.42	6.28
1.35 + 6.34	7.69
23.42 + 2.52	25.94

ఇలాంటి ప్రశ్న, జవాబు కార్డులను ఒక సెట్ చేసుకోవాలి. ప్రశ్నల కార్డులను విద్యార్థులకు పంచాలి. జవాబు కార్డులను నేలపై పరిచి ఉంచాలి. విద్యార్థులను వారి ప్రశ్న కార్డులకు సమానమయ్యే జవాబును వెతికి జతపరచాలి.

అభ్యాసం

I. వ్యాసరూప ప్రశ్నలు

1. ఒక వ్యక్తి మొత్తం ఆస్థి విలువ రూ. 1,50,000/- ఇందులో అతను 30% భార్యకు, 55% కుమారునికి మిగిలినది ధర్మకార్యాలకు చెందేటట్లు వీలునామా రాశాడు. ఒక్కొక్కరికి ఎంత సొమ్ము వస్తుంది?

2. ఒక పాఠశాలలో విద్యార్థుల సంఖ్య 680. వీరిలో 25% మంది వెనుకబడిన తరగతులకు, 20% మంది షెడ్యూల్డ్ కులాలకు, 5% మంది షెడ్యూల్డ్ తెగలకు చెందుతారు. మిగిలిన వారు ఇతర జాతులకు చెందిన వారు. ఒక్కొక్క వర్గానికి చెందిన విద్యార్థులు ఎంతమంది?

II. లఘుసమాధాన ప్రశ్నలు

1. ఒకరి ఆస్తిలో $16\frac{2}{3}\%$ విలువ 32,000 అయితే $66\frac{2}{3}\%$ విలువ ఎంత?

2. ఒక టన్నులో 25 కి.గ్రా.లు .... శాతం.

3. ఒకరి ఆస్తిలో $33\frac{1}{3}\%$ విలువ రూ. 18,000 అయితే ఆస్తి విలువ ....రూ.

4. ఒక సంఖ్యలో 50% నికి 5 కలిపిన 30 వస్తుంది. అయితే ఆ సంఖ్య ఏది?

5. 52 ఏ సంఖ్యలో $6\frac{1}{4}\%$ నికి సమానమవుతుంది?

6. $\frac{1}{2}$లో $50\% \div 0.25 \div 14 = ?$

7. ఏ సంఖ్యలో 26%, 234 అవుతుంది?

2.1.6.1 శాతాల వినియోగం:-

ఒక రాశిలో పెరుగుదల × శాతము అయితే ఆ రాశి పెరిగిన విలువ కనుక్కోవడానికి దానిని $\left(\frac{100+x}{100}\right)$తో గుణిస్తాము.

ఒక్క రాశిలో తగ్గుదల $x\%$ అయితే ఆ రాశి తగ్గిన విలువ కనుక్కోవడానికి ఆ రాశిని తో $\left(\frac{100-x}{100}\right)$ గుణిస్తాము.

లాభనష్టములు:

1. పదములు – క్లుప్తంగా వ్రాసే విధము

   కొన్న ఖరీదు – కొ.ఖ – C.P లేదా C

   అమ్మిన ఖరీదు – అ.ఖ – S.P లేదా S

   లాభము – లా. – P

   నష్టము – న. – L

   లాభశాతము – లా.శా – p%

   నష్టశాతము – l%

2. లాభము = అమ్మిన ఖరీదు – కొన్న ఖరీదు .. P = S - C

   అమ్మిన ఖరీదు = కొన్న ఖరీదు + లాభము S = C + P

   కొన్న ఖరీదు = అమ్మిన ఖరీదు – నష్టము C = S - P

3. నష్టము = కొన్న ఖరీదు – అమ్మిన ఖరీదు L = C - S

   అమ్మిన ఖరీదు = కొన్న ఖరీదు – నష్టము S = C - L

   కొన్న ఖరీదు = అమ్మిన ఖరీదు + నష్టము C = S + L

4. లాభశాతము = $\frac{\text{లాభము}}{\text{కొన్న ఖరీదు}}\times 100$ $p\% = \frac{p}{c}\times 100$

   నష్టశాతము = $\frac{\text{నష్టము}}{\text{కొన్న ఖరీదు}}\times 100$ $p\% = \frac{l}{c}\times 100$

5. అమ్మిన ఖరీదు = కొన్నఖరీదు × $\frac{(100 + \text{లా.శా.})}{100}$

లేక = $\text{కొన్నఖరీదు} \times \left(1 \times \frac{\text{లా. శా.}}{100}\right)$ $S = C\left(1 + \frac{p\%}{100}\right)$

అమ్మిన ఖరీదు = $\text{కొన్నఖరీదు} \times \frac{\left(100 - \text{న. శా.}\right)}{100}$

లేక = $\text{కొన్నఖరీదు} \times \left(1 - \frac{\text{న. శా.}}{100}\right)$ $S = C\left(1 - \frac{l\%}{100}\right)$

6. కొన్న ఖరీదు = $\text{అమ్మినఖరీదు} \times \frac{100}{100 + \text{లా. శా.}}$ $S = C \times \left(\frac{100}{100 + p\%}\right)$

కొన్న ఖరీదు = $\text{అమ్మినఖరీదు} \times \frac{100}{100 - \text{న. శా.}}$ $S = C \times \left(\frac{100}{100 - l\%}\right)$

ఉదా: 1) ఒక టెలివిజన్ రూ. 5000/– లకు కొని రూ. 6000/– కు అమ్మితే లాభశాతమెంత?

కొన్నవెల	=	రూ. 5000
అమ్మినవెల	=	రూ. 6000
లాభం	=	రూ. 6000 – రూ.5000
	=	రూ. 1000

లాభశాతం = $\frac{\text{లాభం}}{\text{కొన్నవెల}} \times 100 \quad = \frac{1000}{5000} \times 100 = 20\%$

ఉదా: 2) ఒక యంత్రాన్ని రూ. 10000 కు కొని అవసర నిమిత్తం రూ. 9000 కు అమ్మితే వచ్చిన నష్టశాతం ఎంత?

కొన్నవెల	=	రూ. 10,000
అమ్మినవెల	=	రూ. 9,000
నష్టం	=	రూ. 10,000 – రూ.9000
	=	రూ. 1000

లాభశాతం = $\frac{\text{నష్టం}}{\text{కొన్నవెల}} \times 100 \quad = \frac{1000}{10000} \times 100 = 10\%$

ఉదా: 3) ఒక వ్యక్తి సైకిలు కొన్న వెల రూ. 1400/-. దాని మీద 10% లాభం వేసుకొని అమ్మితే, అమ్మినవెల ఎంత?

సైకిల్ కొన్నవెల = రూ. 1400

లాభం = రూ. 10%

$$\text{లాభశాతం} = \frac{100+\text{లాభశాతం}}{100} \times \text{కొన్నవెల} = \frac{(100+10)}{100} \times 1400$$

$$= \frac{110 \times 1400}{100} \times 1540 \text{ రూ.}$$

ఉదా: 4) ఒక వ్యక్తి సైకిల్‌ను రూ. 1188 లకు అమ్మాడు. దానిపై 10% లాభం వేస్తే ఆ సైకిల్ కొన్న వెల ఎంత?

అమ్మిన వెల = రూ. 1188

లాభం = 10%

$$\text{లాభశాతం} = \frac{100}{100+\text{లాభశాతం}} \times \text{అమ్మినవెల} = \frac{100}{(100+10)} \times 1188$$

$$= \frac{100}{110} \times 1188 = 1080 \text{ రూ.}$$

అభ్యాసం

సంక్షిప్త ప్రశ్నలు

1. రహీమ్ 100 మామిడి పండ్లను రూ. 75కు 100 మామిడి పండ్ల చొప్పున కొన్నాడు. ఇందులో 12% పాడైపోయాయి. మిగిలిన వాటిని అతను డజను రూ. 15లు అమ్మితే లాభమా? నష్టామా? ఎంత శాతం?
2. ఒకడు రెండు సైకిళ్ళను ఒక్కక్కటి రూ. 1250కు కొని మొదటి సైకిల్‌ను 8% లాభానికి, రెండవ దానిని 4% నష్టానికి అమ్మాడు. మొత్తం మీద అతనికి నష్టమా? లాభమా? ఎంత శాతం?
3. ఒకడు ఇంటిని రూ. 1,75,000/- కు కొని దానిపై రూ. 25,000/- మరమ్మత్తులకు ఖర్చుపెట్టారు. అతనికి 5% లాభం రావాలంటే ఇంటిని ఎంతకు అమ్మాలి?
4. Aఒక వస్తువును రూ. 100కు కొని, A కి 10% లాభంతో అమ్మాడు. B కి 10% లాభంతో అమ్మాడు. B అదే వస్తువును C కి 10% నష్టంతో అమ్మాడు. ఆ వస్తువుకు C ఇవ్వవలసిన సొమ్మెంత?

5. ఒకడు తన దగ్గరున్న సరుకులో $\frac{2}{3}$ భాగం 15% లాభానికి, మిగిలిన సరుకును 6% నష్టానికి అమ్మాడు. మొత్తం మీద అతనికి లాభమా? నష్టామా? ఎంత శాతం?

6. ఒక యంత్రం ఖరీదు ప్రతి సంవత్సరం కిందటి సంవత్సరం ఖరీదులో 20% తగ్గుతోంది. మూడు సంవత్సరాల తర్వాత దాని ఖరీదు రూ. 51200. అయితే మొదటి దాని ఖరీదు ఎంత?

7. ఒక వ్యాపారి బియ్యం కొని 10% లాభానికి అమ్ముతున్నాడు. అదేకాకుండా అతడు ఉపయోగించే తూకపురాయి నిజ బరువు కన్నా 20% తక్కువ ఉన్నది. మొత్తం మీద వ్యాపారికి వచ్చు లాభమెంత?

8. ఒక వ్యాపారి ఒక రకం మామిడి పండ్లను రూపాయికి 3 చొప్పున కొన్నాడు. రెండవ రకం రూపాయకు 4 చొప్పున మొదటి రకం ఎన్ని కొన్నాడో అన్ని మామిడి పండ్లు కొన్నాడు. వాటిని కలిపి రూపాయకు 3 చొప్పున అమ్మాడు. ఈ వ్యాపారంలో అతనికి లాభమా? నష్టమా? ఎంత శాతం?

నియోజనాలు:

1. లాభనష్టాలకు సబంధించి రోల్ ప్లేను తయారుచేయండి.

2. 'లాభనష్టాలకు' సంబంధించి విద్యార్థులకు ఉండవలసిన పూర్వ సామర్థ్యాల జాబితాను తయారుచేయండి. ఆ పూర్వ సామర్థ్యాల ఆధారంగా పునర్విమర్శ అభ్యాసాన్ని తయారుచేయండి.

3. 'లాభనష్టాలు' అధ్యాయాన్ని చదివి అందులో వచ్చే కీలక భావాల జాబితాను తయారుచేయండి.

రుసుము (Discount)

ప్రకటనవెల = అసలు వెల + పెంచిన లాభము

ప్రకటన వెలను ప్రకటిత వెల లేక కేటలాగు ధర లేక లిఖిత మూల్యం అని కూడా అంటాము.

ప్రకటనవెలపై కొంత తగ్గించి అమ్ముతారు. అలా తగ్గించిన విలువను రుసుము అంటాము. దీనినినే వర్తకరుసుము, ముదరా లేక పట్టము అని కూడా అంటాము.

రుసుము = ప్రకటన వెల – అమ్మిన వెల

రుసుమును ప్రకటన వెలపై శాతముగా తెలుపుతాము.

రుసుమును ఎల్లప్పుడూ ప్రకటన వెలపై గణిస్తాము.

$$\text{అమ్మినవెల} = \text{ప్రకటనవెల} \times \frac{100 - \text{రుసుముశాతం}}{100}$$

$$\text{ప్రకటనవెల} = \text{అమ్మినవెల} \times \frac{100 - \text{రుసుముశాతం}}{100}$$

అమ్మకమునకు ప్రతినిధిగా ఉండిన వ్యక్తి తీసుకొను ప్రతిఫలమును దళారి రుసుము కమీషన్ అంటాము.

సరుకులు కొన్నప్పుడు మొత్తం పెట్టుబడి

= కొన్న ఖరీదు + దళారి రుసుము

సరుకులు అమ్మినప్పుడు నికర అమ్మకపు ధర

= అమ్మకపుధర – దళారి రుసుము.

కమీషన్ ఎప్పుడూ వస్తువుల అమ్మకపు వెలపై లెక్కకడతాము.

$$\text{ప్రకటనవెల} = \text{అమ్మినవెల} \times \frac{(100+ \text{ వేసుకున్న లాభశాతం})}{100}$$

$$\text{అమ్మినవెల} = \frac{\text{ప్రకటనవెల} \times 100}{100+\text{వేసుకున్న లాభశాతం}}$$

ఈ కింది సమస్యలను గమనించండి.

ఉదా: 1) ఒక వస్తువు ప్రకటిత వెల రూ. 450. ముదరా 8% అయితే ముదరా ఎంత?

ప్రకటిత వెల = రూ. 450

ముదరాశాతం = 8

$$\text{ముదరా} = \text{ప్రకటనవెల} \times \frac{\text{ముదరాశాతం}}{100} = 450 \times \frac{8}{100} = 36 \text{ రూ.}$$

ఉదా: 2) ఒక వస్తువు ప్రకటన వెల రూ. 250 ముదరా 10% అయితే ఆ వస్తువును అమ్మిన వెల ఎంత?

ప్రకటనవెల = రూ. 250, ముదరాశాతం = 10

$$\text{అమ్మినవెల} = \frac{100 - \text{ముదరాశాతం}}{100} \times \text{ప్రకటటితవెల} = \frac{100-10}{100} \times 250$$

$$= \frac{90}{100} \times 250 = 225 \text{ రూ.}$$

ఉదా: 3) ఒక యంత్రం ప్రకటన వెల రూ. 36000. దానిని 10% ముదరా ఇచ్చి అమ్మితే 4% నష్టం వచ్చింది. అయితే యంత్రం కొన్నవెల (గిట్టుబాటు వెల) ఎంత?

సాధన: యంత్రం ప్రకటన వెల = రూ. 36000/- , ముదరాశాం = 10

$$\text{యంత్రం అమ్మినవెల} = \text{ప్రకటటితవెల} \times \left(\frac{100 - \text{ముదరాశాతం}}{100} \right)$$

$$= 36000 \times \frac{100-10}{100}$$

$$= 36000 \times \frac{90}{100}$$

$$= \text{రూ. } 32,400/-$$

యంత్రంపై వచ్చిన నష్టం= 4%

$$\text{యంత్రం కొన్నవెల} = \text{అమ్మినవెల} \times \frac{100}{100-\text{నష్టశాతం}}$$

$$= 32400 \times \frac{100}{100-4} = 32400 \times \frac{100}{96}$$

$$= 2025 \times \frac{100}{6}$$

$$= 675 \times \frac{100}{2} = 33,750$$

1. ముదరాపై విద్యార్థులకు పూర్తి అవగాహన ఏర్పడటానికి తగిన కృత్యాలు ఇవ్వాలి.
2. ఉదాహరణకు పండగ సమయాలలో వివిధ వస్తువులపై వివిధ రకాల దుకాణదారులు ప్రకటించు ముదరాలుకు సంబంధించిన ప్రకటనలను దినపత్రికలద్వారా సేకరించి తరగతిగదిలో చర్చించడం.

అభ్యాసం

సంక్షిప్త ప్రశ్నలు

1. ఒక సైకిలు ప్రకటన వెల రూ. 1500/-. అమ్మకపు వెల రూ. 1350/- ముదరా శాతం ఎంత?
2. ఒక వస్తువు అమ్మిన వెల రూ. 289/-. ముదరా 15% అయితే ఆ వస్తువు ప్రకటిత వెల ఎంత?
3. ఒక ఉత్పత్తిదారుడు ప్రకటన వెలపై టోకు వ్యాపారులకు $16\frac{2}{3}\%$ ముదరా ఇచ్చి అమ్ముతున్నాడు. రూ. 1500 ప్రకటిత వెల ఉన్న వస్తువు అమ్మకపు వెల ఎంత?
4. ఒక ఫ్యాక్టరీ వారు ఒక రేడియోను రూ. 1020 కు ప్రకటించి 15% ముదరా ఇచ్చి అమ్మి 2% లాభం పొందుతున్నారు. రేడియో తయారైన వెలపై ఎంత శాతం అధికంగా ప్రకటిత వెల నిర్ణయించడం జరిగింది?

5. ఒక ఫ్యాక్టరీ వారు తాము తయారుచేసే సరుకులపై తయారీ వెలలో కంటే 25% అధికంగా వెలలు నిర్ణయిస్తున్నారు. 8% లాభం ఉండాలంటే వారెంత ముదరా ఇవ్వవచ్చు?

నియోజనాలు:

1. 'ముదరా' ఆధారంగా రోల్‌ప్లే తయారుచేయండి.
2. 'ముదరా' అధ్యయనానికి విషయ విశ్లేషణ రాసి, విద్యార్థులలో అభివృద్ధి పరచవలసిన సామర్థ్యాల జాబితాను తయారుచేయండి.
3. 'ముదరా (రుసుము)' అధ్యాయం కింద వచ్చే కీలక భావనల జాబితాను తయారుచేయండి.

2.1.7 నిష్పత్తి

పరిచయం:

కింద వివరించిన విధంగా తగిన ఉదాహరణలను ఎన్నుకొని విద్యార్థులకు నిష్పత్తిని పరిచయం చేయవచ్చు.

శాతాలను ఉపయోగించి రెండు రాశులను పోల్చడం మీకు తెలుసు. అట్లాగే సరాసరి కూడా పోల్చడానికి ఉపయోగపడుతుందని మనం నేర్చుకున్నాం. ఈ అధ్యాయంలో 'నిష్పత్తి' సాయంతో రెండు రాశులను ఎట్లా పోల్చాలో నేర్చుకొందాం.

ఎ) తీసివేత ద్వారా పోల్చడం:

కరీమ్‌కు గణితంలో 90 మార్కులు, రహీమ్‌కు 30 మార్కులు వచ్చాయి. వారికి వచ్చిన మార్కులను పోల్చేది ఎలా?

కరీమ్‌కు రహీమ్ కన్నా 60 మార్కులు ఎక్కువ వచ్చాయని చెప్పుకోవచ్చు.

అలాగే రహీమ్‌కు కరీమ్ కన్నా 60 మార్కులు తక్కువ వచ్చాయని చెప్పవచ్చు.

పై విధంగా పోల్చడంలొ ఆ సంఖ్యలకు గల భేదం కనుక్కొంటున్నాం.

$90 - 30 = 60$

రెండు సంఖ్యల బేధం కనుక్కోవడానికి మనం చేసే పరికర్మ తీసివేత.

బి) భాగహారం ద్వారా పోల్చడం:

పైన తీసుకున్న ఉదాహరణలోని సంఖ్యలను మరొక విధంగా పోల్చవచ్చు.

కరీమ్‌కు వచ్చిన మార్కులు, రహీమ్‌కు వచ్చిన మార్కులకు మూడు రెట్లు.

$$\frac{90}{30} = 3$$

కాని రహీమ్‌కు వచ్చిన మార్కులు, కరీమ్‌కు వచ్చిన మార్కులలో $\frac{30}{90} = \frac{1}{3}$ వభాగం.

ఈ రకంగా పోల్చడంలో ఒక సంఖ్యను మరొక సంఖ్యతో భాగిస్తున్నాం.

రెండు రాశులను, మొదటి రాశి రెండవ రాశికి ఎన్నిరెట్లు లేక ఎన్నోవంతు అనేది కనుక్కోవడం ద్వారా పోల్చడాన్ని ఆ రెండు రాశుల నిష్పత్తి కనుక్కోవడం అంటాం

నిష్పత్తిని సూచించడానికి " **:** " గుర్తును వాడతాం.

పై ఉదా:లో కరీమ్‌కు, రహీమ్‌కు వచ్చిన మార్కుల నిష్పత్తి = $\frac{90}{30}$ లేక $\frac{3}{1}$ లేక 3:1.

రహీమ్‌కు, కరీమ్‌కు వచ్చిన మార్కుల నిష్పత్తి = $\frac{30}{90}$ లేదా $\frac{1}{3}$ లేదా 3:1 ని "3 ఈజ్ టు 1" అని ఇంగ్లీషులో చదువుతాం.

3:1 నిష్పత్తిలో '3'ని మొదటి పదం (పూర్వపదం), 1ని రెండోపదం (పరపదం) అని అంటాం.

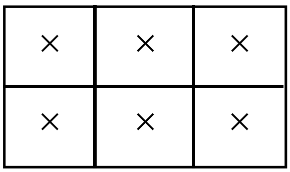
3:1, 1:3 అనే రెండు నిష్పత్తులు సమానం కాదు.

నిష్పత్తిని సాధారణంగా భిన్న రూపంలో రాస్తారు.

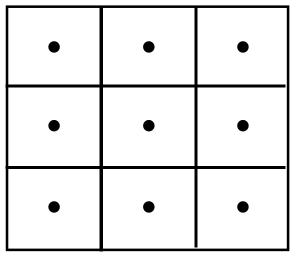
నిష్పత్తిని భిన్నరూపంలో రాయడానికి మొదటి పదాన్ని లవంగాను, రెండవ పదాన్ని హారంగాను రాస్తారు. కాబట్టి రెండు సంఖ్యల నిష్పత్తి కనుక్కోవడంలో ఆ సంఖ్యల క్రమం ప్రాధాన్యం వహిస్తుంది.

నిష్పత్తి భావన విద్యార్థులలో ఏర్పరచడానికి తగిన కృత్యాలు ఇవ్వాలి. ఉదా:

1. తరగతిలో బాలుర, బాలికల సంఖ్యను తెలుసుకొని నిష్పత్తి కట్టడం.
2. తరగతిలో మేజాబల్ల, కిటికీ, గది మొదలయినవి, పొడవు వెడల్పులను లెక్కించి నిష్పత్తి కనుక్కోవడం.
3. రెండు విషయాలలో (Subjects) వారికి వచ్చిన మార్కుల నిష్పత్తి కనుక్కోవడం.
4. గళ్ళ కాగితంలో కోరిన నిష్పత్తి ఉండేటట్లుగా పటంలో చూపిన విధంగా చదరాలకు రంగులు వేసి చూపమనడం.



(పటం – 1)



(పటం – 2)

పటం – (1), పటం – (2)లో గళ్ళ సంఖ్య నిష్పత్తి = 6:9 = 2:3

5. రెండు దారపు ముక్కల పొడవులు కోరిన నిష్పత్తిలో ఉండేట్లు కత్తిరించమనడం మొదలయినవి.

నిష్పత్తి ధర్మాలు:

నిష్పత్తిని భిన్న రూపంలో రాయవచ్చు. కాబట్టి భిన్నాలకు వర్తించే ధర్మాలన్ని నిష్పత్తులకు కూడా వర్తిస్తాయి.

1) ఈ కింది ఉదాహరణలను పరిశీలించండి.

ఉదా: 1) $$5:3 = \frac{5}{3} = \frac{5}{3} \times \frac{2}{2} = \frac{10}{6} = 10:6$$

$$= \frac{5}{3} \times \frac{10}{10} = \frac{50}{30} = 50:30$$

కాబట్టి 5:3 = 10:6 = 50:30

ఉదా: 2) $$30:40 = \frac{30}{40} = \frac{30 \div 5}{40 \div 2} = \frac{15}{20} = 15:20$$

$$= \frac{30}{40} = \frac{30 \div 5}{40 \div 5} = \frac{6}{8} = 6:8$$

$$= \frac{30}{40} = \frac{30 \div 10}{40 \div 10} = \frac{3}{4} = 3:4$$

కాబట్టి 30:40 = 15:20 = 6:8 = 3:4

నిష్పత్తి పూర్వ, పర పదాలను సున్న కాని ఒకే సంఖ్యతో గుణించినా లేక భాగించినా నిష్పత్తి విలువ మారదు.

ఒక భిన్నానికి సమాన భిన్నాలు ఉన్నట్లే ఒక నిష్పత్తికి అనేక సమాన నిష్పత్తులు ఉంటాయి.

కావున 5:3 = 10:6 = 50:30

30:40 = 15:20 = 6:8 = 3:4

విద్యార్థులు సమాన నిష్పత్తులను గురించి అవగాహన చేసుకోవడానికి తగిన కృత్యాలు ఇవ్వాలి.

ఉదా: 1. గింజలను తీసుకొని భాగాలు చేసి పోల్చుట.

2. కాగితాలను తగిన విధంగా మడిచి భాగాలను పోల్చుట.

2) ఈ కింది నిష్పత్తులు గమనించండి.

$$1:\frac{1}{2},\quad \frac{1}{2}:\frac{1}{3},\quad \frac{2}{3}:\frac{3}{4}$$

పై నిష్పత్తులలోని పదాలు భిన్నాలు.

భిన్నరూపంలోని పదాలను పూర్ణాంకాలుగా మార్చాలి.

$$\frac{1}{2}:\frac{1}{3}$$

2, 3 ల క.సా.గు. = 6

$$\frac{1}{2}\times 6 : \frac{1}{3} \times 6 = 3 : 2 \text{ లేదా } \frac{1}{2} : \frac{1}{3} = \frac{3:2}{6} = 3:2$$

నిష్పత్తి పదాలను ఎప్పుడూ పూర్ణాంకాలుగానే సూచించాలి.

3) ఈ కింది నిష్పత్తులు గమనించండి.

3:5, 4:7, 6:13 ....

ప్రతి నిష్పత్తిలోని పదాలు పరస్పరం ప్రధానాంకాలు. ఇలాంటి నిష్పత్తులు కనిష్ట పదాలతో ఉన్నవి లేదా సూక్ష్మరూపంలో ఉన్నాయని అంటారు.

నిష్పత్తిని సూక్ష్మరూపంలో, అంటే కనిష్ఠ రూపంలో రాయడం పరిపాటి.

4) నిష్పత్తిని సూక్ష్మరూపంలో రాయడం ఎలా?

30 : 36 నిష్పత్తిని తీసుకోండి

30, 36 ల గ.సా.భా. = 6

కాబట్టి $\frac{30}{6} : \frac{36}{6} = 5 : 6$

ఒక నిష్పత్తిని సూక్ష్మరూపంలో రాయడానికి నిష్పత్తి పదాల గ.సా.భా.ను కనుక్కొని, పదాలను ఈ గ.సా.భా.చే భాగించాలి

5) ఈ కింది అంశాన్ని గమనించండి.

రాజు ఒక పనిని 30 నిమిషాలలో చేయగలిగాడు. రవి అదే పనిని 1 గంటలో చేయగలిగాడు.

అప్పుడు రాజుకు, రవికి ఆ పని చేయడానికి పట్టిన కాలాల నిష్పత్తి 30:1 అనడం సమంజసమేనా?

30:1 నిష్పత్తి అర్థం రాజుకు రవికి పట్టిన కాలం కన్నా 30 రెట్లు ఎక్కువ కాలం పట్టిందని అర్థం. కాని అది తప్పు అని మనకు తెలుసు.

ఈ దోషం ఎందుకు వచ్చింది?

ఒక ప్రమాణాలలో లేని కాలాలు అంటే నిమిషాలు, గంటల మధ్య నిష్పత్తి కట్టడం వల్ల వచ్చింది.

కాబట్టి

నిష్పత్తి కనుక్కోవడానికి ముందు, రాశులను ఒకే ప్రమాణంలోనికి మార్చవలసి ఉంది.

పై ఉదాహరణలో పని పూర్తిచేయడానికి రాజుకు రవికి పట్టిన కాలాల నిష్పత్తి

= 30 ని. 1 గం. = 30 ని. 60 ని.

= 30 : 60 = 1:2

6) ఈ కింది అంశాన్ని గమనించండి.

ఉమకు గణితంలో 60 మార్కులు వచ్చాయి. రమ తన ఇంటి పనిని 2 గంటలలో పూర్తిచేసింది. ఉమకు గణితంలో వచ్చిన మార్కులను, రమ తన ఇంటిపనికి పట్టిన కాలాన్ని పోల్చగలమా? పోల్చలేం.

సదృశరాశులను మాత్రమే పోల్చగలం.

7) నిష్పత్తి ఏమి సూచిస్తుంది?

ముందు ఇచ్చిన ఉదాహరణలో రాజుకు, రవికి ఒకే పని చేయడానికి పట్టిన కాలాల నిష్పత్తి = 1:2, రవికి, రాజు కన్నా రెండు రెట్లు ఎక్కువకాలం పట్టిందని మాత్రం తెలియజేస్తుంది.

కాబట్టి

నిష్పత్తి కేవలం ఒక సంఖ్య మాత్రమే. ఈ సంఖ్యకు ప్రమాణాలు ఉండవు.
నిష్పత్తి విలువ సదృశరాసులను తెలిపే ప్రమాణాలపై ఆధారపడి ఉండదు.

8. $a : b$ అనే నిష్పత్తిలో పూర్వపదాన్ని మార్చి రాస్తే $b : a$ అవుతుంది.

$a : b, b : a$ విలోమ నిష్పత్తి అవుతుంది.

9. $a : b, c : d$ అనే రెండు నిష్పత్తులు తీసుకోండి.

$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} = ac : bd$ ని $a:b, c:d$ ల బహుళ నిష్పత్తి అంటాం.

కింది ఉదాహరణలను గమనించండి.

ఉదా: 1) ఒక పాఠశాలలో 525 మంది విద్యార్థులు ఉన్నారు. అందులో బాలురు, బాలికల నిష్పత్తి 5. 2 అయితే విద్యార్థులెంత మంది? విద్యార్థినులెంతమంది?

ఉపాధ్యాయుడు	విద్యార్థి
– సమస్యను చదవండి	
– సమస్యలో మనం ఏమి కనుక్కోవాలి?	– విద్యార్థులెంతమంది? – విద్యార్థినులెంతమంది?
– ఎట్లా కనుక్కోవచ్చు?	– మొత్తం. బాలికలకల సంఖ్య ఇవ్వబడింది. – 525ను 5:2 నిష్పత్తిలో విభజించాలి.
– 525ను ఎన్ని సమాన భాగాలు చేయాలి	– 7
– ఒక్కొక్క భాగం ఎంత?	– $\frac{525}{7}$
– విద్యార్థుల సంఖ్య ఎంత?	– $\frac{525}{7} \times 5 = 375$
– విద్యార్థినుల సంఖ్య ఎంత?	– $\frac{525}{7} \times 5 = 130$

ఉదా: 2)

$a : b \quad = \; 6 : 5$

$b : c \quad = \; 4 : 3$ అయితే

$a : b : c$ ని కనుక్కోండి.

ఉపాధ్యాయుడు	విద్యార్థి
– సమస్యను చదవండి	
– సమస్యలో ఏమి కనుక్కోవాలి?	– $a : b : c$ నిష్పత్తి
– $a : b : c$ నిష్పత్తిని ఎట్లా కనుక్కోవాలి	– $a : b = 6.5$ $b : c = 4:3$ అని ఇవ్వడం జరిగింది.
– రెండు నిష్పత్తులలో ఉన్న రాశి ఏది?	– 'b' కాబట్టి 'b' విలువ సమానం చేయాలి.

ఎట్లా? $\quad a : b = (6:5) \times 4$

$= 24 : 20$

$$b : c = (4:3) \times 5$$
$$= 20 : 15$$
కాబట్టి $a : b : c = 24:10:15$

అభ్యాసం

I. **వ్యాసరూప ప్రశ్నలు**

1. ఒక వస్తువు కొన్న వెల, అమ్మిన వెలలు 8:9 నిష్పత్తిలో ఉన్నాయి. ఆ వస్తువును అమ్మిన వెల రు. 6.75 అయితే దానిని కొన్నవెల ఎంత?
2. ఒక ఉద్యోగి నెలజీతం రూ. 5,600 అతని ఖర్చు ఆదా 7:1 నిష్పత్తిలో ఉంటే నెలకు ఎంత ఆదా చేస్తాడు?
3. A:B = 5:4, B:C = 2:7 అయ్యేట్లు రూ. 2300లను A, B, C లకు పంచండి.
4. రవి వాటాకి మూడు రెట్లు డబ్బు గోపికి, సీత వాటాకి రెట్టింపు డబ్బు రవికి వచ్చేట్లు రూ. 1800 ను ముగ్గురికి పంచితే ఒక్కొక్కరికి ఎంత వస్తుంది?
5. మూడు సంఖ్యల వర్గాల మొత్తం 504. ఆ మూడు సంఖ్యల నిష్పత్తి 1:2:3. ఆ సంఖ్యలను కనుక్కోండి.
6. ఒక వేట కుక్క ఒక కుందేలును తరుముతోంది. వేట కుక్క 5 అంగలేసేటప్పటికి కుందేలు 6 అంగలు వేస్తుంది. కాని వేటకుక్క వేసే 4 అంగల దూరం కుందేలు వేసే 5 అంగల దూరానికి సమానం వేటకుక్క, కుందేలు వేగాల నిష్పత్తి కనుక్కోండి.

నియోజనాలు

1. నిత్యజీవితంలో 'నిష్పత్తి' ఉపయోగించే సందర్భాలను కొన్నింటిని రాయండి. ఉదా: భవన నిర్మాణంలో సిమెంటు, ఇసుక కలపడం.
2. 'నిష్పత్తి'ని పరిచయం చేయడానికి తగిన కృత్యాలను సూచించండి.
3. 'నిష్పత్తి' అధ్యాయానికి సంబంధించిన ప్రశ్నల నిధిని తయారుచేయండి.
4. 'నిష్పత్తి' అధ్యాయాన్ని చదివి అందులో వచ్చే కీలక భావనలను తయారుచేయండి.

2.1.8 అనుపాతం

పరిచయం:

కింద వివరించిన విధంగా తగిన ఉదాహరణలను ఎన్నుకొని విద్యార్థులకు 'అనుపాతం' పరిచయం చేయవచ్చు.

కింద పట్టికను పరిశీలించండి.

సంఖ్య	1	3	6	9	12	15
వెల (రూ.లలో)	5	15	30	45	60	75

పట్టక నుంచి

6 పుస్తకాల వెల = రూ. 30

9 పుస్తకాల వెల = రూ. 45

పుస్తకాల నిష్పత్తి = 6:9 = 2:3

పుస్తకాల వెలల నిష్పత్తి = 30:45 = 2:3

కాబట్టి 6:9 = 30:45 = 2:3

పై పట్టికను పరిశీలిస్తే నిజ జీవితంలో రెండు నిష్పత్తులు సమానమయ్యే సందర్భాలు చాలా ఉంటాయని మనం గ్రహించవచ్చు.

రెండు నిష్పత్తులు సమానమైతే ఆ రెండు నిష్పత్తుల్లో ఉండే నాలుగు రాసులు క్రమంగా అనుపాతంలో ఉన్నాయని అంటాం.

$a:b = c:d$ అయిన a, b, c, d లు అనుపాతంలో ఉంటాయి.

ఇక్కడ

'a' ని మొదటి పదం

'b' ని రెండవ పదం

'c' ని మూడవ పదం

'd' నాల్గవ పదం అంటాం.

a, d లను అంత్య పదాలు అంటాం.

b, c లను మధ్యమ పదాలు అంటాం.

అనుపాత ధర్మంపై విద్యార్థులకు అవగాహన ఏర్పడటానికి తగిన సందర్భాలను జట్లలో చర్చించి ఉదాహరణలతో చూపిన విధంగా పట్టికలు రూపొందించమనాలి. ఉదా:

1. మనష్యుల సంఖ్య – కొన్ని రోజులకు కావలసిన ఆహారధాన్యం

2. విద్యార్థుల సంఖ్య – కావలసిన నోటు పుస్తకాల సంఖ్య మొదలైనవి.

కింద అనుపాతం పరిశీలించండి.

6:9 = 30:40

అంత్య పదాల లబ్దం = $6 \times 45 = 270$

మధ్యమ పదాల లబ్ధం = $9 \times 30 = 270$

నాలుగు సంఖ్యల అనుపాతంలో ఉండే అంత్యాల లబ్దం = మధ్యమాల లబ్దం

$a : b = c : d$ అయితే $ad = bc$

అనుపాతంలోని నాలుగు సంఖ్యలు ఒకే జాతికి చెందినవి కావచ్చు లేక మొదట నిష్పత్తికి చెందిన రెండు రాశులు ఒకే జాతికి చెంది, రెండ నిష్పత్తికి చెందిన రెండు రాశులు వేరొక సదృశ జాతికి చెందవచ్చు.

కింది నిష్పత్తులు గమనించండి.

2 : 3, 5 : 6

$2 : 3 \neq 5 : 6$

కాబట్టి 2, 3, 5, 6 లు అనుపాతంలో ఉండవు.

అంత్యాల లబ్దం = $2 \times 6 = 12$

మధ్యమాల లబ్దం = $3 \times 5 = 15$

కాబట్టి అంత్యాల లబ్దం $\neq$ మధ్యమాల లబ్దం

నాలుగు రాశుల అనుపాతంలో లేకపోతే

అంత్యాల లబ్దం $\neq$ మధ్యమాల లబ్దం

కింది ఉదాహరణను గమనించండి.

45 : 30 = 30 : 20

అంత్యాల లబ్దం = 45×20

= 900

మధ్యమాల లబ్దం = 30×30

= 900

కాబట్టి 45, 30, 30, 20 లు అనుపాతంలో ఉన్నాయి. దీన్ని క్లుప్తంగా 45, 30, 20 లు అనుపాతంలో ఉన్నాయని అంటాం.

a, b, c అనుపాతంలో ఉన్నాయనుకుంటే

$a ; b ; b, c$ లు అనుపాతంలో ఉంటాయి.

కాబట్టి $a : b = b : c$ అవుతుంది.

$$b^2 = ac$$

$$b = \sqrt{ac}$$

ఇక్కడ 'b' ని a, c ల అనుపాత మధ్యమం అంటారు.

a, b, c లు అనుపాతంలో ఉంటే b ను a, c ల అనుపాత మధ్యమం అంటారు.

కాబట్టి $b^2 = ac$

$b = \sqrt{ac}$ అవుతుంది.

అభ్యాసం

1. కింది వాటిలో ఏ నాలుగు సంఖ్యలు అనుపాతంలో ఉన్నాయో కనిపెట్టండి.
   a) 4, 5, 12, 15
   b) 8, 6, 12, 9
   c) 3, 8, 4, 6
   d) 15, 30, 7, 14

2. కింది అనుపాతాలలోని ఖాళీలను పూరించండి.
   a) 6:8 = ... :12
   b) $10\frac{1}{2}$: .... = $3\frac{1}{2} : 2\frac{1}{4}$
   c) ....:$x = y : x$
   d) 18:25, = 90:

3. కింది సంఖ్య అనుపాత చతుర్థ పదాన్ని కనుక్కోండి.
   a) 5, 8, 10
   b) 18, 20, 9
   c) 24, 18, 12
   d) 13, 2, 65

4. కింది సంఖ్యల అనుపాత అనుపాత మధ్యమాన్ని కనుక్కోండి.

   a) 5, 80   b) 16, 9

   c) 16, 4   d) 20, 5

5. 30 గ్రా. పాలల్లో పాలు, నీళ్ళు నిష్పత్తి 7:3 పాలు, నీళ్ళ నిష్పత్తి 3:7 ఉండేందుకు ఎంత పరిమాణం నీళ్ళు కలపాలి.

నియోజనాలు

1. నిత్యజీవితంలో రెండు నిష్పత్తులు సమానమైనటువంటి సందర్భాలు కొన్నింటిని సూచించి మొదటి ఉదాహరణలో చూపినటువంటి పట్టికలను కొన్నింటిని తయారుచేయండి.

2. అనుపాతానికి సంబంధించిన లక్ష్యాత్మక ప్రశ్నలు కొన్నింటిని తయారుచేయండి. (జట్టుపని)

3. 'అనుపాతం' బోధించడానికి విద్యార్థులకు ఉండవలసిన పూర్వ సామర్థ్యాల జాబితాను తయారుచేయండి.

4. 'అనుపాతం' అనే అధ్యయాన్ని చదివి అందులో వచ్చే కీలక భావాల జాబితాను తయారుచేయండి.

5. 'అనుపాతం' అధ్యాయానికి విషయ విశ్లేషణ రాసి విద్యార్థులలో అభివృద్ధి పరచవలసిన సామర్థ్యాల జాబితాను తయారుచేయండి.

అనులోమానుపాతం

పరిచయం:

కింద వివరించిన విధంగా తగిన ఉదాహరణలను ఎంచుకొని విద్యార్థులకు 'అనులోమానుపాతం' పరిచయం చేయవచ్చు.

కింది పట్టికలో పుస్తకాల సంఖ్య వాటి ధరలు ఇవ్వడం జరిగింది గమనించండి.

పుస్తకాల సంఖ్య (x)	2	3	8	10	15	20
ధర రూ.లలో (y)	20	30	80	100	150	200

పై పట్టిక నుండి మీరేం గ్రహించారు?

- పుస్తకాల సంఖ్య పెరగే కొద్దీ వాటి ధర కూడా పెరుగుతుంది.
- పుస్తకాల సంఖ్య తగ్గితే వాటి ధర కూడా తగ్గుతుంది. అంటే 'x' పెరిగిన దానికి అనురూపంగా 'y' పెరుగుతుంది.

  'x' తగ్గితే దానికి అనురూపంగా 'y' తగ్గుతుంది.

ప్రతి సందర్భంలోను $\frac{x}{y} = \frac{2}{20} = \frac{3}{30} = \frac{8}{80} = ...$

$= \frac{1}{10}$

కాబట్టి

'x' , 'y' అనే రెండు చరరాసులు మధ్య నిష్పత్తి ఎప్పుడూ ఒక స్థిరాంకం (k) చరిస్తే అవి 'అనులోమచరత్వం' కలిగి ఉన్నాయని అంటాం.

$\frac{x}{y} = k$ లేక $x = Ky$

'K' అనుపాత స్థిరాంకం అంటాం. దీనినే $x \propto y$ తో సూచిస్తాం.

x is directly proportional to y అని చదవుతారు.

అనులోమానపాతంపై విద్యార్థులకు అవగాహన ఏర్పడటానికి విద్యార్థులు జట్లలో చర్చించి ఉదాహరణలో చూపిన విధంగా తగిన సందర్భాలను ఎన్నుకొని పట్టికలు రూపొందించమనాలి.

ఉదా:

1. విద్యార్థుల సంఖ్య – కావలసిన బెంచీల సంఖ్య

2. పొలం హెక్టార్లలో – ఉత్పత్తి అయ్యే ధాన్యం బస్తాలలో మొదలైనవి.

పై ఉదాహరణ నుండి

'x' యొక్క ఏవైనా రెండు విలువల నిష్పత్తి (ఉదా: 2,8)

2:8 = 1:4

అనురూప 'y' విలువల నిష్పత్తి = 20 : 80 = 1 : 4

కాబట్టి అనుపాతధర్మం ప్రకారం x, y లు అనుపాతంలో ఉంటాయి.

పై చర్చనుంచి

రెండు చరరాశులు అనులోమ చరత్వం కలిగి ఉంటే అవి అనులోపాతంలో ఉంటాయి.

అని నేర్చుకున్నాం

అనులోమానుపాతానికి సంబంధించిన సమస్యల సాధనలొ విశ్లేషణ పద్ధతి అనుసరించాలి.

కింది సమస్యను చూడండి.

'4' గురు సభ్యులు ఉండే కుటుంబానికి నెలకు రూ. 2800 ఖర్చు అవుతుంది. 6గురు సభ్యులు ఉన్న కుటుంబానికి ఎంత ఖర్చువుతుంది?

ఉపాధ్యాయుడు	:	సమస్యను చదవండి.
		సమస్యలో ఏమి కనుక్కోవాలి?
విద్యార్థి	:	6గురు సభ్యులున్న కుటుంబానికి అయ్యే ఖర్చు కనుక్కోవాలి.
ఉపాధ్యాయుడు	:	ఎట్లా?
విద్యార్థి	:	కుటుంబ సభ్యుల సంఖ్య (x) పెరిగిన ఖర్చు (y) పెరుగుతుంది.

కాబట్టి అది అనులోమానుపాతం

$x \propto y$

$$\frac{x}{y} = k$$

	x		y
↑	4 గురు సభ్యులు ఉన్న కుటుంబానికి	–	2.800
	6 గురు సభ్యులు ఉన్న కుటుంబానికి	–	?

$k = \frac{x}{y} = \frac{4}{2800}$ ఒక రాశిలో పెరుగుదలను ↑ గుర్తుతోను

$y.k = x$ తగ్గుదలను ↓ గుర్తుతోను సూచిస్తాం.

$y = \frac{x}{k}$

కాబట్టి 6 గురు సభ్యులు ఉన్న కుటుంబానికి అయ్యే ఖర్చు

$= \frac{6}{\frac{4}{2800}}$

$= 6 \times \frac{2800}{4} =$ రూ. 4,200 లేదా

x		y	
4 గురు సభ్యులు ఉన్న కుటుంబానికి	–	2.800	↑
6 గురు సభ్యులు ఉన్న కుటుంబానికి	–	y	

ఒక రాశిలో పెరుగుదలను ↑ గుర్తుతోను

తగ్గుదలను ↓ గుర్తుతోను సూచిస్తాం.

రెండు చరరాశుల అనులోమచరత్వం కలిగే ఉండే అవి అనుపాతంలో ఉంటాయి.

కాబట్టి $4 : 6 = 2800 : y$

$4y = 2800 \times 6$

$y = \frac{2800 \times 6}{4}$

$y = 4200$

అభ్యాసం

1. $x \propto y$, $x = 9$ అయితే $y = 8$ అయితే x విలువ, $x = 42$ అయితే y విలువ కనుక్కోండి.
2. 12 పశువులకు నెలకు 18 టన్నుల గడ్డి అవసరమయితే 30 పశువులకు నెలకు ఎన్ని టన్నుల గడ్డి అవసరం?
3. 48 బస్తాల ధాన్యం ఖరీదు రూ. 16800 అయితే 36 బస్తాల ధాన్యం ఖరీదు ఎంత?

విలోమానుపాతం

పరిచయం:

కింద వివరించిన విధంగా తగిన ఉదాహరణలను ఎంచుకొని విద్యార్థులకు 'విలోమానుపాతం' పరిచయం చేయవచ్చు.

కింది పట్టికలో పుస్తకాల సంఖ్య వాటి ధరలు ఇవ్వడం జరిగింది గమనించండి.

కూలీల సంఖ్య	90	60	45	30	15
పనిదినాల సంఖ్య 20	30	40	60	120	

పై పట్టిక నుండి మీరేం గ్రహించారు?

- కూలీల సంఖ్య పెరిగే కొద్దీ పని దినాల సంఖ్య తగ్గుతుంది.
- కూలీల సంఖ్య తగ్గేకొద్దీ పని దినాల సంఖ్య పెరుగుతుంది.

అంటే 'x' పెరిగినకొద్ది అనురూపంగా 'y' తగ్గుతుంది. 'x' తగ్గేకొద్దీ అనురూపంగా 'y' పెరుగుతుంది.

ప్రతి రెండు అనురూప విలువలకు $x\,y = 1800$ స్థిరాంకం.

x, y అనే చరరాశులు $xy = k$ స్థిరాంకం అయ్యేటట్లు చరిస్తే అవి ఒక దానితో మరొకటి 'విలోమచరత్వం' కలిగి ఉన్నాయని అంటాం.

ఉదా: x యొక్క ఒక జత విలువల నిష్పత్తి = 90:60 = 3:2

అనురూప 'y' విలువల నిష్పత్తి = 20:30 = 2:3

అనురూప 'y' విలువల విలోమ నిష్పత్తి = 3:2

రెండు చరరాశులు విలోమ చరత్వం కలిగి ఉంటే ఒక చరరాశి రెండు విలువల నిష్పత్తి, చరరాశి అనురూప విలువల విలోమ నిష్పత్తికి సమానం. కాబట్టి రెండు చరరాశులు విలోమ చరత్వం కలిగి ఉంటే అవి విలోమానుపాతంలో ఉన్నాయనడం పరిపాటి.

చరరాశులు x, y లు విలోమానుపాతంలో ఉన్నాయనుకుందాం.

$x\,y = k$ (స్థిరాంకం)

$\dfrac{x}{\frac{1}{y}}$ లేక $\dfrac{y}{\frac{1}{x}} = k$ అని కూడా రాయవచ్చు.

అనులోమానుపాత నిర్వచనం ప్రకారం

$x, \dfrac{1}{y}$ లు $y, \dfrac{1}{x}$ లు అనులోమానుపాతంలో ఉంటాయి.

x, y విలోమానుపాతంలో ఉంటే $x, \dfrac{1}{y}$ లు మరియు $y, \dfrac{1}{x}$ లు అనులోమానుపాతంలో ఉంటాయి. లేదా

x, y లు విలోమానుపాతంలొ ఉంటే $x \alpha \dfrac{1}{y}$ మరియు $y \alpha \dfrac{1}{x}$ అగును.

$x\,y = k$ అవుతుంది.

విలోమానుపాతంపై విద్యార్థులకు అవగాహన ఏర్పడడానికి విద్యార్థులతో జట్లలో చర్చించి ఉదాహరణలో చూపిన విధంగా తగిన సందర్భాన్ని ఎన్నుకొని పట్టికలు రూపొందించమనాలి.

ఉదా: 1) కూలీల సంఖ్య – ఒక పని పూర్తిచేయడానికి పట్టే రోజుల సంఖ్య

2) ఒకరోజుకు పనిచేసే గంటల సంఖ్య – పనిచేయడానికి పట్టే రోజుల సంఖ్య

3) కారువేగం = స్థిరదూరం పోవడానికి పట్టే కాలం మొదలయినవి.

ఈ కింది సమస్యను చూడండి.

రోజుకు 9 గం. పనిచేసిన, ఒక పని 20 రోజుల్లో పూర్తవుతుంది. రోజుకు 12 గం. పనిచేసిన ఆ పని ఎన్ని రోజుల్లో పూర్తి అవుతుంది?

(x) రోజుకు పని గంటలు పెరిగిన – పని పూర్తగుటకు పట్టుకాలం తగ్గుతుంది. (y).

x		y
రోజుకు 9 గం. పనిచేసిన	–	20 రోజులు పడుతుంది ↓
రోజుకు 12 గం. పనిచేసిన	–	y రోజులు పడుతుంది

$x, y = k$

$= 9 \times 20 = 180$

$12\,y = 180$

$y = \frac{180}{12} = 15$ రోజులు

లేదా

↑	రోజుకు 9 గం. పనిచేస్తే	–	20 రోజులు పడుతుంది ↓
	రోజుకు 12 గం. పనిచేస్తే	–	y రోజులు పడుతుంది

'x' రోజుకు పనిగంటలు పెరిగితే – పని పూర్తికావడానిక పట్టేకాలం తగ్గుతుంది (y).

కాబట్టి ఈ రెండు రాసులు విలోమానుపాతంలో ఉంటాయి.

9 : 12 కి విలోమ నిష్పత్తి = 12 : 9

$\therefore \quad 12 : 9 = 20 : y$

అనుపాతధర్మం ప్రకారం అంత్యాల లబ్ధం $= (12)\,(y) = 12\,y$

మధ్యాల లబ్ధం $= 9 \times 20 = 180$

$12\,y = 180 \Rightarrow y = \frac{180}{12} = 15$ రోజులు

సమస్య సాధనలో తరగతి గదిలొ విశ్లేషణ పద్ధతి పాటించాలి. విద్యార్థులతో చర్చించి సమస్యను వారే స్వయంగా సాధించేటట్లు చూడాలి.

అభ్యాసం

1. 60 మందికి 10 రోజులకు సరిపోయే ఆహార సామగ్రి ఉంది. అదే సామగ్రి 75 మందికి ఎన్ని రోజులకు వస్తుంది.
2. 10 మంది మనుష్యులు 15 రోజులలో ఒక పనిని చేయగలరు. అదే పని 10 రోజుల్లో పూర్తికావాలంటే ఎంత మంది కావాలి?
3. ఒక కారు గంటకు 50 కి.మీ. చొప్పున ప్రయాణం చేసి తన గమ్యాన్ని 6 గంటలకు చేరుకోగలిగింది. అట్లాకాకుండా 1 గంటకు $37\frac{1}{2}$ కి.మీ. పోయిన ప్రణానికి ఎంతకాలం పడుతుంది?
4. 4.4 మీ.లు చుట్టుకొలత ఉన్న ఒక చక్రం 207 సార్లు తిరిగితే 3.3 మీ.లు చుట్టుకొలత ఉన్న ముందు చక్రం ఎన్నిసార్లు తిరుగతుంది?
5. ఒక కందకాన్ని 18 మంది 10 రోజులలో తవ్వుతారు. 4 రోజులలా పనిచేసిన తరువాత మిగిలిన పనిని 4 రోజులలో పూర్తిచేయాలంటే ఇంకా ఎంత మందిని అదనంగా నియమించాలి?

నియోజనాలు:

1. అభ్యాసం –8 లోని 5వ సమస్యను విశ్లేషణ పద్ధతిలో ఎట్లా బోధిస్తారు?
2. విలోమ చరత్వాన్ని సూచించే ఐదు సందర్భాలను ఉదాహరణలతో చూపిన విధంగా పట్టికల రూపంలో రాయండి.

మిశ్రమానుపాతం (Compound Proportion)

పరిచయం:

సరళ అనుపాతంలో రెండు రాశుల నిష్పత్తులున్నట్లు సూచించాం. అట్లాకాకుండా మూడు లేదా అంతకంటే ఎక్కువ రాశుల నిష్పత్తి ఉన్న అనుపాతాన్ని మిశ్రమానుపాతం అంటారు.

ఒక రాశి మిగిలిన రాసులన్నింటిల్లో అనులోమానుపాతంలో ఉండవచ్చు. అప్పుడు ఆ రాశిలోని మార్పును చూపించే నిష్పత్తి మిగిలిన రాశులలోని మార్పులను సూచించే నిష్పత్తుల బహుళ నిష్పత్తికి సమానం.

ఆ రాశి మిగిలిన రాశులన్నింటితో విలోమానుపాతంలో ఉంటే ఆ రాశిలోని మార్పును చూపించే నిష్పత్తి మిగిలిన రాశులలోని మార్పులను తెలియజేసే నిష్పత్తులకు విలోమ నిష్పత్తుల బహుళ నిష్పత్తికి సమానం.

ఆ రాశి మిగిలిన రాశులలో కొన్నింటిలో అనులోమానుపాతంలోను, కొన్నింటితో విలోమానుపాతంలోనూ ఉండవచ్చు. అప్పుడు ఆ రాశిలోని మార్పును చూపే నిష్పత్తి, అనులోమానుపాతంలో ఉన్న రాశుల నిష్పత్తికి, విలోమానుపాతంలో ఉన్న రాశుల విలోమ నిష్పత్తి ఉన్న రాశుల నిష్పత్తికి, విలోమానుపాతంలో ఉన్న రాశుల విలోమ నిష్పత్తి ఉన్న బహుళ నిష్పత్తికి సమానం.

మిశ్రమానుపాతంపై విద్యార్థులకు అవగాహన ఏర్పడటానికి జట్టులలో చర్చించి మిశ్రమానుపాతం ఇమిడి ఉన్న కొన్ని సందర్భాల జాబితాను తయారుచేయమనాలి.

కింది సమస్యను చూడండి.

రోజుకు 8 గం. పనిచేస్తూ ఒక పనిని 20 మంది పనివారు 9 రోజులలో చేయగలరు. రోజుకు 10 గం. పనిచేస్తూ $1\frac{2}{3}$ పనిని 12 మంది ఎన్ని రోజుల్లో చేయగలరు?

సాధన:

1 పనిని – రోజుకు 8 గం. పనిచేస్తూ – 20 మంది – 9 రోజులలో

$1\frac{2}{3}$ పనిని – రోజుకు 10 గం. పనిచేస్తూ – 12 మంది – x రోజులలో

నిష్పత్తి – అనుపాతం

1 పనిని – 9 రో. ↑ ↓ $1\frac{2}{3}$ పనిని – x రోజులు అనులోమానుపాతంలో ఉంటుంది కాబట్టి $1:1\frac{2}{3} = 1:\frac{5}{3}$ $= \frac{3:5}{3}$ $= 3:5$ $= \frac{3}{5}$	రోజుకు 8గం. పనిచేస్తూ–9 రో. ↑ ↓ రోజుకు 10గం. పని చేస్తు – x రోజులు రోజుకు పనిచేసే గంటల సంఖ్య పట్టే రోజులకు విలోమాను పాతంలో ఉంటుంది. కాబట్టి 8 : 10 కి విలోమ నిష్పత్తి $= 10 : 8 = \frac{10}{8}$	20 మందికి – 9 రోజులు ↑ ↓ 20 మంది – x రో. మనుషుల సంఖ్య తగ్గితే రోజుల సంఖ్య పెరుగుతుంది. కాబట్టి ఇది విలోమానుపాతం 20:12 కి విలోమ నిష్పత్తి 20:12 కి విలోమ నిష్పత్తి $= 12 : 20$ $= \frac{12}{20}$

పని పూర్తికావడానికి పట్టే రోజుల సంఖ్యపై మూడు నిష్పత్తి పై ఆధారపడి ఉంటుంది.

కాబట్టి పై మూడు నిష్పత్తుల బహుళ నిష్పత్తి = $\frac{3}{5} \times \frac{10}{8} \times \frac{12}{20}$

$= 30 \times 10 \times 12 : 5 \times 8 \times 20$

$\therefore \quad 30 \times 10 \times 12 : 5 \times 8 \times 20 = 9 : x$

$5 \times 8 \times 20 \times 9 = 3 \times 10 \times 12 \times x$

$\therefore \quad x = \frac{5 \times 8 \times 20 \times 9}{3 \times 10 \times 12} = 20$ రోజులు

1. సామాన్య సాధనలో తరగతి గదిలో విశ్లేషణా పద్ధతి పాటించాలి. విద్యార్థులతో చర్చించి సమస్యను వారే స్వయంగా సాధించేటట్లు చూడాలి.
2. కొన్ని సమస్యలకు తరగతి గదిలో స్వయంగా తయారుచేయమని వారు రాసిన సమస్యలను వారినే సాధించమనాలి.

అభ్యాసం

1. 100 మంది మనుష్యులు 10 రోజులలో రోజుకు 8 గంటలు పనిచేసి 80 మీ పొడవు ఉండే కందకాన్ని తవ్వారు. రోజుకు $7\frac{1}{2}$ గంటల పనిచేస్తూ 45 మంది 54 మీ. పొడవు ఉండే కందకాన్ని ఎన్ని రోజుల్లో పూర్తిచేయగలరు?
2. 35 మంది విద్యార్థులకు 24 రోజులకు అయిన భోజన ఖర్చు రూ. 6,300 ఇదే రేటున 25 మందికి ఎన్ని రోజులకు భోజన ఖర్చు రూ. 3,375 అవుతుంది?
3. 30 మంది 9 గదులు 45 రోజుల్లో కట్టిన 12 గదులు 40 రోజుల్లో కట్టడానికి ఎంతమంది కావాలి?
4. 27 పంపులు 2100 టన్నుల నీరును 10 రోజుల్లో రోజుకు 7 గంటలు పనిచేస్తూ తోడగలవు. 16 పంపులు 1600 టన్నుల నీరును రోజుకు 9గం. పనిచేస్తూ తోడాలంటే ఎన్ని రోజులు పడుతుంది?

5. ఒక గోడను కట్టడానికి 7075 ఇటుకలు కావాలి. గోడలో $\frac{1}{2}$ భాగం పొడవు, $\frac{1}{2}$ భాగం వెడల్పు రెట్టింపు మందం ఉన్న గోడకట్టడానికి ఎన్ని ఇటుకలు కావాలి?

నియోజనాలు:

1. మిశ్రమానుపాతం ఇమిడియున్న ఐదు సమస్యలను రాయండి.
2. అనులోమానుపాతం, విలోమానుపాతం, మిశ్రమానుపాతం – అధ్యాయాలను చదివి జట్టులలో చర్చించి కీలక భావాలు తయారుచేయండి.
3. పై అధ్యాయాలు బోధించడానికి విద్యార్థులకు ఉండవలసిన పూర్వ సామర్థ్యాల జాబితాను తయారుచేయండి. పూర్వ సామర్థ్యాల ఆధారంగా పునర్విమర్శ అభ్యాసాన్ని తయారుచేయండి.
4. పై అధ్యాయాలకు విషయ విశ్లేషణ రాసి విద్యార్థులలో అభివృద్ధిపరచవలసిన సామర్థ్యాల జాబితాను తయారుచేయండి.

2.1.9 బారువడ్డీ (సరళవడ్డీ)

పరిచయం:

మనం మన అవసరాలకు కావలసిన సొమ్ము మనవద్దలేని సమయాల్లో ఇతరుల వద్దగాని, బ్యాంకు నుంచి గాని అప్పుతెచ్చుకొంటాం. మనకు డబ్బు లభించినప్పుడు అప్పు తీర్చేస్తాం. అయితే అప్పు తీర్చేటప్పుడు మనం అప్పు తెచ్చిన డబ్బు మాత్రమేగాక, ఆ డబ్బును వాడుకున్నందుకు ప్రతిఫలంగా కొంత డబ్బును అదనంగా ఇస్తాం. ఈ విధంగా అధనంగా ఇచ్చే డబ్బును వడ్డీ లేదా పాయిధా అంటారు. అప్పు తెచ్చిన సొమ్మును 'అసలు' అంటాం.

ప్రభుత్వం రైతులకు వ్యవసాయ ఖర్చుల నిమిత్తం స్వల్పవడ్డీలకు అప్పులు ఇచ్చే విషయం మనకు తెలిసిందే. అట్లాగే ఇళ్ళు కట్టుకోవడానికి, బావులు తవ్వుకోవడానికి కూడా అప్పులిస్తున్నారు.

బ్యాంకుల్లో సేవింగ్స్ ఖాతాలోగాని, డిపాజిట్స్ రూపంలోగాని మనం డబ్బు ఉంచిన ఆ సొమ్ముపై బ్యాంకువారు మనకు వడ్డీ చెల్లిస్తారు.

సాధారణంగా

1. కొద్ది మొత్తాలపై రూపాయికి నెలకు ఇంత అని.
2. పెద్ద మొత్తాలైతే నూటికి నెలకు ఇంత అని లేదా నూటికి సంవత్సరానికి ఇంత అని అనుకుంటారు. దీనినే వడ్డీరేటు అంటారు.
3. వడ్డీతో సహా బాకీ చెల్లించడానికి ఇవ్వవలసిన సొమ్ము మొత్తం అని అంటాం.
4. చెల్లించవలసిన వడ్డీ అసలును బట్టి వడ్డీరేటును బట్టి అప్పు తెచ్చిననాటి నుండి తీర్చేవరకు ఉన్న కాలాన్ని బట్టి వుంటుంది.

మొత్తం = అసలు + వడ్డీ

రూ. 100పై ఒక సంవత్సరానికి అయ్యే వడ్డీని వడ్డీరేటు అంటారు.

కింది ఉదాహరణలు పరిశీలించండి.

బారువడ్డీ లేక సరళవడ్డీ

ఎ) $$\text{వడ్డీ} = \frac{\text{అసలు} \times \text{కాలము} \times \text{రేటు}}{100}$$

అసలు P, వడ్డీరేటు R, కాలము T లేదా N, వడ్డీ I అనుకొనిన

$$I = \frac{PNR}{100} \text{ లేదా } \frac{PTR}{100}$$

దీనినుండి $P=\frac{100I}{NR}$, $N=\frac{100I}{PR}$, $R=\frac{100I}{PN}$

బి) మొత్తము = అసలు + వడ్డీ

మొత్తం A అనుకొనిన A = P+I

$I=\frac{PNR}{100}$ కావున $A = P + \frac{PNR}{100}$

$$\therefore A=P\left(1+\frac{NR}{100}\right)$$

$$\therefore A=P\left(\frac{100+NR}{100}\right)$$

కావున మొత్తం = అసలు $\left(1+\frac{\text{కాలము} \times \text{రేటు}}{100}\right)$

= అసలు $\left(\frac{100+\text{ కాలము} \times \text{రేటు}}{100}\right)$

A, N, R లు మూడు ఇచ్చిన $P=\frac{100\times A}{100+NR}$

A = P+1 నుండి I = A - P, P = A - 1

కాలమును లెక్కించుటకు అప్పు తెచ్చిన రోజునుగాని, అప్పు తీర్చిన రోజునుగాని ఏదో ఒక దానిని వదిలివేయుట ఆచారము.

బారువడ్డీ కనుక్కోవడానికి సూత్రాన్ని ఆగమన పద్ధతిలో తగిన ఉదాహరణలు ఎన్నుకొని రాబట్టాలి. అట్లాగే బారువడ్డీ ప్రకారం మొత్తం కనుక్కోవడానికి సూత్రాన్ని నిగమన పద్ధతిలో రాబట్టాలి.

ఉదా: 1) రూ. 500 పై సంవత్సరానికి 12% వంతున $2\frac{1}{2}$ సంవత్సరాల్లో వడ్డీ ఎంత?

సాధన: రూ. 100 పై ఒక సంవత్సరానికి అయ్యే వడ్డీ = రూ. 12

రూ. 1 పై ఒక సంవత్సరానికి అయ్యే వడ్డీ $= \text{రూ. } \frac{12}{100}$

రూ. 500 పై ఒక సంవత్సరానికి అయ్యే వడ్డీ $= \frac{12}{100} \times 500$

రూ. $2\frac{1}{2}$ పై ఒక సంవత్సరానికి అయ్యే వడ్డీ $= \frac{12}{100} \times 500 \times \frac{5}{2}$

= రూ. 150

లేదా

$$\text{వడ్డీ} = \frac{\text{అసలు} \times \text{కాలము} \times \text{వడ్డీరేటు}}{100}$$

అసలు P = రూ. 500, కాలం $T = 2\frac{1}{2} = \frac{5}{2}$ సం., వడ్డీరేటు R = 12%

కావున వడ్డీ $I = \frac{PTR}{100}$

$$= \frac{500 \times \frac{5}{2} \times 12}{100}$$

= 150 రూ.

మొత్తం = అసలు + వడ్డీ

= రూ. 500+రూ.150

= రూ. 650

లేదా మొత్తం $A = P + \frac{PTR}{100}$

$$= P\left(I + \frac{TR}{100}\right) = 500\left(1 + \frac{\frac{5}{2} \times 12}{100}\right)$$

$$= 500\left(1 + \frac{30}{100}\right)$$

$$= 500\left(1+\frac{3}{10}\right)$$

$$= 500 \times \frac{13}{10}$$

= 650 రూ.

పై సమస్యలో మీరు గమనించి ఉంటారు. వడ్డీ కాలమంతా అసలు మీద మాత్రమే వడ్డీ కడితే ఆ వడ్డీని బారువడ్డీ అంటారు.

$$\text{బారువడ్డీ}(I) = \frac{\text{అసలు} \times \text{కాలము} \times \text{వడ్డీరేటు}}{100}$$

$$= \frac{PTR}{100}$$

- కాలాన్ని సంవత్సరాల్లో లెక్కించాలి.
- వడ్డీ రేటును రూ. 100పై 1 సంవత్సరానికి లెక్కించాలి.

అభ్యాసం

1. నెలకు రూ. 1కు 3 పై. చొప్పున రూ. 50 కు 6 నెలలకు అయ్యే వడ్డీ ఎంత?
2. నెలకు నూటికి 1 రూ. చొప్పున రూ. 300 లకు 2 సంవత్సరాలకు వడ్డీ ఎంత?
3. నెలకు నూటికి రూ. 2 చొప్పున 1 రూ. కు నెలకు వడ్డీ ఎంత?
4. రూ. 100పై ఒక సంవత్సరానికి వడ్డీ రూ.24 అయితే రూ. 1పై 1 నెలకు అయ్యే వడ్డీ ఎంత?
5. రూ.500 పై సంవత్సరానికి 12% వంతున 2 సంవత్సరాల 3 నెలలకు వడ్డీ ఎంత?

6. ఒక రైతు కొంత పొలాన్ని రూ.50,000 కొని వెంటనే రూ. 20,000 ఇచ్చి మిగిలిన సొమ్మును సంవత్సరానికి 12% వడ్డీతో చెల్లించడానికి ఒప్పుకున్నాడు. 3 సంవత్సరాల 3 నెలల చివరి బాకి తీర్చడానికి అతనెంత సొమ్ము ఇవ్వాలి?

7. ఒక పండ్ల వ్యాపారి రూ.2500లు నూటికి సంవత్సరానికి 12% వడ్డీ చొప్పున 10–5–2017 న అప్పు తెచ్చాడు. 10–8–2020న అప్పు తీర్చడానికి అతనెంత సొమ్ము ఇవ్వాలి?

8. రూ. 10,000 అసలు పై సంవత్సరానికి 18% వడ్డి వంతున తేది 11–12–2016 నుండి 30–11–2017 వరకు అయ్యే వడ్డీ ఎంత?

9. $I = \frac{PTR}{100}$ అనే సూత్రాన్ని ఉపయోగించి కింది వాటికి జవాబులు కనుక్కోండి.

ఎ) $T = 2\frac{1}{2}$ సం. R = 16% I = రూ. 480 P = ?

బి) P = రూ.1875 R = 12% I = రూ.675 T = ?

సి) $T = 2\frac{2}{3}$ సం. I = రూ. 720 P = రూ.1500 R = ?

10. $A = P\left(I + \frac{TR}{100}\right)$ అనే సూత్రాన్ని ఉపయోగించి కింది జవాబులు కనుక్కోండి.

ఎ) A = రూ. 10,125 $R = \frac{12}{2}\%$ T = 2 సం. P = ?

బి) A = రూ. 2662 P = రూ. 2000 T = 3 సం. R = ?

2.1.10 చక్రవడ్డీ

పరిచయం:

బారువడ్డీని ఎట్లా లెక్క కట్టాలో మనం తెలుసుకున్నాం. బారువడ్డీలో బాకి తీర్చేదాకా అసలు స్థిరంగా ఉంటుందని మీరు గ్రహించాలి.

ఉదాహరణకు ఒక వ్యక్తి ఒక ఆసామి వద్ద రూ. 10000 అప్పుతెచ్చి 5 సంవత్సరాల తరువాత బాకీ తీర్చేసి రూ. 10000కు వడ్డీని 5 సంవత్సరాలకు లెక్కగట్టి అసలుకు కలిపి చెల్లించాలి.

ఎ) కొన్ని కొన్ని సందర్భాల్లో వడ్డీని, అసలుకి కలిపి, ఆ మొత్తాన్ని తరవాత సంవత్సరానికి అసలుగా తీసుకొంటారు. అటువంటప్పుడు తరువాత సంవత్సరాలలో అసలు, వడ్డీ పెరుగుతుంటాయి. ఈ విధానాన్ని చక్రవడ్డీ పద్ధతి అంటారు.

బి) చక్రవడ్డీ పద్ధతిలో వడ్డీని తిరిగి కట్టేకాలం 3 నెలలు, 6 నెలలు, 1 సంవత్సరం, 2 సంవత్సరాలు .... కావచ్చు.

సి) అప్పు తెచ్చిన అసలు, అప్పటికయ్యే మొత్తం రెండోసారి తిరిగికట్టే సమయానికి 'అసలు'గా తీసుకొంటారు.

డి) సాధారణంగా బ్యాంకులలో సేవింగ్ ఖాతాలో నిల్వ ఉంచిన సొమ్ముకు 6 నెలలకోసారి వడ్డీని లెక్కకట్టి (మార్చి, సెప్టెంబరు నెలలో) వచ్చిన మొత్తాన్ని తరువాత అసలు తీసుకొంటారు.

చక్రవడ్డీ ప్రకారం మొత్తం కనుక్కోవడానికి తగిన ఉదాహరణను ఎన్నుకొని నిగమన పద్ధతిలో సూత్రాన్ని రాబట్టాలి.

కింది ఉదాహరణను గమనించండి.

ఉదా: 1) ఒకరు రూ. 6250/– 12% చక్రవడ్డీకి (సంవత్సరానికి ఒకసారి వడ్డీ తిరిగి కట్టే పద్ధతి) అప్పు తెచ్చాడు. 2 సంవత్సరాల తరువాత బాకీ తీర్చాలంటే సొంత సొమ్మివాలి?

సాధన: అప్పు తెచ్చిన సొమ్ము (P)= రూ. 6250

వడ్డీ రేటు (R) = 12%

మొదటి సం. చివర మొత్తం (A) = $P\left(I+\frac{TR}{100}\right)$

$$= 6250\left(1+\frac{1\times12}{100}\right)$$

$$= 6250\times\frac{112}{100}$$

చక్రవడ్డీ ప్రకారం అది రెండవ సంవత్సరారంభానికి అసలుగా భావించడం జరుగుతుంది. రెండో సంవత్సరానికి అసలు (P) = $6250\times\frac{112}{100}$

మొత్తం (A) = $P\left(I+\frac{TR}{100}\right)$

$$= 6250\times\frac{112}{100}\left(1+\frac{1\times12}{100}\right)$$

$$= 6250\times\frac{112}{100}\times\frac{112}{100}$$

$$= 6250\times\left(\frac{112}{100}\right)^2$$

పై ఫలితాన్ని చూస్తే చక్రవడ్డీ ప్రకారం 2 సంవత్సరాల్లో అయిన మొత్తం $A=P\left(I+\frac{R}{100}\right)^2$ అవుతుంది.

అసలు P, కాలమును N, వడ్డీరేటు R, మొత్తము A అనుకొనిన చక్రవడ్డీ ప్రకారం మొత్తం $A=P\left(I+\frac{R}{100}\right)^N$

చక్రవడ్డీ $I=A-P=P\left(I+\frac{R}{100}\right)^N-P=P\left[\left(1+\frac{R}{100}\right)^N-1\right]$

గమనిక: ఒక సంవత్సరమునకు x పర్యాయాలు (ఉదా: అర్థ సంవత్సరానికి ఒకసారి అయిన 2 పర్యాయాలు) వడ్డీ కట్టిన సందర్భాలలో కాలము Nx, వడ్డీరేటు R/x అవుతుంది.

ఉదా: N= 2 సం. R= 12%, మూడునెలలకు ఒకసారి వడ్డీ తిరగకట్టిన x = 4 కావున కాలం = $2 \times 4 = 8$, వడ్డీరేటు 12/4 = 3 అవుతుంది.

అభ్యాసం

1. ఒకరు రూ. 7500 ను 16% రేటున చక్రవడ్డీకి అప్పుతెచ్చారు. 2 సంవత్సరాల చివర బాకి తీర్చడానికి ఎంత సొమ్మివ్వాలి?
2. ఒకడు సంవత్సరానికి 12% వంతున నెలకొకసారి వడ్డీ తిరిగి కట్టే పద్ధతిన రూ. 12,500 అప్పు తెచ్చాడు. ఒక సంవత్సరం చివర బాకి తీర్చడానికి ఎంత సొమ్మివ్వాలి?
3. ఒకడు రూ. 10000 లు చక్రవడ్డీకి అప్పుతేగా 2 సంవత్సరాల్లో రూ. 12769 మొత్తం అయ్యింది. వడ్డీ ఎంత?
4. కొంత సొమ్ముపై సంవత్సరానికి 5% వంతున 2 సంవత్సరాల్లో బారువడ్డీకి, చక్రవడ్డీకి తేదా రూ. 19 అయిన అసలెంత?

నియోజనాలు:

1. పై అభ్యాసంలోని 4వ సమస్యను విశ్లేషణ పద్ధతిలో ఎలా బోధిస్తావు?
2. చక్రవడ్డీ మీద ఆధారపడిన కొన్ని సమస్యలను తయారుచేయండి.
3. బారువడ్డీ – చక్రవడ్డీ బోధించడానికి విద్యార్థులకు ఉండవలసిన పూర్వసామర్థ్యాల ఆధారంగా పునర్విమర్శ అభ్యాసాన్ని తయారుచేయండి.
4. బారువడ్డీ – చక్రవడ్డీ అధ్యాయాన్ని చదివి అందులో వచ్చే కీలక భావనల జాబితాను తయారుచేయండి.
5. 'బారువడ్డీ – చక్రవడ్డీ' అధ్యాయాలకు విషయ విశ్లేషణ రాసి విద్యార్థుల్లో అభివృద్ధి పరచవలసిన సామర్థ్యాల జాబితాను తయారుచేయండి.

2.1.11 ఘాతాలు - ఘాతాంకాలు

పరిచయం:

$3^6 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$ మరియు

$3^n = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$ ....(n సార్లు) అని మనకు తెలుసు.

సూర్యుని వ్యాసము 1,40,00,00,000 మీ. గా అంచనా వేయబడింది. మరియు సూర్యుని ద్రవ్యరాశి 1,989,100,000,000,000,000,000,000,000,000 కి.గ్రా.

సూర్యునికి భూమికి మధ్యగల దూరం149,600,000,000 మీ. విశ్వం యొక్క వయస్సు 12,000,000,000 సంవత్సరాలుగా అంచనా వేయబడింది. భూమి మీద 1,353,000,000 ఘన కి.మీ. నీరు కలదని మీకు తెలుసా!

ఒక చెస్ బోర్డుపైన ప్రతి చదరంగంలో ధాన్యపు గింజలు వుంచబడినాయి. మొదటి చదరంలో ఒక గింజ వుంచబడింది. మిగిలిన ప్రతీ చదరంలో దాని ముందున్న చదరంలోని గింజలకు రెట్టింపు ఉంచబడినాయి. ఇలా 64 చదరాలలో నింపడానికి ఎన్ని గింజలు కావాలో తెలుసా?

ఇవి 18,446,774,073,709,551,615 గింజలు అవుతాయి. ఇలాంటి సంఖ్యలను రాయటం, చదవటం, అర్థం చేసుకోవటం కష్టం అనిపించుట లేదా? ఇలాంటి వానిని ఘాతాంకాలను ఉపయోగించి ఎలా రాస్తామో గుర్తుకు తెచ్చుకోండి.

1,40,00,100,000 మీ. = 1.4×10^9 మీ.

10^9 ను 10 యొక్క 9వ ఘాతమని చదువుతాం.

గింజలసంఖ్యను $2^{64}-1$ అని రాస్తాం.

సాధారణంగా గుణకారాలలో అంకగణితంలోగాని బీజగణతంలోగాని ఒకే సంఖ్య లేదా బీజం చాలా పర్యాయాలు గుణింపు పొందుతూ ఉండటం చూస్తూ ఉంటాం.

ఉదా: 1) వ్యాసార్థం 10 సెం.మీ. ఉన్న గోళం వక్రతల వైశాల్యం

$= 4 \times \pi \times r \times r$

$= 4 \times \frac{22}{7} \times 10 \times 10$ చ.సెం.మీ.

ఉదా: 2) 5 సెం.మీ. భుజం కలిగిన ఘనం ఘనపరిమాణం (v)

= 5 × 5 × 5

= 125 ఘ.సెం.మీ.

ఉదా: 3) అసలు = రూ. 5000

వడ్డీరేటు = 5%

కాలం = 4 సంవత్సరాలు

మొత్తం = $5000\left(1+\frac{5}{100}\right)\left(1+\frac{5}{100}\right)\left(1+\frac{5}{100}\right)\left(1+\frac{5}{100}\right)$

$= 5000\left(1+\frac{1}{20}\right)\left(1+\frac{1}{20}\right)\left(1+\frac{1}{20}\right)\left(1+\frac{1}{20}\right)$

$= 5000\left(\frac{21}{20}\right)\left(\frac{21}{20}\right)\left(\frac{21}{20}\right)\left(\frac{21}{20}\right)$

పై ఉదాహరణలతో సమాధానాలు లబ్ధరూపంలో ఉన్నాయి. వీటిని క్లుప్తంగా కింది విధంగా సూచించంవచ్చు.

	లబ్ధరూపం		**సంక్షిప్తరూపం**
1.	$4\times\pi\times 10\times 10$	=	$4\pi 10^2$
2.	$5 \times 5 \times 5$	=	5^3
3.	$5000\left(\frac{21}{20}\right)\left(\frac{21}{20}\right)\left(\frac{21}{20}\right)\left(\frac{21}{20}\right)$	=	$5000\left(\frac{21}{20}\right)^4$

పైన పేర్కొన్న సంక్షిప్త రూపాలలో ఘాత రూపాలను పరిశీలిద్దాం. ఈ ఘాత రూపాలలో భూమి. ఘాతాంకాలు ఉన్నాయి. భూమి, ఘాతాంకంతో ఏర్పడే మొత్తం పదాన్ని ఘాతం అంటాం. భూమి, ఘాతాంకాల సంఖ్యారూపంలోగాని, బీజరూపంలోగానీ రెండింటిలో ఉండవచ్చు.

కింది పట్టికలో, ఆయా ఘాతాంకాలలోని భూమి, ఘాతాంకాలను పరిశీలించండి.

క్ర.సం.	ఘాతరూపం	భూమి	ఘాతాంకం
1.	5^3	5	3
2.	$\left(\frac{21}{20}\right)^4$	$\frac{21}{20}$	4

మరికొన్నిన్ని ఉదాహరణలు పరిశీలించండి.

లబ్ధం	ఘాతరూపం	భూమి	ఘాతాంకం	చదివే విధానం
1) 2×2 2 అనే అంకె తనకు తాను 2 సార్లు గుణనం పొందింది.	2^2	2	2	2 వర్గం లేదా 2 యొక్క రెండవ ఘాతం లేదా 2 ఘాతం రెండు.
2) $4 \times 4 \times 4$	4^3	4	3	4 ఘనం లేదా 4 యొక్క మూడవ ఘాతం.
3) $10 \times 10 \times 10 \ldots \mathrm{n}$	10^{n}	10	n	10 యొక్క వ 'n' వ ఘాతం
4) $a \times a \times a \times a$	a^4	a	4	a యొక్క '4' వ ఘాతం
5) $a \times a \times a \times a$..15సార్లు	a^{15}	a	15	a యొక్క '15' వ ఘాతం
6) $a \times a \times$......n సార్లు	a^{n}	a	n	a యొక్క 'n' వ ఘాతం

ఉదా: పై సమస్యల మాదిరిగా మరిన్ని సమస్యలను ఇచ్చి పైన పేర్కొన్న విధంగా విద్యార్థులచేత రాయించడం, చదివించడం అలవాటుచేయాలి.

అలాగే ఘాత రూపంలో తెలిపిన రాశులను కారణాంకాలుగా రాయించాలి.

ఉదా: $7a^5 = 7 \times a \times a \times a \times a \times a$

$5a^3b^4 = 5 \times a \times a \times a \times b \times b \times b \times b$

$$6\left(\frac{p}{q}\right)^3 = 6\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{p}{q}\right)$$

$$\left(\frac{3x}{y}\right)^4 = \frac{3x}{y}\times\frac{3x}{y}\times\frac{3x}{y}\times\frac{3x}{y}$$

$$= 3\times3\times3\times3\times\frac{x}{y}\times\frac{x}{y}\times\frac{x}{y}\times\frac{x}{y}$$

ఏదైనా ఒక సంఖ్యకు కానీ, లేక బీజానికి గాని ఘాతాంకం లేకపోతే దాని ఘాతాంకం '1' గా భావించాలి. x అంటే x^1 అని భావించాలి.

సూచన:

బీజాంకాలను ఘాతరూపంలోకి మార్చడానికి ఉపాధ్యాయుడు ఆగమన పద్ధతి వినియోగించాలి.

ఘాతాంక న్యాయాలు

ఘాతాంక న్యాయాలకు సంబంధించిన సూత్రాలను పరిచయం చేయడానికి ముందుగా ఘాతాంకాలు ధన పూర్ణరాశులు ఉన్న ఘాతాలతో ప్రారంభించి క్రమంగా రుణపూర్ణరాశులు ఉన్న ఘాతాలకు పరిచయం చేయాలి.

ఘాతాంకాలు, ధనపూర్ణ సంఖ్యలు ఉన్న ఘాతాలు

న్యాయం-1 ఒకే భూమి ఉన్న ఘాతాంకాల గుణకారం

కింద ఉదాహరణలు గమనించి రాయండి.

i) $3^4\times3^5 = (3\times3\times3\times3)\times(3\times3\times3\times3\times3)$

$= 3\times3\times3\times3\times3\times3\times3\times3\times3$

$= (3^9) = 3^{4+5}$

ii) $\left(\frac{2}{3}\right)^3\times\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)\times\left(\frac{2}{3}\right)\times\left(\frac{2}{3}\right)\times\left(\frac{2}{3}\right)\times\left(\frac{2}{3}\right)$

$$= \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3}$$

$$= \left(\frac{2}{3}\right)^5 = \left(\frac{2}{3}\right)^{3+2}$$

iii) $a^2 \times a^3 \times a^4 = (a \times a) \times (a \times a \times a) \times (a \times a \times a \times a)$

$= (a \times a \times a \times a \times a \times a \times a \times a \times a)$

$= a^9 = a^{2+3+4}$

iv) $a^m \times a^n \times a^p$ = ($a \times a \times .....a$ m సార్లు) × ($a \times a \times ....a$ n సార్లు)

× ($a \times a \times .....a$ p సార్లు)

= ($a \times a \times a .....$m+n+p సార్లు)

$= a^{m+n+p}$

పై ఉదాహరణల పరిశీలన ఆధారంగా కింది విధంగా సూత్రీకరణ చేయించాలి.

న్యాయం–1 ఒకే భూమి ఉన్న ఘాతాంకాల లబ్ధం అదే భూమికి ఆ ఘాతాంకాల మొత్తాన్ని ఘాతాంకంగా కలిగి ఉంటుంది.

$a \neq 0$ అయి m,n.p లు ధన పూర్ణ సంఖ్యలైతే

$a^m \times a^n = a^{m+n}$

$a^m \times a^n \times a^p = a^{m+n+p}$

గమనిక: ఈ పాఠ్యాంశంలో చర్చించిన ఫలితాలలో భూమి శూన్యేతర వాస్తవ సంఖ్య ఉండి పూర్ణసంఖ్యలు ఘాతాంకాలుగా ఉంటాయి.

న్యాయం–2 ఘాతం యొక్క ఘాతం

కింది ఉదాహరణలు పరిశీలించండి.

i) $(2^3)^2 = 2^3 \times 2^3$

$= 2^{3+3} = 2^6 = 2^{3\times 2} = 2^6$

ii) $\left[\left(\frac{3}{4}\right)^2\right]^3 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 \times \left(\frac{3}{4}\right)^2 \times \left(\frac{3}{4}\right)^2$

$$= \left(\frac{3}{4}\right)^{2+2+2}$$

$$= \left(\frac{3}{4}\right)^{6} = \left(\frac{3}{4}\right)^{2\times 3}$$

iii) $\left(a^{m}\right)^{n} = \left(a^{m}\right)\times\left(a^{m}\right)\times\left(a^{m}\right)....$ n సార్లు

$= a^{m+m+m+....}$ n సార్లు

$= a^{m\times n} = a^{mn}$ (m,n లు ధన పూర్ణ సంఖ్యలు)

పై ఉదాహరణల పరిశీలన ఆధారంగా సూత్రీకరణ చేయించాలి.

న్యాయం-2 m,n లు ధన పూర్ణసంఖ్యలై $a \neq 0$ అయ్యేటట్లుంటే వాస్తవ సంఖ్యయైన $(a^{m})^{n} = a^{mn}$

న్యాయం-3 లబ్ధం యొక్క ఘాతం

కింది ఉదాహరణలు పరిశీలించండి.

i) $(2\times 3)^{4} = (2\times 3)\times(2\times 3)\times(2\times 3)\times(2\times 3)$

$= 2\times 3\times 2\times 3\times 2\times 3\times 2\times 3$

$= (2\times 2\times 2\times 2)\times(3\times 3\times 3\times 3)$

$= 2^{4}\times 3^{4}$

ii) $(ab)^{m} = (ab)\times(ab)\times(ab)\times......$ (m సార్లు)

$= (a\times b)\times(a\times b)\times(a\times b)\times......$ (m సార్లు)

$= (a\times a\times......b\times b\times......$ (m సార్లు)

$= a^{m}\times b^{m}$

$(ab)^{m} = a^{m}\times b^{m}$

న్యాయం-3 $a \neq 0, b \neq 0$ వాస్తవ సంఖ్యలైన *'m'* ఒక ధన పూర్ణ సంఖ్యయైన

$$(ab)^m = a^m \times b^m$$

పై సూత్రం ప్రకారం $(abc......z)^m$

$$= a^m \times b^m \times ....z^m$$

న్యాయం-4 భాగహార న్యాయం

కింది వాస్తవ సంఖ్యను పరిశీంపచేయండి.

i) $$\frac{a^6}{a^4}(6 > 4) = \frac{a \times a \times a \times a \times a \times a}{a \times a \times a \times a} = a^2 = a^{6-4}$$

iii) $$\frac{a^3}{a^6}(3 < 6) = \frac{a \times a \times a}{a \times a \times a \times a \times a} = \frac{1}{a^3} = \frac{1}{a^{6-3}} = a^{-3}$$

iii) $$\frac{(-y)^3}{(-y)^5}(3 < 5) = \frac{(-y)\times(-y)\times(-y)}{(-y)\times(-y)\times(-y)\times(-y)\times(-y)}$$

$$= \frac{1}{(-y)^2} = \frac{1}{(-y)^{5-3}} = (-y)^{-5+3}$$

iv) $$\frac{x^7}{x^7} = x^{7.7} = x^0 = 1$$

పై ఉదాహరణలు (i) లలో లవహారాల ఘాతాంకాలను పోలిస్తే లవం ఘాతాంకం, హారం యొక్క ఘాతాంకం కంటే పెద్దదని (m>n), భాగఫల ఘాతాంకం లవహారాల ఘాతాంకాల భేదానికి సమానమని గమనిస్తారు.

అలాగే ఉదా: (ii), (iii) లలో లవం ఘాతాంకం, హారం ఘాతాంకం కంటే చిన్నదని, భాగఫలం ఘాతాంకం లవహారాల ఘాతాంకాల బేధానికి సమానమని ఆ విలువ ఋణపూర్ణ సంఖ్య అవుతుందని గమనించవచ్చు.

(iv) వ ఉదాహరణ నుంచి $\frac{a^m}{a^m} = a^0 = 1$ అని గమనించవచ్చు.

పై పరిశీలనను అనుసరించి కింది విధంగా సూత్రీకరించాలి.

i) m>n; $a \neq 0$ అయితే $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

ii) m<n; $a \neq 0$ అయితే $\frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}}$

iii) m=n; $a \neq 0$ అయితే $\frac{a^m}{a^m} = a^{m-m} = a^0 = 1$

న్యాయం-5 విభక్త ఘాత న్యాయం

కింది ఉదాహరణలు పరిశీలించండి.

$$\left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{3 \times 3 \times 3}{4 \times 4 \times 4} = \frac{3^3}{4^3}$$

(ఇలాంటి ఉదా:లు ఇంకొన్ని ఇవ్వాలి)

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \ldots\ldots \frac{a}{b}$$

$$= \frac{a \times a \times a \times \ldots\ldots (n \text{ సార్లు})}{b \times b \times b \times \ldots\ldots (n \text{ సార్లు})} = \frac{a^n}{b^n}$$

a, b శూన్యేతర వాస్తవ సంఖ్యలకు n ధనపూర్ణ సంఖ్యయైన $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

ఇంత వరకు ఘాతాంకాలు ధన పూర్ణ సంఖ్యలుగా గల ఘాతాలను మాత్రమే ఉపయోగించాం. ఒక వేళ ఘాతాంకం '0' లేదా ఋణ పూర్ణ సంఖ్యలు ఉంటే ఏ ఏ ఘాతాంక న్యాయాలు వర్తిస్తాయో విద్యార్థులను ప్రశ్నించాలి.

'a' శూన్యేతర అకరణీయ సంఖ్యయైన $\dfrac{a^m}{a^m} = a^{m-m} = a^0 = 1$

సున్నా ఘాతాంకంగా ఉన్న ఘాతాల విలువ 1

పై నియమాన్ని కింది విధంగా సూత్రీకరించవచ్చు.

$\dfrac{a^m}{a^n} = a^{(m-n)}, (m > n)$ లేదా $\dfrac{1}{a^{n-m}}, (n > m)$

$m = n$ అయితే $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ లేదా $\dfrac{1}{a^{n-m}}$

$1 = a^0$ లేదా $\dfrac{1}{a^0}$

ఘాతాంకాలు ఋణపూర్ణ సంఖ్యలుగా ఉన్న ఘాతాలు

1. ఘాతాంకం (-1) కలిగిన ఘాతం

కింది గుణకారాలను పరిశీలించమనండి.

1) $2 \times \dfrac{1}{2}$ 2) $\dfrac{4}{5} \times \dfrac{1}{4/5}$ 3) $-3 \times \dfrac{1}{-3}$ 4) $a \times \dfrac{1}{a}$

పై గుణకారాలలో ఫలితం 1 అయినందువల్ల 2కు $\dfrac{1}{2}$ గుణకార విలోమం, -3 కు $\dfrac{-1}{3}$ గుణకార విలోమం, $\dfrac{4}{5}$ కు గుణకార విలోమం $\dfrac{5}{4}$, a కు గుణకార విలోమం $\dfrac{1}{a}$ అని విద్యార్థులకు గుణకార విలోమ ధర్మాన్ని గుర్తింపజేసి గుణకార విలోమాలను ఘాతాంక రూపంతో రాసే విధానాన్ని పరిచయం చేయాలి.

$2 \times \dfrac{1}{2}$ లో $\dfrac{1}{2}$ ని 2^{-1}

$-3 \times \dfrac{1}{-3}$ లో $\dfrac{-1}{3}$ ని $(-3)^{-1}$

$\frac{4}{5}\times\frac{1}{4/5}$ లో $\frac{1}{4/5}$ లేదా $\frac{5}{4}$ ని $(4/5)^{-1}$

అలాగే $a\times\frac{1}{a}$ లో $\frac{1}{a}$ లేదా a^{-1} గా సూచించాలి. పై ఉదాహరణల నుండి

> a ఒక శూన్యేతర వాస్తవ సంఖ్య అయితే aకు గుణకార విలోమం a^{-1}గా సూచిస్తారు.

2^2 కు విలోమం $\frac{1}{2^2}$ అని దానిని 2^{-2} గా రాయవచ్చుని అట్లాగే $\left(\frac{1}{-3}\right)^4$ ని

$(-3)^{-4}$ అని, $\left(\frac{4}{5}\right)^4$ గుణకార విలోమ $\left(\frac{1}{4/5}\right)^4$ ని $\left(\frac{4}{5}\right)^{-4}$ గా, a^m కు

గుణకార విలోమం $\frac{1}{a^m}$ ని a^{-m} గా రాయవచ్చు.

a ఒక శూన్యేతర వాస్తవ సంఖ్య 'n' ధనపూర్ణ సంఖ్యయైన a^m గుణకార విలోమం

$\frac{1}{a^n}$ ని a^{-m} గా సూచిస్తాం.

కింది ఉదాహరణలు పరిశీలింపజేయండి.

ఉదా−1: $\left(\frac{3}{5}\right)^{-6} = \frac{1}{(3/6)^6} = \frac{1}{3^6/5^6} = \left(\frac{5}{3}\right)^6$

ఉదా−2: $\left(\frac{-2}{5}\right)^{-4} = \frac{1}{(-2/5)^4} = \frac{1}{(-2)^4/(5)^4} = \frac{5^4}{(-2)^4}\left(\frac{5}{-2}\right)4$ లేదా $\left(\frac{-5}{2}\right)^4$

పై ఉదాహరణలు అనుసరించి కింది సాధారణీకరణాన్ని చేయించాలి.

> $\frac{p}{q}$, $p\neq 0$ అయినట్టి వాస్తవ సంఖ్య యొక్క ఘాతాంకం ఋణ పూర్ణ సంఖ్య
>
> అయితే $\left(\frac{p}{q}\right)^{-m} = \frac{q^m}{p^m} = \left(\frac{q}{p}\right)^m$

సూచన:

1. పై ఘాతాంక న్యాయాలు ఘాతాలు a, b లు శూన్యేతర వాస్తవ సంఖ్యలను ఉపయోగిస్తూ స్థాపించటం జరిగింది. ఉపాధ్యాయుడు తరగతి విద్యార్థుల స్థాయిని బట్టి సహజ సంఖ్యలు పూర్ణ సంఖ్యలు క్రమంగా అకరణీయ సంఖ్యలను ఉపయోగించి ఘాతాంక న్యాయాలను స్థాపించవచ్చు.
2. ఘాతాంక న్యాయాలు బోధించడానికి ఉపాధ్యాయుడు ప్రధానంగా ఆగమన పద్ధతి వాడాలి. విద్యార్థులకు రాశుల క్రమాన్ని, అమరికను పరిశీలించే సామర్థ్యాన్ని పెంపొందించడానికి అన్వేషణ స్ఫూర్తిని కలిగించే ప్రశ్న పద్ధతిని వాడవచ్చు. విద్యార్థులు ఈ ఘాతాంక న్యాయాలను ఉపయోగించి సమస్యలను, సూక్ష్మీకరించే విధానాన్ని తెలపడానికి 'నిగమన పద్ధతి' ఉపయోగించాలి.
3. పై ఘాతాంక న్యాయాలు ఘాతాలు a, b లు శూన్యేతర అకరణీయ లేదా వాస్తవ సంఖ్యలు; ఘాతాంకాలు ధనపూర్ణ సంఖ్యలను ఉపయోగించి స్థాపింఛడం జరిగింది. ఘాతాంకాలు ధన పూర్ణ సంఖ్యల బదులు ఋణ పూర్ణ సంఖ్యలకు విస్తరించి ఏ ఏ ఘాతాంక న్యాయాలు ధన, ఋణ పూర్ణ సంఖ్యలకు వర్తిస్తాయో తెలియపరచవలెను.

అదనపు సమాచారం:

ఇంత వరకు ఘాతాలు, వాస్తవ సంఖ్యలు, ఘాతాంకాలు పూర్ణ సంఖ్యలైనపుడు ఘాతాంక న్యాయాలు ఏ విధంగా ఉంటాయో చర్చిద్దాం. ఘాతాంకాలు పూర్ణ సంఖ్యలు కాకుండా అకరణీయ సంఖ్యలైనపుడు ఫలితాలు ఎలా ఉంటాయో చర్చిద్దాం.

$3^2 = 9$ లో '9' అనేది '3' యొక్క వర్గం.

'3' ని '9' యొక్క వర్గమూలంగా సూచించవచ్చు.

సాంకేతికంగా $\sqrt{9} = \sqrt{3 \times 3} = 3$ అని, ఘాతాంక రూపంలో $9^{\frac{1}{2}} = 3$ అని రాస్తారు.

అలాగే $5^3 = 125$ లో 125 యొక్క ఘన మూలం 5 అని చెప్పటం జరుగుతుంది.

$3\sqrt{125} = 3\sqrt{5 \times 5 \times 5} = 5$ ఘాతాంక రూపంలో $(125)^{\frac{1}{3}} = 5$

$4\sqrt{16} = 4\sqrt{2 \times 2 \times 2 \times 2} = 2$ ఘాతాంక రూపంలో $(16)^{\frac{1}{4}} = 2$

అదే విధంగా $y = x^2$ అయితే

$y = x^2$

$x = \sqrt{y}$, ఘాతాంక రూపంలో $x = y^{\frac{1}{2}}$

$y = x^3$ అయితే

$x = \sqrt[3]{y}$ ఘనమూలం, ఘాతాంక రూపంలో $x = y^{\frac{1}{3}}$

$y = \sqrt[4]{y}$ నాలగవ మూలం, ఘాతాంక రూపంలో $x = y^{\frac{1}{4}}$

$y = x^n, n \in N$ అయితే

$x = \sqrt[n]{y} \rightarrow n$ వ మూలం; ఘాతాంక రూపంలో $x = y^{\frac{1}{n}}$

అకరణీయ ఘాతాంకాల న్యాయాలు:

1. ఒకే భూమి ఉన్న ఘాతాంకాల గుణకారం

   కింది ఉదాహరణలు పరిశీలించండి.

   ఎ) $8^{\frac{1}{2}} \times 8^{\frac{1}{2}} \times 8^{\frac{1}{2}}$

   $2 \times 2 \times 2 = 8$ (ఘాతాంక న్యాయం ఉపయోగించకుండా)

   $\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2 \times 2 \times 2} = 2$

   $8^{\frac{1}{3}} \times 8^{\frac{1}{3}} \times 8^{\frac{1}{3}} = 8^{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}} = 8^{\frac{3}{3}} = 8$

   ($a^m \times a^n = a^{m+n}$ అనే ఘాతాంక న్యాయం ఉపయోగించి)

   పై ఉదాహరణల ద్వారా ఘాతాంకాలు అకరణీయ సంఖ్యలైనప్పటికీ ఘాతాంక సూత్రం వర్తిస్తుంది.

2. అలాగే $(27)^{\frac{1}{3}} (27)^{\frac{2}{3}} = 27^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}} = 27^{\frac{3}{3}} = 27^1 = 27$

3. $x^{\frac{2}{5}} \times x^{\frac{3}{5}} = x^{\frac{2}{5}+\frac{3}{5}} = x^{\frac{5}{5}} = x^1 = x$

   పై ఉదాహరణల నుండి కింది న్యాయాన్ని సాధారణీకరిస్తే

$a \neq 0; m, n$ లు అకరణీయ సంఖ్యలు

$$\boxed{a^m \times a^n = a^{m+n}}$$

ఘాతం యొక్క ఘాతం

1. $\left[(16)^{\frac{1}{2}}\right]^2 = 16^{\frac{1}{2}} \times 16^{\frac{1}{2}}$

$$= \sqrt{16} \times \sqrt{16} = 4 \times 4 = 16$$

(ఘాతాంక న్యాయం ఉపయోగించకుండా)

2. $\left(16^{\frac{1}{2}}\right)^2 = 16^{\frac{1}{2}\times 2} = 16^1 \left[(\therefore a^m)^n = a^{mn}\right]$

(ఘాతాంక న్యాయాన్ని ఉపయోగించి)

3. $\left(125^{\frac{1}{3}}\right)^3 = 125^{\frac{1}{3}} \times 125^{\frac{1}{3}} \times 125^{\frac{1}{3}}$

$= \sqrt[3]{125} \times \sqrt[3]{125} \times \sqrt[3]{125}$ (ఘాతాంక న్యాయం ఉపయోగించకుండా)

$= \sqrt[3]{5\times5\times5} \times \sqrt[3]{5\times5\times5} \times \sqrt[3]{5\times5\times5} = 5\times5\times5 = 125$

$\left(125^{\frac{1}{3}}\right)^3 = 125^{\frac{1}{3}\times 3} = 125^1 = 125 \left(a^m\right)^n = a^{mn}$ అనే ఘాతాంక న్యాయాన్ని

ఉపయోగించటం ద్వారా

$\left(x^2\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x^2} = x$ (ఘాతాంక న్యాయం ఉపయోగించకుండా)

$\left(x^2\right)^{\frac{1}{2}} = x^{2\times\frac{1}{2}} = x^1 = x$ (ఘాతాంక న్యాయాన్ని ఉపయోగిస్తూ)

పై ఉదాహరణలలో ఘాతాంకాలు అకరణీయ సంఖ్యలైనప్పటికీ ఘాతాంక న్యాయం $(a^m)^n = a^{mn}$ వర్తిస్తుంది.

$$\left(x^{\frac{2}{3}}\right)^3 = x^{\frac{2}{3}\times 3} = x^2$$

$$\left(y^4\right)^{\frac{1}{2}} = y^{4\times\frac{1}{2}} = y^2$$

$$\left(z^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{r}{s}} = \left(z^{\frac{pr}{qs}}\right)$$

పై ఉదాహరణల నుండి 'a' శూన్యేతర వాస్తవ సంఖ్య ; m, n అకరణీయ సంఖ్యలైనప్పటికీ ఘాతం యొక్క ఘాతం న్యాయం వర్తిస్తుంది.

$$\left(a^m\right)^n = a^{mn}$$

లబ్దం యొక్క ఘాతం

కింది ఉదాహరణలు పరిశీలించండి.

1. $(9\times 4)^{\frac{1}{2}} \quad = (36)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{36} = 6$

$\left(9^{\frac{1}{2}}\right) \times \left(4^{\frac{1}{2}}\right) \quad = \sqrt{9}\times\sqrt{4} = 3\times 2 = 6$

2. $(125\times 8)^{\frac{1}{3}} \quad = (1000)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{1000} = \sqrt[3]{10\times 10\times 10} = 10$

$(125)^{\frac{1}{3}}\times(8)^{\frac{1}{3}} \quad = \sqrt[3]{125}\times\sqrt[3]{8} = 5\times 2 = 10$

పై ఉదాహరణల ద్వారా లబ్ధ ఘాత న్యాయం అకరణీయ ఘాతాలకు వర్తిస్తుంది.

$a, b \neq 0$ ఘాతాంకాలు అకరణీయ సంఖ్యలైన $\left(a\times b\right)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{p}{q}}\ b^{\frac{p}{q}}$ లేదా

$(a\times b)^n = a^n\,, b^n$ $\quad n$ అకరణీయ సంఖ్య

భాగహార న్యాయం

1. $\dfrac{16^{\frac{1}{2}}}{16^{\frac{1}{4}}} = \dfrac{4}{2} = 2$ (ఘాతాంక న్యాయం ఉపయోగించకుండా)

= $\dfrac{16^{\frac{1}{2}}}{16^{\frac{1}{4}}} = 16^{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}$

(ఘాతాంక న్యాయం $a^{(m>n)} = a^{(m-n)}$ ఉపయోగిస్తూ)

= $16^{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}} = 16^{\frac{1}{4}} = 2$

2. $\dfrac{81^{\frac{1}{4}}}{81^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{3}{9} = \dfrac{1}{3}$

(ఘాతాంక న్యాయం ఉపయోగించకుండా)

$\dfrac{81^{\frac{1}{4}}}{81^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{1}{81^{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}} \quad \left(\therefore \dfrac{1}{2} > \dfrac{1}{4}\right)$

(ఘాతాంక న్యాయం : $n > m$ అయిన $\dfrac{a^m}{a^n} = \dfrac{1}{a^{m-m}}$ ని ఉపయోగిస్తూ)

= $\dfrac{1}{81^{\frac{2-1}{4}}} = \dfrac{1}{81^{\frac{1}{4}}} = \dfrac{1}{3}$

పై ఉదాహరణల నుండి ఘాతాంకాలు అకరణీయ సంఖ్యలైనప్పటికీ 'భాగహార న్యాయం' వర్తిస్తుందని చెప్పవచ్చా?

విభక్త న్యాయం

1. $\left(\frac{4}{16}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{4}{16}\right)^{\frac{1}{2}}$

$=\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$ (విభక్తన్యాయం ఉపయోగించకుండా సూక్ష్మీకరణ ద్వారా)

$\left(\frac{4}{16}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{4^{\frac{1}{2}}}{16^{\frac{1}{2}}} = \frac{2}{1} = \frac{1}{2}$ (విభక్త ఘాతన్యాయం $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$ ఉపయోగిస్తూ)

2. $\left(\frac{125}{1000}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{125}{1000}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$ (విభక్త ఘాతన్యాయం ఉపయోగించకుండా సూక్ష్మీకరణ ద్వారా)

$= \left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$

$\left(\frac{125}{1000}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{(125)^{\frac{1}{3}}}{(1000)^{\frac{1}{3}}} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$ (విభక్త న్యాయం ఉపయోగిస్తే)

పై రెండు ఉదాహరణలు ద్వారా ఘాతాంకాలు అకరణీయ సంఖ్యలైనప్పటికీ విభక్త ఘాత న్యాయం వర్తిస్తుంది.

$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^n}{b^n};\ a, b \neq 0; n$ అకరణీయ సంఖ్య

$(16)^{\frac{1}{4}} = 16^{2\times\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{16^2}$ గా రాయవచ్చు $\left(\therefore 16^{\frac{1}{4}} = 4\sqrt{16}\right)$

$125^{\frac{3}{4}} = 125^{3\times\frac{1}{4}} = 4\sqrt{125^3}$

$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

2^3 కు గుణకార విలోమం $1/2^3$ లేదా 2^{-3} అయినట్లు

$4^{\frac{1}{2}}$ కు గుణకార విలోమం $\frac{1}{4}^{\frac{1}{2}} = 4^{-\frac{1}{2}}$ లేదా 2^{-3} అయినట్లు

$125^{\frac{1}{3}}$ కు గుణకార విలోమం $\frac{1}{125^{\frac{1}{3}}} = 125^{-\frac{1}{3}}$

అలాగే

$a^{\frac{p}{q}}$ గుణకార విలోమం $a^{-\frac{p}{q}}$ అవుతుంది.

అభ్యాసం

1. కింది వాటిని ఘాత రూపంలో రాయండి.

a) $\frac{x}{y}\times\frac{x}{y}\times.............n$ సార్లు గుణిస్తే

b $(2a+b)\ (2a+b)\ (2a+b)$

c) $(2a\times2a\times2a\times2a)\ +\ (3b\times3b\times3b)$

2. కింది వాటిని కారణాంకాలుగా రాయండి.

a) $7\ p^2q^3$

b) $a \times b^5$

c) $\left(\frac{a}{b}\right)^3 - \left(\frac{c}{d}\right)^3$

3. దీర్ఘచతురస్రం వెడల్పు, పొడవులో మూడవ వంతు అయితే దాని వైశాల్యం కనుక్కోండి.

4. దీర్ఘఘనం పొడవు, వెడల్పుకు 3 రెట్లు దాని ఎత్తు పొడవులో సగం. వెడల్పు 6 సెం.మీ. అయితే దాని ఘనపరిమాయం కనుక్కోండి.

5. కుందేళ్ళ పెంపకంలో 'x' కుందేళ్ళు ఉన్నాయి. నెల తరవాత వీటి జనాభా 'y' రెట్లు పెరిగినట్లయితే రెండు నెలల తరువాత జనాభా సంఖ్యను తెలపండి.

అభ్యాసం

1. కింది విలువలను కనుక్కోండి.

a) $(-1)^{\frac{1}{2}}$ b) $(-1)^{15}$ c) $(-x)^{5}$ d) $(-x)^{0}$

పై విలువలను కనుగొన్న తరువాత కింది అంశాలను పరిశీలించి వాటి ఫలితాలను బట్టి తగిన సూత్రీకరణ చేయండి.

1. ఎ) ఘాతాంకాలు సరి సంఖ్యలైతే వాటి విలువలు ధన సంఖ్యలా, ఋణ సంఖ్యలా?

   బి) ఘాతాంకాలు బేసి సంఖ్యలైతే వాటి విలువలు ఋణ సంఖ్యలా? బేసి సంఖ్యలా?

2. విలువలను కనుక్కోండి.

   i) $\left[\left(-\frac{2}{3}\right)^{4}\times\left(\frac{-3}{4}\right)^{3}\right]$

   ii) $(-2)^{3}\div\left(-\frac{1}{3}\right)^{4}$

   iii) $\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{2}-\left(\frac{1}{4}\right)^{3}\right]\times 2^{3}$

3. ఘాత రూపంలో రాయండి.

   i) $\frac{-64}{125}$ ii) $\frac{x^{3}}{243}$ iii) $\frac{125x^{3}}{343y^{3}}$

4. కింది లబ్దాలను కనుక్కోండి.

i) $\left(-x^2\right)^4 \times \left(-y^2\right)^3 \times \left(xy\right)^2$

ii) $\left(x^2\right)^m \times \left(x^3\right)^n \times x^p$

iii) $x^{a+b-c} \times x^{b+c-a} \times x^{c+a-b}$

5. $x^n = 64$ ఐన $x^{n+2}; x^{n-2}$ విలువలను కనుక్కోండి.

6. i) $5^{3x+1} = 25^{x+2}$ అయిన x విలువ ఎంత?

ii) $8^{x+2} = 16^{x-2}$ అయిన x విలువ ఎంత?

7. సూక్ష్మీకరించండి.

i) $\left[\left(a^2\right)^{-2}\right]^2$ ii) $\dfrac{a^{12}b^8c^{10}}{a^6b^{-5}c^{12}}$

iii) $\left(\dfrac{x^a}{x^b}\right)^c \times \left(\dfrac{x^b}{x^c}\right)^a \times \left(\dfrac{x^c}{x^a}\right)^b$

8. కింది విలువలను కనుక్కోండి.

i) $\left(0.008\right)^{\frac{1}{3}}$ ii) $\left(0.081\right)^{\frac{1}{3}}$ iii) $\left(243\right)^{-\frac{1}{5}}$

9. $\dfrac{x^{\frac{-1}{3}}y^{\frac{-1}{2}}}{x^{-1}y^{\frac{-1}{3}}}$ సూక్ష్మీకరించండి.

10. i) $\sqrt{a^{-1}b}\ \sqrt{b^{-1}c}\ \sqrt{c^{-1}a}$ సూక్ష్మీకరించండి.

i) $\sqrt[3]{n^2}$; ii) $\sqrt[4]{a^{-2}}$; iii) $\sqrt[3]{27a^3b^6}$ సూక్ష్మీకరించండి.

2.1.12 కారణాంకాలు

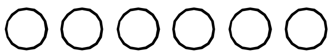
కారణాంక భావన:

ఉపాధ్యాయుడు 6 నాణేలను ఒక విద్యార్థికి ఇచ్చి వాటిని వరుసలో అంటే ప్రతి వరుసలోను సమానసంఖ్యలో నాణేలు వుండే విధంగా అమర్చాలని కోరితే. ఆ నాణేలను క్రింది విధంగా అమర్చగలరు.

సందర్భం: 1) ప్రతి నిలువ వరుసలో ఒక నాణెము వుండే విధంగా అమరిస్తే లేక అన్ని నాణేలను ఒకే అడ్డు వరుసలో అమరిస్తే

నిలువు వరుసల సంఖ్య = 6

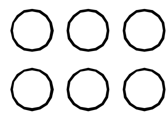
మొత్తం నాణేలు R 1 × 6 = 6



సందర్భం: 2) ప్రతి నిలువు వరుసలో రెండేసి నాణేలుండే విధంగా అమరిస్తే

నిలువు వరుసల సంఖ్య = 3

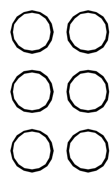
మొత్తం నాణేలు = 2 × 3 = 6



సందర్భం: 3) ప్రతి నిలువు వరుసలో మూడేసి నాణేలుండే విధంగా అమరిస్తే

నిలువు వరుసల సంఖ్య = 2

మొత్తం నాణేలు = 3 × 2 = 6

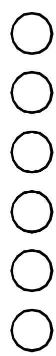


సందర్భం: 4) ప్రతి నిలువు వరుసలో 6 నాణేలుండే విధంగా అమరిస్తే లేదా అన్ని నాణెలను నిలువ వరుసలో అమరిస్తే

నిలువు వరుసల సంఖ్య = 1

మొత్తం నాణేలు = 6 × 1

= 6



పైన పేర్కొన్న సందర్భాలలో మాత్రమే 6 నాణాలను అమర్చగలం.

ఈ అమరికల వలన 6ను రెండు సంఖ్యల లబ్ధంగా $6 = 1 \times 6$, $6 = 3 \times 2$, $6 = 2 \times 3$, $6 = 6 \times 1$ గా వ్రాయవచ్చని విద్యార్థి గమనిస్తాడు.

$6 = 2 \times 3$ నుండి 2 మరియు 3,6 ను నిశ్శేషంగా భాగిస్తాయని చెప్పగలం. అందుచే 2,3లను 6కు కారణాంకాలుగా చెప్పవచ్చు. $6 = 1 \times 6$ నుండి 6 మరియు 1 లను 6 యొక్క కారణాంకాలుగా చెప్పవచ్చు.

1, 2, 3, 6 మాత్రమే 6 యొక్క కారణాంకాలు.

'ఒక సంఖ్యను నిశ్శేషంగా భాగించే మరో సంఖ్యను ఆ సంఖ్య యొక్క కారణాంకం' అంటారు.

మరో విధంగా చెప్పాలి అంటే ఒక సంఖ్యను నిశ్శేషంగా భాగించే సంఖ్యలను ఆ సంఖ్య కారణాంకాలుగా చెప్పవచ్చు. ఇక్కడ 1,2,3,6 లు 6 యొక్క కారణాంకాలు. అదే విధంగా 1,19 లు 19 యొక్క కారణాంకాలు. 5,16 యొక్క కారణాంకం కాదు. ఎందుచేత? ఈ కింది పట్టికను పరిశీలించండి.

సంఖ్య	**కారణాంకాలు**
12	1, 2, 3, 4, 6, 12
18	1, 2, 3, 6, 9, 18
20	1, 2, 4, 5, 10, 20
24	1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24

పై పట్టికను గమనిస్తే మనం ఈ కింది అంశాలను గమనించవచ్చు.

(1) ప్రతి సంఖ్యకు '1' కారణాంకం. ఇది సంఖ్య యొక్క కారణాంకాలన్నింటిలోనూ చిన్నది. (2) ప్రతి సంఖ్య దానికదే కారణాంకం ఇది ఆ సంఖ్య యొక్క కారణాంకములన్నింటిలో పెద్దది. (3) ప్రతి కారణాంకం ఆ సంఖ్యకు సమానం లేదా ఆ సంఖ్యకు గల కారణాంకాలు పరిమితం (లెక్కించదగ్గవి).

ప్రధాన కారణాంక విభజన:

ఏ సంఖ్యనైనా దాని కారణాంకాల లబ్దంగా రాస్తే ఆ "సంఖ్య యొక్క కారణాంక విభజన జరిగింది" అని అంటారు. సంఖ్య యొక్క కారణాంకాలు కనుగొనే ప్రక్రియ "కారణాంక విభజన" అంటారు.

ఆ సంఖ్య యొక్క కారణాంక విభజన అనేక విధాలుగా చేయవచ్చు. ఉదాహరణకు 24ను ఈ క్రింది విధంగా కారణాంకాల లబ్దంగా రాయవచ్చు.

1) $24 = 1 \times 24$ 2) $24 = 2 \times 12$ 3) $24 = 3 \times 8$

4) $24 = 4 \times 6$ 5) $24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$

ఇందులో (5)వ కారణాంక లబ్దంలో అన్ని కారణాంకాలు ప్రధాన సంఖ్యలు కను ఈ పద్ధతిని "ప్రధాన కారణాంక విభజన" అంటారు.

ప్రధాన కారణాంక విభజన పద్ధతి:

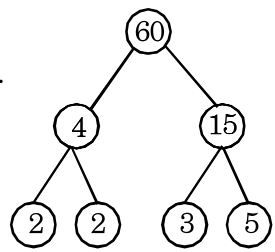
1. భాగాహార పద్ధతి:

42 యొక్క ప్రధాన కారణాంకం విభజన పద్ధతిలో సోపానాలు: కారణాంక విభజన చేయాల్సిన సంఖ్యను కనిష్ట ప్రధాన కారణాంకం చే భాగహారము చేయాలి. ఫలితము 1వచ్చేంత వరకు వివిధ ప్రధాన సంఖ్యలతో వరుసగా భాగహారము కొనసాగించాలి. $42 = 2 \times 3 \times 7$

2	42
3	21
7	7
	1

2. వృక్షపద్ధతి:

60 యొక్క కారణాంకాలను ప్రధాన కారణాంక పద్ధతిలో 'కారణాంక వృక్షము'ను గీయడం ద్వారా చేయవచ్చు. ఈ పద్ధతిలో సోపానములు



సోపానం1: 60 ను రెండు సంక్యల లబ్దంగా రాయండి.

సోపానం2: 4 మరియు 15 ల యొక్క కారణాంక విభజన చేయాలి. ఎందుకంటే 4 మరియు 15 లు సంయుక్త సంఖ్యలు.

సోపానం3: అన్ని కారణాంకాలు కూడా ప్రధాన సంఖ్యలే వచ్చేంత వరకు ఈ పద్ధతిని కొనసాగించాలి.
60 యొక్క ప్రధాన కారణాంక విభజన
$60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5$

సామాన్య కారణాంకాలు:

ఈ క్రింది పట్టికను పరిశీలించండి.

సంఖ్య	12	18
కారణాంకాలు	1,2,3,4,6,12	1,2,3,6,9,18

12,18 యొక్క సామాన్య కారణాంకాలు 1,2,3,6 ఇవి కాకుండా రెండింటికి ఇతర కారణాంకాలు ఏవైనా వున్నాయా? పట్టికలో పరిశీలించండి.

ఇచ్చిన సంఖ్యల కారణాంకాలలో ఉమ్మడిగా ఉన్న కారణాంకాలను ఆ రెండు సంఖ్యల 'సామాన్య కారణాంకాలు అంటారు.

20 మరియు 24 యొక్క సామాన్య కారణాంకాలు తెలపండి.

గరిష్ట సామాన్య కారణాంకం : (గ.సా.భా)

పై పట్టిక నుండి 12 మరియు 18 యొక్క సామాన్య కారణాంకాలు 1,2,3,6 మరియు ఈ కారణాంకాలలో గరిష్ట కారణాంకం ఏది? 6 కదా! అందుచే 12,18 యొక్క గరిష్ట సామాన్య కారణాంకం 6.

రెండు లేదా అంతకంటే ఎక్కువ సంఖ్యల సామాన్య కారణాంకాలలో గరిష్ట సంఖ్యను గరిష్ట సామాన్య కారణాంకం (గ.సా.కా) లేదా గరిష్ట, సామాన్య భాజకం (గ.సా.భా) అంటారు.

గ.సా.కా.ను కనుగొనే పద్ధతి:

1. ప్రధాన కారణాంక విభజన పద్ధతి

12,30,36 సంఖ్యల యొక్క గ.సా.కా ను ప్రధాన కారణాంక విభజన పద్ధతి ద్వారా కనుగొనవచ్చు.

2	12
2	6
3	3
	1

2	30
3	15
5	5
	1

3	36
3	12
2	4
2	2
	1

కనుక $12 = \boxed{2} \times \boxed{3} \times 2$

$30 = \boxed{2} \times \boxed{3} \times 5$

$36 = \boxed{2} \times \boxed{3} \times 2 \times 3$

12, 30, 36ల యొక్క సామాన్య కారణాంకం : $2 \times 3 = 6$

అందుచే 12, 30, 36ల యొక్క గరిష్ట సామాన్య కారణాంకం (గ.సా.కా) = 6

భాగాహార పద్ధతి ద్వారా గ.సా.కా ను కనుగొనుట:

ఈ పద్ధతిని గ్రీకు గణిత శాస్త్రవేత్త 'యూక్లిడ్' కనుగొన్నారు. ఇచ్చిన సంఖ్యలలోని పెద్ద సంఖ్యను, చిన్న సంఖ్యచే భాగించాలి. వచ్చిన శేషంతో మొదటి విభాజకంను భాగించాలి. రెండవ శేషంతో రెండవ విభాజకాన్ని భాగించాలి. ఈ విధంగా శేషం '0' వచ్చేంత వరకు భాగహారం చేయాలి. చివరి విభాజకంను గరిష్ట సామాన్య కారణాంకంగా పరిగణిస్తారు.

ఉదా: 2) 56 మరియు 64 యొక్క గ.సా.కాను కనుగొనే విధానం

సాధన:

```
                56) 64 (1
                   -56
                   ----
చివరి విభాజకం         8) 56 (7
                         56
                        ----
                 శేషం      0
                        ----
```

చివరి విభాజకం 8, శేషం = 0

అందుచే 56 మరియు 64 యొక్క గ.సా.కా = 8

ఉదా: 3) 40,56 మరియు 60యొక్క గ.సా.కాను కనుగొనే విధానం

సోపానము1): మొదటగా ఏవైనా రెండు సంఖ్యల గ.సా.కాను కనుగొనాలి.

40, 56ల యొక్క గ.సా.కాను కనుగొనాలి.

సాధన:

```
                40) 56 (1
                   -40
                   ----
        శేషం         16)40 (2
                       -32
                      -----
చివరి విభాజకం            8) 16 (2
                            16
                           ----
                             0   శేషం
                           ----
```

40, 56ల యొక్క గ.సా.కా 8

సోపానము 2: ఇప్పుడు మూడవ సంఖ్యతో మొదటి రెండు సంఖ్యల యొక్క గ.సా.కా తో తిరిగి గ.సా.కాను కనుగొనాలి అంటే 60 మరియు 8ల యొక్క గ.సా.కాను కనుగొనాలి. 8 < 60 కాబట్టి

8) 60 (7
-56

చివరి విభాజకం 4) 8 (2
8

0 శేషం

8 మరియు 60ల యొక్క గ.సా.కా 4

సోపానము 3: ఇచ్చిన మూడు సంఖ్యల గ.సా.కా. 4

అనగా 40,56 మరియు 60ల యొక్క గ.సా.కా. 4

ఉదా: 4) రెండు ట్యాంకర్లలో వరుసగా 850 లీ॥ మరియు 680 లీ॥ల కిరోసిన్ ఉన్నది.రెండు ట్యాంకర్లలో ఉన్న కిరోసిన్‌ను కొలవగలిగే గరిష్ట సామర్థ్యం గల కొల పాత్ర యొక్క సామర్థ్యం ఎంత?

సాధన: రెండు ట్యాంకర్లలో ఉన్న కిరోసిన్‌ను కొలవగలిగే పాత్ర యొక్క సామర్థ్యం ట్యాంకర్ల సామర్థ్యమును ఖచ్చితంగా భాగించే విభాజకము కావాలి. ఈ సామర్థ్యం (విభాజకం) గరిష్టంగా ఉండాలి. అనగా కొలత పాత్ర మొక్క గరిష్ట సామర్థ్యం 850,680ల యొక్క గ.సా.భా కావాలి. 850,680ల యొక్క గ.సా.కా. 170.

అందుచే రెండు ట్యాంకర్లలోని కిరోసిన్‌ను కొలవగలిగే పాత్ర యొక్క గరిష్ట సామర్థ్యం 170లీటర్లు. మొదటి ట్యాంకర్లలోని కిరోసిన్‌ను 5 సార్లు రెండవ ట్యాంకర్‌లోని కిరోసిన్‌ను 4సార్లు కొలవగల్గుతుంది.

అభ్యాసం

1. ఈ క్రింది సంఖ్యల యొక్క గ.సా.కా ప్రధాన కారణాంక విభజన పద్ధతి మరియు భాగహార పద్ధతి ద్వారా కనుగొనుము.

అ) 18,27,36 ఆ) 106,159,265

ఇ) 10,35,40 ఈ) 32,64,96,128

GRK

2. 504,792 మరియు 1080 ల యొక్క ఉమ్మడి కారణాంకాలలో గరిష్ట సంఖ్యను కనుక్కోండి.

3. ఒక గది యొక్క కొలతలు వరుసగా పొడవు 12 మీ॥, వెడల్పు 15 మీ. మరియు ఎత్తు 18 మీ. గది యొక్క కొలతలన్నింటిని ఖచ్చితంగా కొలవగలిగే టేపు యొక్క గరిష్ట పొడవును కనుక్కోండి.

4. మూడు రకాల నూనెలు 32 లీటర్లు, 24 లీటర్లు, 48 లీటర్లు ఉన్నాయి. మూడింటిని ఖచ్చితంగా కొలవడానికి కావలసిన కొలత పాత్ర యొక్క గరిష్ట ఘన పరిమాణం ఎంత?

సామాన్య గుణిజాలు:

4 మరియు 6 యొక్క గుణిజాలు

4 యొక్క గుణిజాలు = 4, 8, 12, 16, 20,24, 28, 32, 36, ...

6 యొక్క గుణిజాలు = 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, ...

4 మరియు 6 యొక్క సామాన్య గుణిజాలు = 12, 24, 36, ...

కనిష్ట సామాన్య గుణిజం: (క.సా.గు)

4 మరియు 6 యొక్క సామాన్య గుణిజాలు = 12,24,36, ...

కనిష్ట సామాన్య గుణిజం = 12

అనగా సామాన్య గుణిజాలలో కనిష్ట సంఖ్య = 12

∴ 4 మరియు 6 యొక్క కనిష్ట సామాన్య గుణిజం (క.సా.గు) = 12

ఉదా: 1) రెండు గంటలు మ్రోగుతున్నాయి. మొదటి గంట ప్రతి 3 నిమిషాలకు రెండవ గంట ప్రతీ 4 నిమిషాలకు మ్రోగుతున్నాయి. ఎప్పుడు రెండు గంటలు కలసి ఒకేసారి మ్రోగుతాయి?

సాధన: మొదటి గంట ప్రతీ 3 నిమిషాల కొకసారి మ్రోగుతుంది? అనగా మొదటి గంట 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24 ....,.... (3యొక్క గుణిజాలు) నిమిషాల కొకసారి మ్రోగుతుంది. రెండవ గంట ప్రతీ 4 నిమిషాల కొకసారి మ్రోగుతుంది. అనగా రెండవ గంటల 4, 8, 12, 16, 20, 24,.......,..... (4 యొక్క గుణిజాలు) నిమిషాల కొకసారి మ్రోగుతుంది. రెండు గంటలు కలిసి 12 నిమిషాలు, 24 నిమిషాలు, ... (3 మరియు

4 యొక్క గుణిజాలు) కు మ్రోగుతాయి. పై రెండింటిలో కనిష్ట విలువ (క.సా.గు)=12 నిమిషాలు అందుచే క.సా.గు ను ఈ క్రింది విధంగా చెప్పవచ్చు.

రెండు లేదా అంతకంచే ఎక్కువ సంఖ్యల గుణిజాలలో కనిష్ట ఉమ్మడి గుణిజమును ఆ సంఖ్యల "కనిష్ట సామాన్య గుణిజము" అంటారు.

ప్రతిసారి సంఖ్యల గుణిజాల రాయడానకి బదులు కనిష్ట ఉమ్మడి గుణిజాలను గుర్తించి క.సా.గు గా రాయాలి.

క.సా.గు ను కనుగొనే విధానం:

1. ప్రధాన కారణాంకాల పద్ధతిలో క.సా.గు.

36 మరియు 60 సంఖ్యల యొక్క క.సా.గును ప్రధాన కారణాంకాల లబ్దం పద్ధతిలో సాధించే విధానంను పరిశీలిద్దాం.

సోపానం 1: ఇచ్చిన సంఖ్యలు 36 మరియు 60 లను ప్రధాన సంఖ్యల లబ్ధముగా రాయాలి.

36 యొక్క కారణాంకాలు $= 2 \times 2 \times 3 \times 3$

60 యొక్క కారణాంకాలు $= 2 \times 2 \times 3 \times 5$

సోపానం 2: రెండింటి యొక్క ఉమ్మడి కారణాంకాలను తీసుకోవాలి $2 \times 2 \times 3$

సోపానం 3: రెండు సంఖ్యల యొక్క ఉమ్మడి కారణాంకాలు, మిగిలిన కారణాంకాల లబ్దంను క.సా.గు గా తీసుకోవాలి. అనగా 36 మరియు 60 యొక్క క.సా.గు $= (2 \times 2 \times 3) \times 3 \times 5 = 180$

"ఇచ్చిన రెండు సంఖ్యలలో మొదటి సంఖ్య రెండవ దాని గుణిజమైతే ఆ సంఖ్యల క.సా.గు మొదటిది అవుతుంది."

1. భాగాహార పద్ధతిలో క.సా.గు.

324 మరియు 90ల క.సా.గు ను కనుక్కోండి.

సోపానం1: ఇచ్చిన సంఖ్యలను క.సా.గు ను కనుక్కోండి.

సోపానం 2: కనీసం రెండు సంఖ్యలను భాగించగల ప్రధాన సంఖ్యతో భాగించాలి. భాగింపబడని సంఖ్యను కిందికి అలాగే తీసుకోవాలి.

2	24	90
3	12	45
	4	15

సోపానం 3: అలాగే ప్రధాన సంఖ్యలతో భాగిస్తూ, చివరి వరకు 1 మాత్రమే సమాన్య కారణాంకంగా ఉండే వరకు భాగహారం కొసాగించాలి.

సోపానం 4: భాజకములు మరియు చివరిగా మిగిలిన సంఖ్యల లబ్ధం ఇచ్చిన సంఖ్యల క.సా.గు

కావున క.సా.గు $= 2 \times 3 \times 4 \times 15 = 360$

ఉదా 2: 21, 35, 42 ల క.సా.గు కనుక్కోండి

సాధన:

7	21,	35,	42
3	3,	5,	6
	1,	5,	2

21, 35, 42 ల క.సా.గు $= 7 \times 3 \times 5 \times 2 = 210$

క.సా.గు మరియు గ.సా.భా ల మధ్య సంబంధం:

18 మరియు 27 లను తీసుకొందాం

18 ని ప్రధాన కారణాంకాల లబ్దంగా వ్రాయగా $2 \times 3 \times 3$

$27 = 3 \times 3 \times 3$

18 మరియు 27 ల క.సా.గు $= 3 \times 3 \times 3 \times 2 = 54$

18 మరియు 27 ల గ.సా.భా $= 3 \times 3 = 9$

క.సా.గు $\times$ గ.సా.భా $= 54 \times 9 = 486$

18,27ల లబ్దం $= 18 \times 27 = 486$

మీరు ఏమి గమనించారు?

రెండు సంఖ్యల లబ్ధం, వాటి క.సా.గు గ.సా.భాల లబ్దంనకు సమానం

ఉదా 3: 8 మరియు 12 ల యొక్క క.సా.గు కనుగొనండి. క.సా.గు గ.సా.భాల మధ్య గల సంబంధం ఉపయోగించి గ.సా.భా కనుక్కోండి.

సాధన : 8,12 యొక్క క.సా.గు = 2 × 3 × 4 = 24

క.సా.గు × గ.సా.భా = ఆ రెండు సంఖ్యల లబ్ధం అని మనకు తెలుసు

4	8, 12
	2, 3

$$\text{గ.సా.భా} = \frac{\text{రెండు సంఖ్యల లబ్ధం}}{\text{క.సా.గు.}}$$

$$= \frac{{}^{1}\cancel{8}\times\cancel{12}^{4}}{\cancel{24}_{3}} = 4$$

కావున 8 మరియు 12 ల గ.సా.భా =4

అభ్యాసం

1. ఈ కింది సంఖ్యల క.సా.గు. ప్రధాన కారణాంక లబ్దం పద్ధతి ఉపయోగించి కనుగొనండి.

   అ) 14,21 ఆ) 18,27 ఇ) 48,56,72 ఈ) 26,14,91

2. ఈ కింది సంఖ్యల క.సా.గు.ను భాగహార పద్ధతిలో కనుగొనండి.

   అ) 84,112,196 ఆ) 102,119,153 ఇ) 45,99,132,165

3. ఏ కనిష్ట సంఖ్యకు 5ను కూడిన ఆ సంఖ్య 12,14 మరియు 18 లచే నిశ్శేషంగా భాగించబడుతుంది?

4. ఏ కనిష్ట మూడంకెల సంఖ్యను 75,45 మరియు 60లచే భాగిస్తే

   అ) శేషం సున్నా వస్తుంది? ఆ) ప్రతి సందర్భంలో 4 వచ్చును?

5. మూడు టేపులు 64 సెం॥యూ॥, 72 సెం॥మీ॥, 96 సెం॥మీ॥ కొలతలు కల్గియున్నాయి. ఏ కనిష్ట కొలతను మూడు టేపులు ఖచ్చితంగా కొలవగలవు.

6. షరీఫ్, రాజు మార్కెట్‌లో ఈ నెల మొదటి తారీఖున కలిశారు. షరీఫ్ మూడు రోజులకొకసారి, రాజు నాలుగు రోజుల కొకసారి మార్కెట్‌కు వెళ్తారు. ఏ రోజున మరల షరీఫ్, రాజు మార్కెట్‌లో కలుసుకుంటారు?

7. ఈ కింది సంఖ్యల క.సా.గు., గ.సా.భా లను కనుక్కోండి.

   అ) 15,24 ఆ) 8,25 ఇ) 12,48

   వాటి మధ్య సంబంధాన్ని సరిచూడండి.

8. రెండు సంఖ్యల యొక్క క.సా.గు. 290 మరియు వాటి లబ్ధం 7250 అయిన వాటి గ.సా.భా. ఎంత?

9. రెండు సంఖ్యల లబ్ధం 3276 వాటి గ.సా.భా. 6 అయిన క.సా.గు. ఎంత?

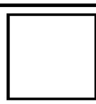
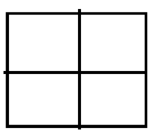
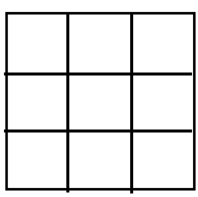
10. రెండు సంఖ్యల గ.సాభా. 6 మరియు క.సా.గు 36 ఆ సంఖ్యలలో ఒక సంఖ్య 12 అయిన రెండవ సంఖ్య ఎంత?

2.1.13 వర్గమూలాలు, ఘన మూలాలు

పరిచయం:

ప్రమాణ చతురస్రాలను ఉపయోగించి కొన్ని చతురస్రాకారాలను తయారు చేద్దాము

ఒక చతురస్రంలోని భుజం పొడవు '1' ప్రమాణం అయిన అది ప్రమాణ చతురస్రం

వ.సం.	పటం	భుజం పొడవు ప్రమాణాలు	ఉపయోగించిన ప్రమాణం చతురస్రాల సంఖ్య
1.		1	1
2		2	4
3		3	9

ఇదే క్రమంలో తరువాత వచ్చే రెండు చతురస్రాలను తయారు చేయండి. భుజం పొడవు 6 ప్రమాణాలు గల చతురస్రాన్ని తయారు చేయుటకు ఎన్ని ప్రమాణ చతురస్రాలు అవసరమో ఊహించండి.

పైన తెలిపిన పట్టికను పరిశీలించిన 1,4,9,16,25 ..... ప్రమాణ చతురస్రాలతో చతురస్రాలను ఏర్పరచగలిగినాము. 1,4,9,16,25 .... సంఖ్యలను క్రింది విధంగా వ్రాయవచ్చు.

$1 = 1 \times 1 = 1^2$

$4 = 2 \times 2 = 2^2$

$9 = 3 \times 3 = 3^2$

$16 = 4 \times 4 = 4^2$

$25 = 5 \times 5 = 5^2$

$36 = 6 \times 6 = 6^2$

$49 = 7 \times 7 = 7^2$

$64 = 8 \times 8 = 8^2$

$m = n \times m = n^2$ (ఇక్కడ m, n లు పూర్ణ సంఖ్యలు)

ప్రతి సందర్భములో సంఖ్యల కారణాంకాలను పరిశీలించండి

పై అమరికలో ప్రతి సంఖ్య రెండు సమాన కారణాంకాల లబ్ధంగా వ్రాయబడిందని మనము గమనించగలము. ఇటువంటి సంఖ్యలను పరిపూర్ణ వర్గాలు అంటాము. క్రింది కొన్ని పరిపూర్ణ వర్గాలను పరిశీలిద్దాం.

ఉదా:

అ) $9 = 3 \times 3$

ఆ) $49 = 7 \times 7$

ఇ) $1.44 = 1.22 \times 1.22$

ఈ) $2.25 = 1.5 \times 1.5$

ఉ) $\frac{9}{16} = \frac{3}{4} \times \frac{3}{4}$

ఊ) $\frac{4}{12.25} = \frac{2}{3.5} \times \frac{2}{3.5}$

అ) మరియు ఆ) సందర్భాలలో పరిపూర్ణవర్గాలైన 9 మరియు 49లు పూర్ణ సంఖ్యలు ఇటువంటి సంఖ్యలను $m = n \times n$ అని (దీనిలో m, n లు పూర్ణ సంఖ్యలు) పరిపూర్ణ వర్గాలుగా రాస్తాము.

(ఇ),(ఈ) మరియు (ఉ),(ఊ) లలో పరిపూర్ణ వర్గాలు పూర్ణసంఖ్యలుకావు. అందుచే వీటిని వర్గ సంఖ్యలుగా పరిగణించము. ఒక పూర్ణసంఖ్య m ను n^2 (మరొక పూర్ణ సంఖ్య) గా వ్రాయగలిగితే అప్పుడు m ను వర్గ సంఖ్య అనియూ లేదా n యొక్క వర్గము m అని వ్రాస్తాము.

ఖచ్చితవర్గము:

ఒక అకరణీయ సంఖ్య మరొక అకరణీయ సంఖ్య వర్గానికి సమానము.

వర్గ సంఖ్య:

ఒక పూర్ణ సంఖ్య మరొక పూర్ణ సంఖ్య వర్గానికి సమానము అందుచే అన్ని వర్గ సంఖ్యలు ఖచ్చిత వర్గాలే కాని అన్ని ఖచ్చిత వర్గాలు వర్గ సంఖ్యలు కావు.

ఉదా: 2.25 అనేది ఖచ్చిత వర్గము ఎందువలన అంటే $2.25=(1.5)^2 = 1.5\times1.5$, ఇది ఒక పూర్ణసంఖ్య కాదు. అందుచే ఇది వర్గ సంఖ్య కాదు.

42 ఒక వర్గ సంఖ్య అగునా?

మనకు $6^2 = 36$ మరియు $7^2 =49$ అని తెలుసు. ఒక వేళ 42 వర్గ సంఖ్య అయితే అది తప్పనిసరిగా ఒక పూర్ణ సంఖ్య యొక్క వర్గము మరియు 6,7ల మధ్య ఉండాలి. కాని 6 మరియు 7 ల మధ్య ఎటువంటి పూర్ణ సంఖ్య లేనందున 42 వర్గ సంఖ్య కాదు.

క్రింది పట్టికలో వర్గ సంఖ్యలను పరిశీలించండి.

(1)	2	3	(4)	5	6	7	8	(9)	10
11	12	13	14	15	(16)	17	18	19	(20)
21	22	23	24	(25)	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	(36)	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	(49)	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	(64)	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
(81)	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	(100)

పట్టికలో చుట్టబడిన సంఖ్యలు కాకుండా ఇంకేమైన వర్గ సంఖ్యలు కలవా?

వర్గసంఖ్యల ధర్మాలు:

క్రింది పట్టికలను పరిశీలించండి.

సంఖ్య	వర్గం
1	1
2	4
3	9
4	16
6	....
7	49
8	64
....	81
10	....

సంఖ్య	వర్గం
11	121
12	144
13	....
14	196
16	......
17	289
18	324
19	361
20	....

సంఖ్య	వర్గం
21	441
22	....
23	529
....	576
25	625
....	....
....	....
....	....
....	....

పై పట్టికలోని వర్గ సంఖ్యల ఒకట్ల స్థానంలో ఉన్న అంకెలను గమనించండి. వాటన్నించి ఒకట్ల స్థానంలో 0,1,4,5,6 లేదా 9 ఉండును. ఏది కూడ ఒకట్ల స్థానంలో 2,3,7 లేదా 8 తో అంతం కాలేదు.

కావున ఒక సంఖ్య యొక్క ఒకట్ల స్ధానంలో 2,3,7 లేదా 8 ఉంటే అవి వర్గ సంఖ్యలు కావు.

మరి 0,1,4,5,6,9లు ఒకట్ల స్ధానంలో ఉన్న సంఖ్యలన్నియూ వర్గ సంఖ్యలు అనుట సరియైనా? ఆలోచించండి.

పైథాగోరియన్ త్రికాలు:

క్రింది వాటిని గమనించండి.

(i) $3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 = 5^2$

(ii) $5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169 = 13^2$

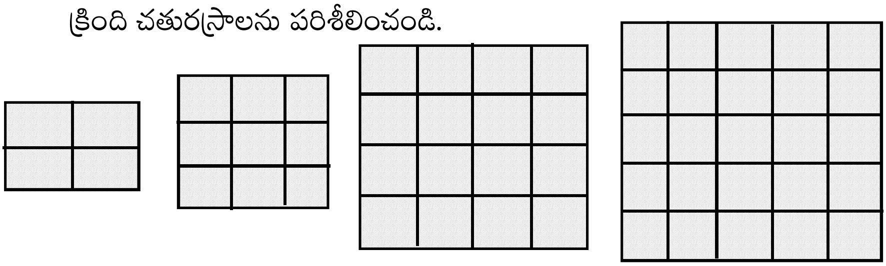
సంఖ్యలు (3,4,5) మరియు (5,12,13) పైథాగోరియన్ త్రికాలకు ఉదాహరణలు

a,b,c లు మూడు ధన పూర్ణ సంఖ్యలు అయిన $a^2+b^2=c^2$ అయితే a,b,c లను పైథాగోరియన్ త్రికాలు అంటారు.

a,b,c లకు 1 తప్ప వేరే ఉమ్మడి కారణాంకం లేకపోతే (a,b,c) ని ప్రాథమిక త్రికం అంటాము.

వర్గ మూలాలు:

క్రింది చతురస్రాలను పరిశీలించండి.



A=4 A=9 A=16 A=25

చతురస్రవైశాల్యం(సెం.మీ^{2}లలో)	చతురస్ర భుజం(సెం.మీ.)
(A)	(S)
4 = 2 × 2	2
9 = 3 × 3	3
16 = 4 × 4	4
25 = 5 × 5	5

ఒక చతురస్రంలోని అడ్డు / నిలువు వరుసలో ఉన్న ప్రమాణ చతురస్రాల సంఖ్యయే, ఆచతురస్రం యొక్క భుజం పొడవు.

చతురస్రం వైశాల్యం మరియు దాని మధ్య ఏదైనా సంబంధాన్ని గమనించారా?

మనకు చతురస్ర వైశాల్యం = భుజం × భుజం = (భుజం)^2 అని తెలుసు

చతురస్రం వైశాల్యం 169 సెం.మీ. అయిన దాని భుజమెంత?

చతురస్రం భుజం పొడవు 'l' సెం.మీ. అనుకుంటే 169 సెం.మీ. = x^2

చతురస్రభుజం కనుగొనాలంచే 169 ఏ సంఖ్య యొక్క వర్గమో కనుగొనాలి.

$\Rightarrow 169 = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{169} = 13$

కాబట్టి చతురస్రభుజం పొడవు 13 సెం.మీ.

ఒక వర్గ సంఖ్యను సమాన కారణాంకాల లబ్ధం వ్రాసిన ఆ కారణాంకాన్ని వర్గ సంఖ్యకు వర్గమూలం అంటారు. కావున ఒక వర్గ సంఖ్యను రెండు సమాన కారణాంకాల లబ్ధంగా రాసినపుడు, అందులో ఒక కారణాంకాన్ని ఆ వర్గ సంఖ్య యొక్క వర్గమూలం అంటారు. అంచే 169 యొక్క వర్గమూలం 13 అవుతుంది. దీనిని $\sqrt{169} = 13$ గా రాస్తాం. ($\sqrt{\ }$ వర్గమూలంనకు గుర్తు) కాబట్టి వర్గమూలం అనునది వర్గంనకు విపర్యయ ప్రక్రియ.

ఉదా 1: $3^2 = 9$ కావున 9 యొక్క వర్గమూలం 3 $\left(\sqrt{9} = 3\right)$

$4^2 = 16$ కావున 16 యొక్క వర్గమూలం 4 $\left(\sqrt{16} = 4\right)$

$5^2 = 25$ కావున 25 యొక్క వర్గమూలం 5 $\left(\sqrt{25} = 5\right)$

$y^2 = x$ కావున x యొక్క వర్గమూలం y $\left(\sqrt{x} = y\right)$

ఉదా 2: 1. $\sqrt{4} = 2$ ఎందుకనగా $2^2 = 4$

2. $\sqrt{16} = 4$ ఎందుకనగా $4^2 = 16$

3. $\sqrt{225} = 15$ ఎందుకనగా $15^2 = 225$ మొదలగునవి

క్రింది పట్టికను గమనించండి:

వర్గం	వర్గ మూలం
$1^2 = 1$	$\sqrt{1} = 1$
$2^2 = 4$	$\sqrt{4} = 2$
$3^2 = 9$	$\sqrt{9} = 3$
$4^2 = 16$	$\sqrt{16} = 4$
$5^2 = 25$	$\sqrt{25} = 5$
$6^2 = 36$	$\sqrt{36} = 6$
$7^2 = 49$	$\sqrt{49} = 7$
$8^2 = 64$	$\sqrt{64} = 8$
$9^2 = 81$	$\sqrt{81} = 9$
$10^2 = 100$	$\sqrt{100} = 10$

వరుస బేసి సంఖ్యల వ్యవకలనం ద్వారా వర్గ మూలం కనుగొనుట.

ప్రతి వర్గ సంఖ్యను 1తో మొదలుకొని వరుసగా వచ్చు బేసి సంఖ్యల మొత్తంగా వ్రాయవచ్చు. పరిశీలించుము

$1 + 3 = 4 = 2^2$

$1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$

$1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2$

$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25 = 5^2$

పై అమరిక యొక్క విపర్యయ క్రమములో వర్గ మూలంను కనుగొంటాము.

ఉదా : $\sqrt{49}$ విలువ కనుగొనుట

సోపానం1 49 – 1 = 48 (మొదటి బేసిసంఖ్య తీసివేయడం)

సోపానం2 48 – 3 = 45 (రెండవ బేసిసంఖ్య తీసివేయడం)

సోపానం3 45 – 5 = 40 (మూడవ బేసి సంఖ్య తీసివేయడం)

సోపానం4 40 – 7 = 33

సోపానం5 33 – 9 = 24

సోపానం6 24 –11 = 13

సోపానం7 13 –13 = 0

గమనించండి:

$1+3+5+7+9+11+13=7^2= 49$

$49 - (1+3+5+7+9+11+13) = 0$

$\therefore$ 49 పరిపూర్ణ సంఖ్య

1 నుండి మొదలుకొని 7 వరకు బేసి సంఖ్యలు. 49 నుండి తీసివేయడం ద్వారా 0 వచ్చింది(7వ సోపానం)

$\therefore \sqrt{49} = 7$

సూచన: పై పద్ధతిలో చివరగా సున్నా రానట్లయితే ఇచ్చిన సంఖ్య పరిపూర్ణ వర్గం కాదు.

(పరిపూర్ణ) వర్గ సంఖ్యల వర్గ మూలాలను పునరావృత వ్యవకలనం ద్వారా సులభంగా కనుగొనవచ్చు. కాని ఈ పద్ధతి 625,729.... లాంటి పెద్ద సంఖ్యల వర్గ మూలాలు కనుగొనడానికి ఎక్కువ సమయం పడుతుంది. ఇటివంటి పెద్ద సంఖ్యల వర్గ మూలాలు కనుగొనడానికి కొన్ని సులభమైన పద్ధతులను ప్రయత్నిద్దాం.

ఒక సంఖ్య యొక్క వర్గ మూలాన్ని కనుగొనడానికి ప్రధానంగా రెండు పద్దతులు కలవు

అవి 1. ప్రధాన కారణాంకాల పద్ధతి

2. భాగాహార పద్ధతి

ప్రధానకారణాంకాల పద్దతి ద్వారా వర్గమూలాన్ని కనుగొనుట:

484 యొక్క వర్గమూలాన్ని ప్రధాన కారణాంకాల పద్ధతి ద్వారా కనుగొనె విధానం

2	484
3	242
11	121
11	11
	1

సోపానం 1 : 484ని ప్రధాన కారణాంకాలుగా విభజించి

484 R 2 × 2 × 11 × 11

సోపానం 2 : సమాన కారణాంకాలను జతలుగా వ్రాయండి

484 = (2 × 2) × (11 × 11)

సోపానం 3 : ప్రతి జత సమాన కారణాంకాల నుండి ఒక కారణాంకాన్ని తీసుకొనగా

$$\sqrt{484} = 2 \times 11 = 22$$

కావున 484 యొక్క వర్గమూలం 22 మరికొన్ని ఉదాహరణలు పరిశీలిద్దాం.

$$484 = (2\times11)\times(2\times11) = (2\times11)^2$$

$$\sqrt{484} = \sqrt{(2\times11)^2}$$

$$= 2\times11 \quad = 22$$

ఉదా 2: 1296 వర్గ మూలాన్ని ప్రధాన కారణాంకాల పద్ధతిద్వారా కనుగొనండి

2	1296
2	648
2	324
2	162
3	81
3	27
3	9
3	3
	1

సాధన: 1296 ప్రధాన కారణాంకాలుగా విభజించగా

1296 = (2×2)×(2×2)×(3×3)×(3 × 3)

$$\sqrt{1296} = 2\times2\times3\times3$$

$$\therefore \sqrt{1296} = 36$$

ఉదా 3: 720 ఏ కనిష్ఠ సంఖ్యచే గుణించిన పరిపూర్ణ వర్గం అగును.

సాధన: 720ని ప్రధాన కారణాంకాలుగా విభజించిన

2	720
2	360
2	180
2	90
3	45
3	15
5	5
	1

720 = (2 × 2) × (2 × 2) × (3 × 3) × 5

2, 2, 3లకు జతలు ఉన్నాయి. కాని 5కి జతలేదు కావున ఇచ్చిన సంఖ్యను 5చే గుణించిన పరిపూర్ణ వర్గం అగును.

∴ పరిపూర్ణ వర్గం = 720 × 5

= 3600

భాగాహార పద్ధతిని వర్గమూలం కనుగొనుట:

మనం ప్రధాన కారణాంకాల విభజన పద్ధతి ద్వారా వర్గ మూలాన్ని కనుగొనడం ఎలా బోదించాలో తెలుసుకున్నాం. పెద్ద సంఖ్యలకు ఈ పద్ధతి దీర్ఘమైనది. మరియు కష్టమైనది. అందువలన ఈ సమస్యను అధిగమించడానికి వర్గమూలాలు కనుగొనుటలో భాగహార పద్ధతిని ఉపయోగిస్తారు. ఇప్పుడుమనం 784 వర్గమూలాన్ని భాగహార పద్ధథిలో కనుగొనే విధానం ఎలా బోధించాలో పరిశీలిద్దాం.

2 | $7\overline{84}$ | 2

సోపానం 1: ఇచ్చిన సంఖ్యను ఒకట్ల స్థానం మొదలుకొని, రెండేసి సంఖ్యల సమూహాలుగా విభజించండి. ఆ జతపైన (అడ్డుగీత లేదా బార్) ప్రక్కన చూపినట్లు వ్రాయండి.

2 | $7\overline{84}$ | 2

సోపానం 2: మొదటి జత లేదా అంకెకు (ఎడమ నుండి కుడికి) సమానమైన లేదా తక్కువైన పరిపూర్ణ వర్గ సంఖ్యను కనుగొనండి. దాని వర్గమూలాన్ని విభాజకంలో భాగఫలంలో వ్రాయండి.

2 | $7\overline{84}$ | 2
4
3

సోపానం 3: విభాజకం మరియు భాగఫలాల లబ్ధాన్ని (2 × 2 = 4) మొదటి జత లేదా అంకె నుంచి తీసివేయండి. (ఉదా: 7 − 4 = 3)

సోపానం 4: శేషానికి కుడివైపున రెండవ జతను వ్రాయాలి(384) ఇది కొత్త విభాజ్యం అవుతుంది.

2 | $7\overline{84}$ | 2
-4
384

సోపానం 5: విభాజ్యానికి సరిపోయే కొత్త విభాజకం కొరకు భాగఫలాన్ని రెట్టింపు చేసి దాని ప్రక్కన ఖాళీగా ఒక గడిని వ్రాయండి.(ఉదా:2×2 = 4)

$$\begin{array}{r|l|l} 2 & 7\overline{84} & 28 \\ & -4 & \\ \hline 48 & 384 & \\ & 384 & \\ \hline & 0 & \end{array}$$

సోపానం 6: ఖాళీగడిలో వ్రాయడానికి ఒక అంకెను ఊహించండి. ఈ అంకెతో ఏర్పడిన కొత్త విభాజకం మరియు అనుకున్న అంకెల లబ్ధం, విభాజ్యానికి సమానంగా లేదా తక్కువగా ఉండేటట్లు ఒక అంకెను ఎన్నుకోండి. భాగించి శేషాన్ని రాబట్టండి.(48 × 8 = 384)

$$\begin{array}{r|l|l} 2 & 7\overline{84} & 28 \\ & -4 & \\ \hline 48 & 384 & \\ & 384 & \\ \hline & 0 & \end{array}$$

సోపానం 7: తీసి వేసిన వచ్చు శేషం తుది భాగఫలం 28,784 యొక్క వర్గమూలం

$\therefore \sqrt{784} = 28$

మరిన్ని ఉదాహరణలు పరిశీలిద్దామా!

ఉదా1: 1296 యొక్క వర్గమూలం ఎంత?

సాధన:

సోపానం 1

$$\begin{array}{|ll|} \overline{12} & \overline{96} \end{array}$$

సోపానం 2

$$\begin{array}{r|ll|l} 3 & \overline{12} & \overline{96} & 3 \\ & -9 & & \end{array}$$

సోపానం 3:

$$\begin{array}{r|ll|l} 3 & \overline{12} & \overline{96} & 3 \\ & -9 & & \\ \hline 6 & 396 & & \end{array}$$

సోపానం 4:

$$\begin{array}{r|ll|l} 3 & \overline{12} & \overline{96} & 36 \\ & -9 & & \\ \hline 66 & 396 & & \\ & -396 & & \\ \hline & 0 & & \end{array}$$

$\therefore \sqrt{1296} = 36$

ఉదా – 2: 8281 యొక్క వర్గమూలం కనుగొనుము.

సాధన:

9	$\overline{82}\ \overline{81}$	91
	-81	
181	181	
	-181	
	0	

$\therefore \sqrt{8281} = 91$

ఉదా–3: 4215 నుండి ఏ కనిష్ఠ సంఖ్యను తీసివేసిన పరిపూర్ణ వర్గం అగును?

సాధన: భాగహార పద్దతిన వర్గ మూలం కనుగొనిన శేషం = 119

అనగా 4215 నుండి 119 తీసివేయగా వర్గ సంఖ్యవస్తుంది.

అందువలన తీసివేయవలసిన కనిష్ఠ సంఖ్య = 119

6	42 15	64
	–36	
	625	
124	– 496	
	119	

భాగహార పద్ధతిని ఉపయోగించి దశాంశాల వర్గమూలం కనుగొనుట.:

ఒక ఉదాహరణ $\sqrt{17.64}$ ద్వారా చూద్దాం

సోపానం 1: ఇంతకు ముందు చర్చించిన విధంగానే పూర్ణాంక భాగం అయిన 17పై బార్ గీయండి. దశాంశ భాగంలో రెండేసి సంఖ్యల సమూహం (ఎడమ నుండి కుడికి) బార్‌ని గీయండి.

$\overline{17}.\ \overline{64}$

సోపానం 2: ఏ గరిష్ఠ సంఖ్య (అనగా 4) వర్గం పూర్ణాంక భాగం (అనగా 17) నకు సమానంగా లేదా అంతకన్నా తక్కువగా ఉంటుందో ఆ సంఖ్యను కనుక్కోండి. 4ని విభాజకంగా 17ని విభాజ్యంగా తీసుకొని శేషాన్ని (అనగా 1ని రాబట్టండి.

4	$\overline{17}.\overline{64}$	4
	-16	
	1	

సోపానం 3: తరువాత రెండంకెల జత (64) ను శేషంనకు కుడివైపున వ్రాయగా వచ్చు కొత్త విభాజ్యం 164

4	$\overline{17}.\overline{64}$	4
	-16	
8	1.64	

సోపానం 4: భాగఫలం రెట్టింపు చేయగా వచ్చు 8కి కుడివైపున ఖాళీగడిని ఉంచండి. 64 అనునది దశాంశ భాగం కావున భాగఫలంలో దశాంశాన్ని ఉంచండి. (అనగా 4)

$$\begin{array}{r|l|l} 4 & \overline{17}\,.\overline{64} & 4 \\ & -16 & \\ \hline 8\square & \;164 & \end{array}$$

సోపానం 5: ఖాళీలో వ్రాయడానికి ఒక అంకె ఊహించండి. ఈ అంకెలో ఏర్పడిన కొత్త విభాజకం మరియు ఆ అంకె లబ్ధం విభాజ్యానికి సమానంగా (164) లేదా అంతకన్నా తక్కువగా ఉండేటట్లు ఎన్నుకోండి.

$$\begin{array}{r|l|l} 4 & \overline{17}\,.\overline{64} & 4.2 \\ & -16 & \\ \hline 8\boxed{2} & \;164 & \\ & -164 & \\ \hline & \;\;0 & \end{array}$$

సోపానం 6: శేషం “0” మరియు ఇంకా అంకెల జతలు లేవు.

కావున $\sqrt{17.64} = 4.2$

ఇప్పుడు మరొక ఉదాహరణ పరిశీలిద్దాము.

ఉదా−1: 42.25 వర్గ మూలంను భాగాహార పద్ధతిలో కనుగొనుము.

సాధన:

సోపానం 1: $\left|\overline{42}.\overline{25}\right|$

సోపానం 2:

$$\begin{array}{r|l|l} 6 & \overline{42}.\overline{25} & 6 \\ & -36 & \\ \hline & \;\;6 & \end{array}$$

సోపానం 3:

$$\begin{array}{r|l|l} 6 & \overline{42}.\overline{25} & 6.5 \\ 6 & -36 & \\ \hline 125 & \;\;625 & \\ & -\;625 & \\ \hline & \;\;\;0 & \end{array}$$

$\therefore\ \sqrt{42.25} = 6.5$

పరిపూర్ణ సంఖ్యలు కాని సంఖ్యల వర్గ మూలాలను అంచనా వేయుట:

ఇంత వరకు మనం పరిపూర్ణ వర్గాల వర్గమూలాలను కనుగొనే పద్ధతిని నేర్చుకొన్నాం. పరిపూర్ణ వర్గాలు కాని సంఖ్యలకు ఖచ్చితమైన వర్గమూలాలు ఉండవు.

అటువంటి సందర్భాలలో వాటి వర్గమూలాలను ఏ విధంగా అంచనా వేస్తామే చూద్దాం.

ఇప్పుడు $\sqrt{300}$ యొక్క విలువకి దగ్గర పూర్ణాంకాన్ని అంచనా వేద్దాం. 300, వర్గసంఖ్యలయిన 100 మరియు 400 మద్య ఉంటుంది.

$$\therefore\ 100 < 300 < 400$$

$$10^2 < 300 < 20^2$$

$$10 < \sqrt{300} < 20$$

ఇంకా ఈ సంఖ్యలు పరిపూర్ణ వర్గాలకు దగ్గరగా లేవు $17^2=289$, $18^2=324$

కావున $289 < 300 < 324$

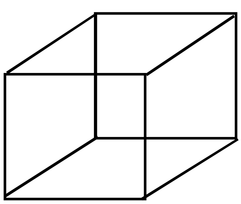
$$17 < \sqrt{300} < 18$$

300, 324 కంటే 289కి దగ్గరగా ఉంది.

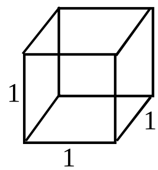
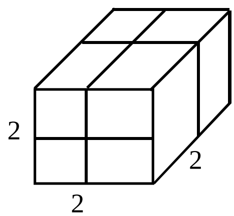
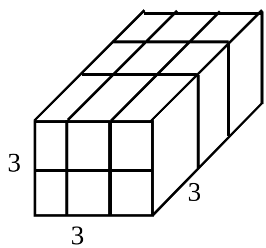
కావున $\sqrt{300}$ = 17 గా అంచనా వేయవచ్చు.

ఘన సంఖ్యలు:

ఆరు సమాన చతురస్ర తలాలు గల ఘనాకారాన్ని సమఘనం అంటారని మనకు తెలుసు.



కొన్ని ప్రమాణ ఘనాలను తీసుకొని వాటిని వివిధ పరిమాణములు గల ఘనాకారాన్ని తయారుచేద్దాము.

క్ర.సం.	పటం	అంచుపొడవు	ప్రమాణ ఘాత సంఖ్య
1		1	1
2		2	8
3		3	27

అలాగే ఈ క్రమంలో తరువాత రావలసిన సమఘనాన్ని తయారు చేయగలము.

5 ప్రమాణాల భుజం పొడవు గల సమఘనాకారాన్ని తయారుచేయటకు ఎన్ని ప్రమాణ ఘనాలు కావలెనో ఊహించగలము.

కావున సమఘనాకారాలు తయారుచేయుటకు $1, 8, 27, 64$ ...... ప్రమాణ సమఘనాలు కావాలి.

$1, 8, 27, 64$ ...... లను ఘన సంఖ్యలు లేదా పరిపూర్ణ ఘనాలు అంటాము. వీటిని క్రింది విధంగా వ్రాయగా

$1 = 1 \times 1 \times 1 = 1^3$

$8 = 2 \times 2 \times 2 = 2^3$

$27 = 3 \times 3 \times 3 = 3^3$

$64 = 4 \times 4 \times 4 = 4^3$

కావున ఒక సంఖ్యను అదే సంఖ్యచే మూడుసార్లు గునించగా వచ్చు సంఖ్యను దాని ఘనము అంటాము.

కావున x యొక్క ఘన సంఖ్య $x^3 = x \times x \times x$

49 ఒక ఘన సంఖ్య అగునా?

కాదు, ఎందుకనగా $49 = 7 \times 7$ మాత్రమే మరియు ఇది ఏ సహజ సంఖ్యను అదే సంఖ్యచే మూడుసార్లు గుణించిన 49 కాదు. ఎందుకనగా $3 \times 3 \times 3 = 27$ మరియు $4 \times 4 \times 4 = 64$. 49 పరిపూర్ణ ఘనము కాదు.

ఈ క్రింది పట్టికను పరిశీలిద్దాము:

సంఖ్య	ఘనం
1	$1^3 = 1 \times 1 \times 1 = 1$
2	$2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$
3	$3^3 = 3 \times 3 \times 3 = 27$
4	$4^3 = 4 \times 4 \times 4 = 64$
5	$5^3 = 5 \times 5 \times 5 = 125$
6	$6^3 = 6 \times 6 \times 6 = 216$
7	$7^3 = 7 \times 7 \times 7 = 343$
8	$8^3 = 8 \times 8 \times 8 = 512$
9	$9^3 = 9 \times 9 \times 9 = 729$
10	$10^3 = 10 \times 10 \times 10 = 1000$

దిగువ 11 నుండి 20 వరకు గల సంఖ్యలు ఘనాలు ఇవ్వబడినవి ఒక సారి పరిశీలిద్దాం.

సంఖ్య	ఘనం
11	1331
12	1728
13	2197
14	2744
15	3375
16	4096
17	4913
18	5832
19	6859
20	8000

పైన పట్టికలో సరి సంఖ్య యొక్క ఘనము ఎల్లప్పుడూ సరిసంఖ్య అవుతుంది. అలాగే బేసి సంఖ్య యొక్క ఘనము బేసి సంఖ్యయే అవుతుంది. అదే విధంగా గమనిస్తే, ఒక సంఖ్య ఒకట్ల స్థానములో 1 ఉంటే దాని యొక్క ఘనము 1తో అంతమవుతుంది. అదే విధంగా 0,4,5,6 లేదా 9 ఒకట్ల స్థానంలో గల ఘన సంఖ్య యొక్క ఒకట్ల స్థానంలో అదే సంఖ్య ఉంటుంది.

కొన్ని ఆసక్తికర అమరికలు:

1. వరుస బేసి సంఖ్యలను కూడగా వచ్చే మొత్తములను గమనించుము.

$1 = 1 = 1^3$

$3 + 5 = 8 = 2^3$

$7 + 8 + 11 = 27 = 3^3$

$13+15+17+19 = 64 = 4^3$

5^3 వచ్చుటకు ఎన్ని వరుస బేసి సంఖ్యలను కూడవలెనో ఊహించండి.

2. దిగువ అమరికను గమనించండి.

$$2^3 - 1^3 = 1 + 2\times1\times3 = 7$$

$$3^3 - 2^3 = 1 + 3\times2\times3 = 19$$

$$4^3 - 3^3 = 1 + 4\times3\times3 = 37$$

$$5^3 - 4^3 = 1 + 5\times4\times3 = 61$$

పై అమరికలను ఉపయోగించి దిగువ దాని విలుసవలు వ్రాయవచ్చు.

$i) 10^3 - 9^3$ $\quad ii) 15^3 - 14^3$ $\quad iii) 26^3 - 25^3$

ఘన సంఖ్యలు మరియు వాటి ప్రధాన కారణాంకాలు:–

64 మరియు 216 సంఖ్యలను ప్రధాన కారణాంకాల లబ్ధంగా వ్రాయగా

$$64 = \overline{2\times2\times2} \times \overline{2\times2\times2}$$

$$216 = \overline{2\times2\times2} \times \overline{3\times3\times3}$$

రెండు సందర్భాలలోను ప్రతికారణాంక సంఖ్య మూడుసార్లు వచ్చింది.

కావున ప్రధాన కారణాంకాలను త్రికములుగా సమీకరించవచ్చును.

కావున ఒక సహజ సంఖ్య యొక్క ఘనముగా వ్రాయగలుగు సంఖ్య

ఘన సంఖ్య అనగా మూడు సమాన సహజ సంఖ్యల లబ్ధంగా

వ్రాయగలుగు సంఖ్య.

540 ఘన సంఖ్యయేనా?

540ని దాని ప్రధాన కారాణాంకాల లబ్ధం వ్రాయగా

$$540 = 2\times2\times\underline{3\times3\times3}\times5$$

ఇందులో 2 మరియు 5లు త్రికములుగా లేవు కావున 540 (సంపూర్ణ) ఘన సంఖ్య కాదు.

1	540
2	270
3	135
4	45
5	15
3	5
	1

ఘనమూలాలు:

2 ప్రమాణాలు భుజము గల (సమ) ఘనాన్ని తయారు చేయుటకు ఘనాలు $8(2^3 = 8)$ కావలెనని మనకు తెలుసు

అదే విధంగా 3 ప్రమాణాల భుజము (అంచు) గల ఘనానికి $27(3^3 = 27)$ ప్రమాణఘనాలు కావాలి. ఒక ఘనం 64 ప్రమాణ ఘనాలచే తయారు చేయబడిన ఆ ఘనము పొడవు ఎంత ఉండవచ్చును?

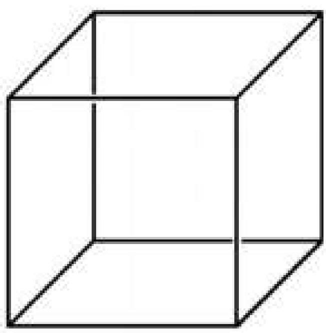
ఘనపు – భుజము పొడవు "x" ప్రమాణాలు అనుకొనిన.

$\therefore 64 = x^3$

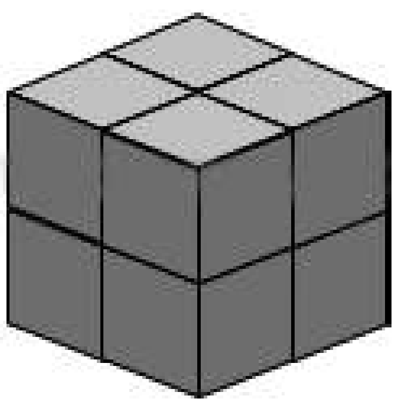
ఘనం బుజము పొడవు కనుగొనవలెనన్న 64 ఏ సంఖ్య యొక్క ఘనమో కనుగొనవలెను. కావున ఏ సంఖ్య యొక్క ఘనమో కనుగొను ప్రక్రియను ఘన మూలమును కనుగొను ప్రక్రియ అంటాం. ఇది ఘనమప చేయు ప్రక్రియకు విలోమము.

$4^3 = 64$ కావున 4 ను 64 యొక్క ఘనమూలము అంటాం. దానిని మనము $\sqrt[3]{64} = 4$ అని వ్రాస్తాము. $\sqrt[3]{\ }$ గుర్తు ఘనమూలాన్ని సూచిస్తుంది.

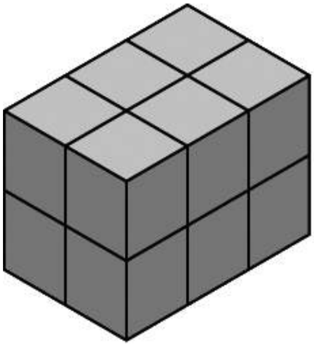
కావున x అను సంఖ్య y యొక్క ఘనమూలమైన $y = x^3$ అగును అనగా $x = \sqrt[3]{y}$



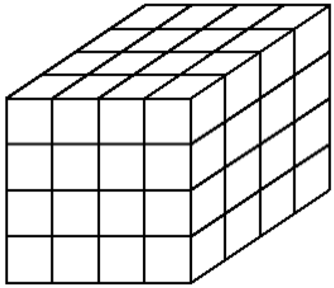
(1 ప్రమాణఘనం)



(2 ప్రమాణాల ఘనం)



(3 ప్రమాణఘనం)



(4 ప్రమాణాల ఘనం)

ఘనాలు	ఘనమూలాలు
$1^3 = 1$	$\sqrt[3]{1} = 1$
$2^3 = 8$	$\sqrt[3]{8} = 2$
$3^3 = 27$	$\sqrt[3]{27} = 3$
$4^3 = 64$	$\sqrt[3]{64} = 4$
$5^3 = 125$	$\sqrt[3]{125} = 5$
$6^3 = 216$	$\sqrt[3]{216} = 6$
$7^3 = 343$	$\sqrt[3]{343} = 7$
$8^3 = 512$	$\sqrt[3]{512} = 8$
$9^3 = 729$	$\sqrt[3]{729} = 9$
$10^3 = 1000$	$\sqrt[3]{1000} = 10$

1728 యొక్క ఘనమూలాన్ని ప్రధాన కారనాంకాల పద్ధతిన కనుగొనే విధానం

సోపానం 1: 1728 ప్రధాన కారణాంకాల పద్ధతిని లబ్ధంగా విడగొట్టగా

$$1728 = 2\times2\times2\times2\times2\times2\times3\times3\times3$$

సోపానం 2: త్రికములుగా వర్గీకరించండి.

$1728 = (2\times2\times2)\times(2\times2\times2)\times(3\times3\times3)$

సోపానం 3: ప్రతి త్రికము నుండి ఒక కారణాంకమును తీసుకొని లబ్ధంగా వ్రాయగా

$\sqrt[3]{1728} = 2\times2\times3 = 12$

$\sqrt[3]{1728} = 2\times2\times3 = 12$

2	1728
2	864
2	482
2	216
2	108
2	54
3	27
3	9
	3

మరియొక ఉదాహరణ పరిశీలిద్దాం

ఉదా 15: 4096 యొక్క ఘనమూలాన్ని కనుగొనుము?

సాధన: 4096ని ప్రధాన కారణాంకాల లబ్ధంగా వ్రాయగా

$(2\times2\times2)\times(2\times2\times2)\times(2\times2\times2)\times(2\times2\times2)$

$\sqrt[3]{4096} = 2\times2\times2\times2 = 16$

$\therefore \sqrt[3]{4096} = 16$

2	4096
2	2048
2	1024
2	512
2	256
2	128
2	64
2	82
2	16
2	8
2	4

ఘనమూలాన్ని అంచనా వేయుట:

ఇచ్చిన సంఖ్య సంపూర్ణ ఘన సంఖ్య అయిన దాని ఘన మూలాన్ని దిగువ పద్ధతి ద్వారా అంచనా వేయవచ్చును. 9261 యొక్క ఘనమూలాన్ని అంచనా వేయుట ద్వారా కనుగొందాము.

సోపానము–1: దత్త సంఖ్యలో ఒకట్ల స్థానముతో ఎడమవైపుకు పోవుచు చూడు మూడు అంకెలు ఉండునట్లు గుంపులుగా విభజించి వ్రాయాలి.

అనగా	9	261
	రెండవ	మొదటి
	గుంపు	గుంపు

సోపానము 2: మొదటి గుంపులో ఒకట్ల స్థానములోని అంకే అనగా 261లోని చివరి అంకె1 దత్త సంఖ్య యొక్క ఘనమూలపు ఒకటవ స్థానపు అంకెను సూచించుము. కావున ఘన మూలములో ఒకటవ స్థానములో 1 ఉండును.

సోపానము 3: ఇపుడు రెండవ గుంపులో గల 9ని గమనించుము. అది $2^3 < 9 < 3^3$ కావున 2 కనిష్ఠ సంఖ్య. కావున ఘన ములపు పదుల స్థానములు “2” ఉండాలి.

$\therefore \sqrt[3]{9261} = 21$

అభ్యాసము

1. ప్రధాన కారణాంకాల పద్ధతి ఉపయోగించి క్రింది వాటి వర్గమూలాలు కనుగొనుటకు బోధించే పద్ధతిని రాయండి?

   (i) 4096 (ii)7056

2. 2400ని ఏ కనిష్ఠ సంఖ్యచే గుణించగా పరిపూర్ణ వర్గం అగును. వచ్చిన ఫలిత సంఖ్య వర్గమూలం కనుగొనుము?

3. 7776 ఏ కనిష్ఠ సంఖ్యచే భాగించగా పరిపూర్ణ వర్గం అగును?

4. ఒక తోటలో ఉన్న 1521 చెట్లు కొన్ని వరుసలలో కలవు. ప్రతి వరుసలలోని చెట్లు సంఖ్య తోటలోని వరుసల సంఖ్య కనుక్కోండి.

5. రెండు సంఖ్యల లబ్ధం 1296. వాటిలో మొదటి సంఖ్య, రెండోవ సంఖ్యకు 16 రెట్లు అయిన ఆ రెండు సంఖ్యలు ఏవి?

6. ఒక చతురస్ర పొలం వైశాల్యం 1518మీ. చతురస్రపు చుట్టుకొలతకు సమాన చుట్టుకొలత గల దీర్ఘ చతురస్రము కలదు. దీర్ఘ చతురస్రం యొక్క పొడవు, వెడల్పుకు రెట్టింపు అయిన దీర్ఘ చతురస్ర వైశాల్యం ఎంత?

7. క్రింది సంఖ్యల బాగాహార పద్ధతిని వర్గమూలాలను కనుగొనడానకి బోధించే సోపానాలను రాయండి?

   (i) 1089 (ii) 2304 (iii) 68.89 (iv) 84.69

8. ఒక తోటమాలి 8289 యొక్కలను చతురస్రాకారంలో కొన్ని వరుసలలో నాటిన తరువాత 8 మొక్కలు మిగిలిన ప్రతి వరుసలో నాటిన మొక్కలు ఎన్ని?

9. 6412కు ఏ కనిష్ఠ సంఖ్యను కలిపిన పరిపూర్ణ వర్గ సంఖ్య అగును.

10. క్రింది వాటి వర్గమూలాలను దగ్గరి పూర్ణాంకానికి అంచనా వేసి చెప్పండి?

(i) $\sqrt{97}$ (ii) $\sqrt{250}$ (iii) $\sqrt{780}$

11. క్రింది సంఖ్యలను ప్రధాన కారనాంక పద్ధతి ద్వారా ఘన మూలాలను కనుగొనుటకు బోదించే సోపానాలు రాయము.

(i) 1331 (ii) 2744

13. దిగువ వాక్యములు సత్యములా? అసత్యములా? వ్రాయండి?

(i) సరి సంఖ్య యొక్క ఘనము బేసి సంఖ్య

(ii) సంపూర్ణ ఘన సంఖ్య చివరి రెండు స్థానాలు సున్నాలతో అంతమవుతాయి

(iii) ఒక సంఖ్య చివరి అంకే "5" అయిన దాని ఘనము చివరి అంకె కూడ 5 అవును.

(iv) ఒక సంఖ్యా సున్నా (0) తో అంతమైన దాని ఘనములో మూడు సున్నాలు ఉంటాయి.

(v) ఒక అంకెగల సంఖ్య యొక్క ఘనము కూడ ఒక అంకె సంఖ్య అవుతుంది.

(vi) "8" తో అంతం అగు సంపూర్ణ ఘన సంఖ్య లేదు.

(vii) రెండంకెల సంఖ్య ఘనములో మూడంకెలు ఉండవచ్చు.

14. వర్గ సంఖ్యయు మరియు ఘన సంఖ్యయు అగు రెండంకెల సంఖ్యను కనుగొనుము.

2.2 మాపనము - జామితి

2.2.0 పరిచయం

2.2.1 జ్యామితీయ ఆకృతులు - పారిభాషికపదాలు

2.2.2 వైశాల్యం - చుట్టుకొలత

2.2.3 త్రిపరిమాణ ఆకారాలు - ఉపరితల వైశాల్యం - ఘనపరిమాణం

2.2.4 నిర్మాణాలు

2.2.5 సౌష్ఠవము

2.2.6 సర్వసమాన త్రిభుజాలు, చతుర్భుజాలు - వర్గీకరణ, ధర్మాలు

2.2.0 పరిచయం

దైనందిన జీవితంలో వివిధ వస్తువులు లేదా రాశులను పరిమాణీకరించడం, అనుభవంలోనిదే. ఉపయోగాత్మక సమస్యలను సమర్థించడానికి సంఖ్యల అధ్యయనం. దానిని విస్తారత వినియోగంలో ఉంది. వివిధ అంవాల మాపనిలకు దూరమానం, తులామానం, ద్రవ్యమానం కాలమానం ఎలా ఉపయోగపడతాయో, వాటి వివరణలు మనం డి.ఎల్.ఎడ్. ప్రథమ సంవత్సరంలోనే నేర్చుకున్నాము. వివిధ భూభాగాల వైశాల్య గణనం, ధాన్యాగారాల ఘనపరిమాణం, వివిధ ఆకారాల్లో వస్తువుల పరిమాణాలు గణించడం వంటి అవసరాలకు జ్యామితి అధ్యయనం ఆరంభమై అభివృద్ధి చెందింది.

సామాన్య జ్యామితీయ పటాలేగాక లంబత్వం, సమాంతరత, సర్వసమాన సారూప్యత వంటి సరళమైన అంశాలు కూడా సాధారణ అనుభవం నుండి పొందినవే. జామితీయ ఆకారాలను పరిశీలిస్తే కొన్ని సిద్ధాంతాలను సాధ్యపరచవచ్చు. గ్రీకులు జ్యామితీలో తార్కికలికు, భారతీయులు నిర్మాయ ప్రక్రియలకు ప్రాముఖ్యతనిచ్చారు. దాదాపు పదిహేడవ శతాబ్దం వరకు కచ్చితమైన గణితాత్మక హేతువాదనలకు జ్యామితి మూలంగా ఉంది. గ్రీకులననుసరించిన శాస్త్రజ్ఞులు అసలు గణితశాస్త్రం తప్పకుండా జ్యామితీయమైనదే అని నమ్మారు. సమతల, ఘన జ్యామితికి ప్రధానగ్రంథంగా యూక్లిడ్ 'ఎలిమెంట్స్' నిలించింది.

2.2.1 జ్యామితీయ ఆకృతులు – పారిభాషిక పదాలు:

పరిచయం:

'జ్యామితి' లేదా 'రేఖాగణితం' ను ఇంగ్లీషులో Geometry (జ్యామెట్రీ) అంటారు. "Geo" అంటే భూమి, "Metron" అంటే "కొలవడం" అని అర్థానిచ్చే గ్రీకు పదాల నుంచి "Geometry" అనే పదం ఉద్భవించింది. మానవుడు భూమిని కొలిచే అవసరాన్ని బట్టి జ్యామితిశాస్త్రం అభివృద్ధి చెందినట్లు అర్థమవుతుంది.

జ్యామితి కొన్ని స్వానుభవ విషయాలు, నిర్వచనాలు, నిర్ధారణలు తార్కిక ఆలోచనల ద్వారా రూపొందిన గణితాంశం, ఇప్పుడు జ్యామితి ప్రాథమిక భావనలను గురించి చర్చిదాం.

జ్యామితి ప్రాథమిక భావనలు:

1. బిందువు :

'బిందువు' ఒక స్థానాన్ని (ఉనికిని) సూచిస్తుంది. జ్యామితిలో "బిందువు" అనే పదం అనే పదం అనిర్వచితం. బిందువుకు పొడవు, వెడల్పు, మందం లాంటివి లేవు.

దీనిని విద్యార్థులు నల్లబల్లపై చాక్‌పీస్‌తో ఒక చుక్కను ఉంచడం ద్వారా అవగాహన చేసుకుంటారు. ఆకాశంలో నక్షత్రం అంతరాళంలో ఒక బిందువుగా చెప్పవచ్చు. బిందువు అనేది అరూప భావన, విద్యార్థులు ఊహించుకొని అర్థం చేసుకోవడం కష్టం కాబట్టి సరళరేఖ, రేఖాఖండం, వక్రరేళ ఏదైనా ప్రారంభమయ్యేది. బిందువుతోనే అనే భావన ద్వారా 'బిందువు' అనే పదాన్ని అవగాహన పరచవచ్చు.

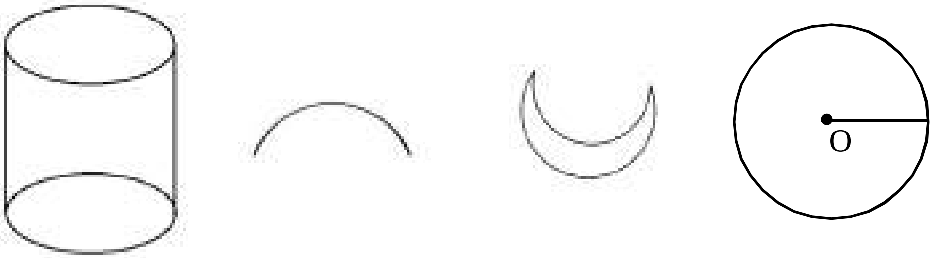
అనేక బిందువులను పక్క పక్కన వరుసగా ఉంచితే ఒక రేఖ ఏర్పడుతుంది. అని వివరిస్తూ కూడా "బిందువు" అంటే ఏమిటో తెలుపవచ్చు.

2. వక్రరేఖ :

రెండువైపులా తిన్నగా అమరిక పొందని బిందు సముదాయాన్ని 'వక్రరేఖ' అంటారు.

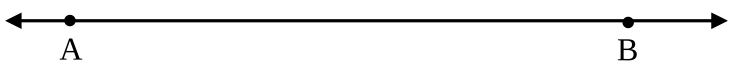
ఒక గాజు లేక రూపాయి నాణం తీసుకొని దాని అంచు చుట్టూ ఒక గీత గీస్తే అది వృత్తం, వృత్తం కొంత భాగంగా వక్రరేఖను చూపించవచ్చు. వృత్తలేఖినితో ఒక చాపాన్ని గీస్తే అది వక్రరేఖ అని అవగాహన పరచవచ్చు. గుండ్రని డబ్బాలను, బంతులను చూపిస్తూ వాటి పక్క తలాలు వక్రంగా ఉంటాయని, వక్రరేఖల సంయోగమే వక్రతలం అని వివరించాలి. నెలవంక లాగా వక్రరేఖ కూడా వక్రంగా ఉంటుంది అని కూడా చెప్పవచ్చు.

ఒక పెన్సిల్‌ను ఒక దారంతో కట్టి, దారం చివరను ఒక స్థిర బిందువు దగ్గర ఉంచి పెన్సిల్‌ను లాగి గుండ్రంగా తిప్పితే అది ఒక వక్రరేఖను ఏర్పరుస్తుంది. అటువంటి రేఖలు వక్రరేఖలని తెలపాలి.



3. సరళరేఖ :-

రెండు వైపులా అనంతంగా, తిన్నగా (ఋజు మార్గంలో) అమర్చిన బిందు సముదాయాన్ని "సరళరేఖ" అంటారు. సరళరేఖ AB ని $\overleftrightarrow{AB}$ అని సూచిస్తాం. సరళరేఖ అంత్యబిందువులుండవు.

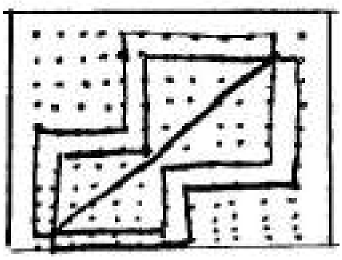


సరళరేఖ భావనను విద్యార్థులకు వారి స్వానుభవ విషయాలను చర్చిస్తూ అవగాహన పరచాలి. ఉదా:కు గది అంచు, టేబుల్ అంచు, నోట్‌బుక్ పొడవు, వెడల్పు, నల్లబల్ల అంచుల పొడవులు మొదలైనవి సరళరేఖలలో భాగాలే. సరళరేఖ నిర్వచనం ప్రకారం రెండు బిందువుల మధ్య లేదా రెండు ప్రదేశాల (స్థానాల) మధ్య కనిష్ట దూరం చూపే మార్గాన్ని "సరళరేఖామార్గం" అంటారు. అటువంటి పొడవు లేదా దూరాన్ని సరళరేఖ ద్వారా సూచిస్తాం.

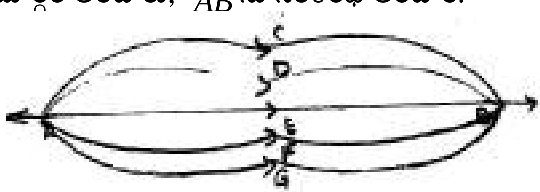
కృత్యం :-

ఒక పెగ్‌బోర్డును ఉపయోగించి రెండు పెగ్ (కొయ్య ముక్క)ల మధ్య దూరాన్ని వివిధ మార్గాల్లో కొలిచి, అన్నింటిలో అతి తక్కువ మార్గం చూపేది సరళరేఖా మర్గాం అని అవగాహన పరచవచ్చు.

రెండు ప్రదేశాల్లో AB మధ్య దూరాన్ని వివిధ మార్గాల ద్వారా కొలచి, అతి తక్కువ దూరాన్ని సరళరేఖ ద్వారా సూచించి సరళరేఖ భావనను అవగాహన పరచవచ్చు. మళ్ళీ ఈ కృత్యాన్ని నల్లబల్లపై గీచి అవగాహన పరచాలి.

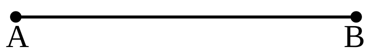


ABల మధ్య దూరాల్లో AEB అతి తక్కువ దూరం కలిగి ఉందని గమనించండి. కాబట్టి AEB ను సరళరేఖా మార్గం అంటారు, $\overleftrightarrow{AB}$ ను సరళరేఖ అంటాం.



4. రేఖా ఖండం :-

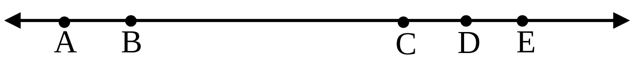
సరళ రేఖలోని కొంత భాగాన్ని "రేఖా ఖండం" అంటాం. AB రేఖా ఖండాన్ని $\overline{AB}$ తో సూచిస్తాం.



రేఖా ఖండానికి రెండు అంత్య బిందువులు అంటాయి.

కృత్యం :-

నల్ల బల్ల మీద $\overline{AB}$ సరళ రేఖను గీసి దానిపై కొన్ని బిందువులను గుర్తించి "రేఖాఖండం" అనే భావనను అవగాహన పరచవచ్చు.

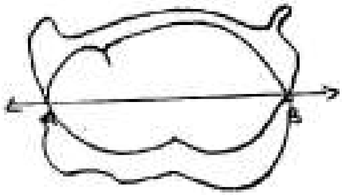


$\overleftrightarrow{AB}$ సరళ రేఖపై $\overline{CD}$ ఒక రేఖాఖండం, అదే విధంగా $\overline{DE}, \overline{CE}, \overline{AC}, \overline{AD}, \overline{CD}, \overline{DB}$ లన్నీ, రేఖాఖండాలే అని చెప్పాలి.

కృత్యం :-

దారం రెండు వైపులా లాగి పట్టుకొని పొడవైన ఒక సరళరేఖలో భాగంగా చూపించి ఒక సరళరేఖలోని కొంత భాగాన్ని రేఖాఖండం అంటాం అని అవగాహన పరచాలి. అలాగే ఆధారంలోని

ముక్కలను సరళరేఖపై ఉంచి అవి రేఖా ఖండాలను సూచిస్తాయని గుర్తింపచేయవచ్చు. కింది పటాన్ని పరిశీలించండి



పై పటంలో చూపినట్లు A,B బిందువులను వివిధ మార్గాల్లో కలిపవచ్చు, పై మార్గాల్లో ఏ మార్గం అతి తక్కువ మార్గం అవుతుంది? పరిశీలించండి వాటిలో A,B లను కలిపే ఋజుమార్గమే అతి తక్కువ దూరం అవుతుందని గమనించారు కదా. AB సరళరేఖలో AB లను కలిపే రేఖలన్నింటిలో అతి తక్కువ దూరం గల ఋజు మార్గాన్నే రేఖాఖండం AB అంటాం. A,B లను కలిపే ఏ ఇతర రేఖనైనా "వక్రరేఖ" అంటారు.

5. కిరణం :

ఒక బిందువు నుంచి ప్రారంభమై ఒక తిన్నని మార్గంలో అనంతంగా ప్రయాణించేదే "కిరణం" కిరణం AB ను $\overline{AB}$ తో సూచిస్తాం.

ఆ తిన్నని మార్గాన్నే కిరణం యొక్క దిశ అంటారు. ప్రతి కిరణం ఏదో ఒక బిందువు నుంచి ప్రారంభమవుతుంది. ఆ బిందువునే కిరణం యొక్క ఆది బిందువు అంటాం. కిరణం అనంతంగా ఒకే దిశలో ప్రయాణిస్తూ వుంటుంది. కనుక దానికి అంత్య బిందువు ఉండదు.

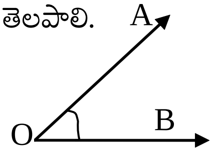
కిరణం పటాన్ని వేసి దీనిని పిల్లలు ఆడుకొనే బాణం పుల్లతో పోల్చి, బాణం పుల్లలాగా ఒక పక్క (Arrow) గుర్తుగా ఉన్న సరళరేఖ ఖంఢాన్ని కిరణం అంటాం. అని వివరించాలి.

ఉదయం సూర్యోదయ సమయంలో ఇంట్లో కిటికీల నుంచి, వెంటిలేటర్ నుంచి సూర్యుని కాంతి గీతల మాదిరిగా ప్రసరిస్తూ కనబడుతుంది. దానినే విద్యార్థులు గమనించి ఉంటారు, అటువంటి విషయాలను వివరిస్తూ, కాంతి ప్రసరణం అంతా కాంతి కిరణాలే అని చెప్పి కిరణం అంటే ఏమిటో అవగాహన పరచవచ్చు.

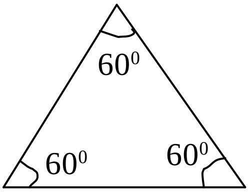
6. కోణం :

ఒక మూల బిందువును కిలిగి ఉన్న రెండు కిరణాల మధ్య ఉన్న ప్రదేశాన్ని కోణమంటారు. ప్రక్క పటంలో $\overline{OA}, \overline{OB}$ లు కిరణాలని $\overline{OA}, \overline{OB}$ లు భుజాలని O మూల బిందువని $\overline{OA}, \overline{OB}$

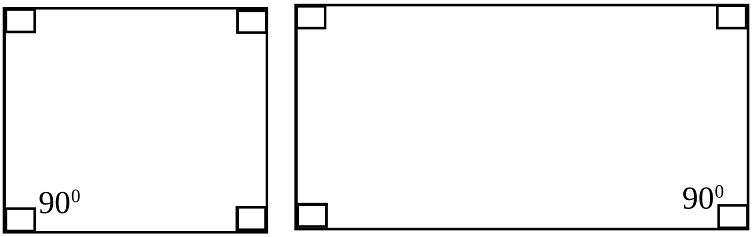
భుజాలతో ఏర్పడిన కోణం $\angle AOB$ అని తెలపాలి.



ఎ. పొడవు సమానంగా ఉన్న మూడు సన్నని తీగలను కింది పటంలో చూపినట్లయితే అవి ఏర్పరచే కోణాలు 60^0 ఉంటాయని వివరించవచ్చు. ఈ ప్రయోగాలు చేయించవచ్చు.



బి. చతురస్రాకార, దీర్ఘచతురస్రాకార గది గోడల మధ్య నేలపై ఏర్పడే కోణం 90^0 అని చూపాలి.

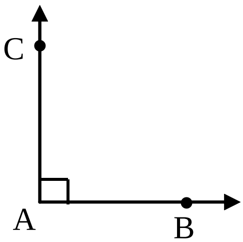


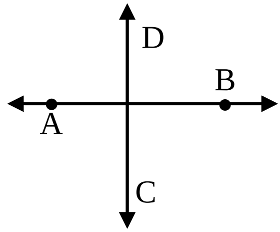
సి. గది తలుపులు, కిటికీ తలుపులు తెరచి, మూసేటప్పుడు ఏర్పడే కోణం మార్పులను గమనింపజేసి కోణమనే భావనను అవగాహన పరచవచ్చు.

డి. ఒక అట్ట ముక్క లేదా కాగితాన్ని మడచి ఆ మడతపై తెరిచి చూపితే ఏర్పడిన భాగాన్ని కోణం అంటారని కూడా వివరిస్తూ కోణ భావనను అవగాహన పరచవచ్చు.

7. లంబం :

ఒకే తలంలో ఉన్న రెండు సరళరేఖల మధ్య కోణం $90°$ లేదా ఒక లంబకోణం ఉంటె ఆ రెండు సరళరేఖలు ఒకదానికొకటి పరస్పర లంబాలు. లంబాన్ని '1' గుర్తుతో సూచిసారు.





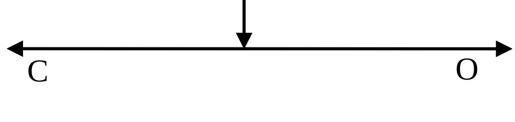
కృత్యం :-

చతురస్ర, దీర్ఘచతురస్రాకార మూలలను కలిగి ఉన్న గోడలను చూపిస్తూ గది గోడలు భూమికి నిలువుగా అంటే లంబంగా ఉంటాయని ఒకదానికొకటి లంబంగా ఉండే గది గోడలు భూమికి నిలువుగా అంటే లంబంగా ఉంటాయని, ఒకదానినొకటి లంబంగాఉండే గది గోడలను చూపిస్తూ ఇవి పరస్పర లంబాలు అని వివరిస్తూ, లంబం అంటే రెండు భుజాల మధ్య 90^0 కోణ ముంటే వాటిని లంబరేఖలంటారని వివరించాలి.

నిలువుగా వున్న టెలిగ్రాఫ్, టెలిఫోన్, కరెంటు స్తంబాలు, పెద్దపెద్ద భవంతుల నిలువు స్తంబాలను ఉదాహరిస్తూ లేదా వాటి పటాలను చూపిస్తూ లంబం అంటే ఏమిటో చాలా తేలికగా అవగాహన కల్పించవచ్చు. నేలకు ఒరిగి ఉన్న చెట్లు స్తంబాలు నేలతో చేసే కోణం లంబకోణం కాదని గుర్తింపజేయాలి..

8. సమాంతర రేఖలు :-

ఒకే తలంలో ఉన్న రెండు సరళరేఖలు రెండు పక్కల ఎంత దాకా పొడిగించినా ఖండించుకోకపోతే అటువంటి సరళరేఖలను సమాంతర రేఖలు అంటారు. వీటి మధ్య దూరం ఏ బిందువు వద్దమైనా సమానంగా ఉంటుంది. సమాంతారాన్ని || గుర్తుతో సూచిస్తారు.



కృత్యం :-

రైలు పట్టాలు సమాంతరంగా ఉన్న కరెంటు తీగలు, కిటికీ చువ్వలు, కిటికీలు ఫ్రేమ్, పలక, నల్లబల్ల, టెబుల్ (ఎదురెదురు) అంచులు సమాంతర రేఖలు పోలి ఉంటాయని చెప్తూ సమాంతర భావనపై అవగాహన కల్పించాలి.

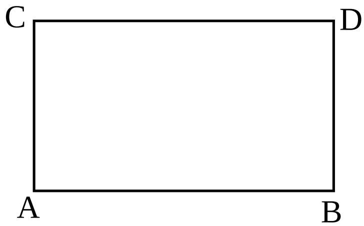
దీర్ఘచతురస్రం, చతురస్రం, త్రిభుజం, వృత్తం:

1. దీర్ఘచతురస్రం:

ఒక సమాంతర చతుర్భుజంలో కోణం 90^0 ఉంటే అటువంటి సమాంతర చతుర్భుజాన్ని "దీర్ఘచతురస్రం" అంటారు.

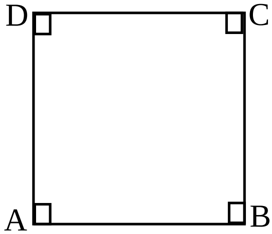
(లేదా)

ఒక చతుర్భుజంలో ఎదురెదురు భుజాలు సమానంగా ఉండి ఒక్కొక్క కోణం 90^0 ఉంటే ఆ చతుర్భుజాన్ని "దీర్ఘచతురస్రం" అంటారు.



2. చతురస్రం:

ఒక చతురస్రం నాలుగు భుజాలు సమానమైతే ఆ దీర్ఘచతురస్రాన్ని చతురస్రమని అంటారు.



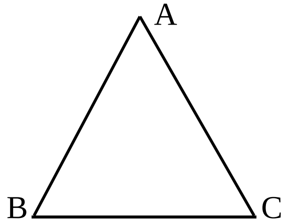
కృత్యం

చతురస్ర, దీర్ఘచతురస్రాకార భూమి ఉన్న రకరకాలైన గదులను చూపిస్తూ దీర్ఘచతురస్రం అనే భావనను అవగాహన పరచవచ్చు. రంగు కాగితాలను దీర్ఘచతురస్రం, చతురస్రాకారాలలో కత్తిరింపజేసి వాటి భుజాలను పోల్చుతూదీర్ఘచతురస్రం, చతురస్రాల మధ్య వ్యత్యాసాన్ని వివరించవచ్చు.

విద్యార్థులతో రకరకాల అట్టపెట్టెలను సేకరింపజేసి వాటి తలాలను గమనింపజేసి దీర్ఘచతురస్ర, చతురస్ర భావనను వివరించాలి.

3. త్రిభుజం :

ఒకే తలంలో మూడు భుజాలు కలిగి ఉండే సంవృత పటాన్ని "త్రిభుజం" అంటారు. లేదా మూడు భుజాలు, మూడు కోణాలు కలిగియుండే బహుభుజిని త్రిభుజం అంటారు. త్రిభుజాన్ని Δ గుర్తుతో సూచిస్తారు.

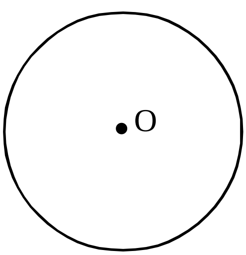


కృత్యం:

అట్ట ముక్కలను వివిధ త్రిభుజాకారాల్లో కత్తిరించి చూపిస్తూ త్రిభుజ భావనను అవగాహన పరచవచ్చు. మూడ స్ట్రా ముక్కలను తీసుకొని గుండు సూదులతో త్రిభుజాకారాలుగా ఏర్పరచి త్రిభుజాన్ని తెలపవచ్చు. స్ట్రా ముక్కలను భుజాలుగా, వాటి మధ్య ఏర్పడే బాగం కోణం అనీ తెలిపి ఆ విధంగా మూడు భుజాలు, మూడు కోణాలు కలిగి ఉండే ఏ వస్తువునైనా, పటాన్నయినా త్రిభుజమంటారని తెలపాలి."కుటుంబ నియంత్రణ" కు ఉపయోగించే ఎర్ర గుర్తు కూడా త్రిభుజాకారమే అని ఉదహరిస్తూ విద్యార్థుల చూసే రకరకాల త్రిభుజాకారాలను చెప్పమని ప్రోత్సహించాలి.

4. వృత్తం :

ఒక స్థిర బిందువు నుంచి సమాన దూరంలో గీసిన ఒక సంవృత వక్రరేఖను "వృత్తం" అంటారు.



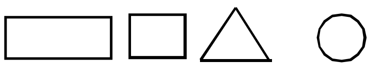
కృత్యం:

గుండ్రని రేకు డబ్బాలు లేదా అట్ట డబ్బాలను, గుండ్రని నాణేలను చూపిస్తూ వాటి ఉపరితలం, భూ బాగం ఒకే ఆకారంలో ఉన్నాయని ఇటువంటి ఆకారాన్ని వృత్తమంటారు. అని చెప్పాలి. ఆ రేకు డబ్బాను లేదా నాణేన్ని తెల్లటి కాగితంపై ఉంచి దాని అంచు వెంబడి పెన్సిల్‌తో

గీత గీచి ఆ డబ్బాను తీసివేస్తే గుండ్రని O ఆకారమేర్పడుతుంది. దీనినే వృత్తమంటారు అని చెప్పాలి.

విద్యార్థులతో రంగు కాగితాలు లేదా వేస్టు పేపరు, అట్టముక్కలతో వివిధ పరిమాణాలు ఉండే వృత్తాలుగా కత్తిరింపజేసి వాటి అంచులను పెన్సిల్‌తో పూర్తి వృత్తంగా గీయించి, వృత్తం అంటే అవగాహన పరచవచ్చు.వృత్తలేఖిని సహాయంతో వివిధ వ్యాసార్థాలతో గుండ్రటి గీతలు గీయించి అవన్నీ వృత్తాలని, వృత్తలేఖిని పాదం. స్థిరబిందువు అదే వృత్తకేంద్రమని అవగాహన పరచాలి.

ప్రాజెక్టు పనులు:

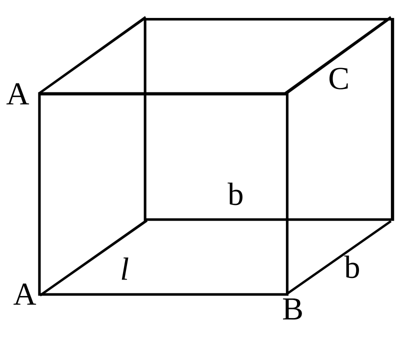
1. అగ్గిపుల్లలతో దీర్ఘచతురస్రం, చతురస్రం, త్రిభిజాలను ఏర్పరచి వాటి అంచులు, మూలలు యొక్క పట్టికను తయారు చేయించడం.
2.  లను ఉపయోగిస్తూ
   ఎ. మనిషి బి. రైలు సి. ఇల్లు బొమ్మలు గీయించడం.
3. జియో బోర్డుపై రబ్బరు బ్యాండ్స్‌తో దీర్ఘచతురస్రం, చతురస్రాలు త్రిభుజాలు ఏర్పరచడం.

ఘనాకారాలు:

ఏదైనా ఒక వస్తువు లేదా పదార్థం పొడవు, వెడల్పు, ఎత్తులు అనే మూడు కొలతలు కలిగి ఉన్న వస్తువులను ఘనాకారాలు అంటాం. కాని వక్రు తలం ఉన్న కొన్ని ఆకారాలకు పొడవు, వెడల్పులకు బదులుగా వాటి భూమి వృత్తాకారంలో ఉంటుంది. అలాగే పొడవు, వెడల్పు, ఎత్తులు మూడూను ఒకే కొలతతో ఏర్పడే ఘనాకారం కూడా ఉంది.

1. ఘనం (సమఘనం):

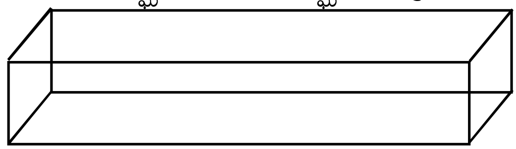
ఒక క్రమ ఘనాకార వస్తువు పొడవు, వెడల్పు, ఎత్తుల కొలతలు సమానంగా ఉంటే దానిని ఘనం అంటారు. దీని తలాలు అన్నీ చతురస్రాలే.



ఉదా: పొడవు, వెడల్పు, ఎత్తులు సమానంగా ఉన్న ప్యాకెట్టు లేదా అట్టపెట్టెలు. వీటిని ఘనాకారంలో ఉన్నాయంటాం.

2. దీర్ఘ ఘనం :

ఒక క్రమఘనాకార దీర్ఘఘన తలాలు దీర్ఘ చతురస్రాలు

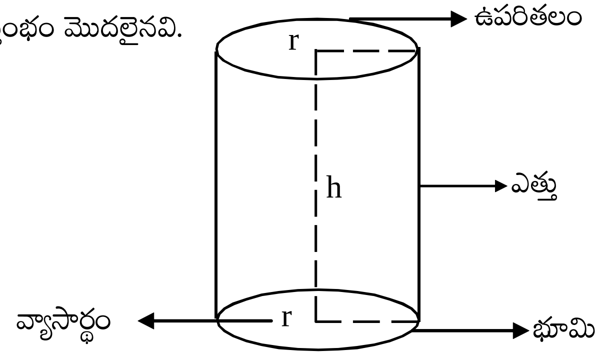


ఉదా: జ్యామితీయ పరికరాల పెట్టె, ఇటుక మొదలైనవి

3. స్థూపం :

స్థూపం ఒక క్రమ ఘనాకారం. పక్కతలం వక్రంగా ఉండి ఉపరితలం, భూమి, సమాంతర సమాన వృత్తాలు కలిగివున్న వస్తువును స్థూపం అంటారు. దీన్నే క్రమ స్థూపం అంటారు.

ఉదా: గుండ్రని రేకు డబ్బా, గుండ్రని టిఫెన్ బాక్సు, గుండ్రని అట్టపెట్టె, గుండ్రని స్తంభం మొదలైనవి.

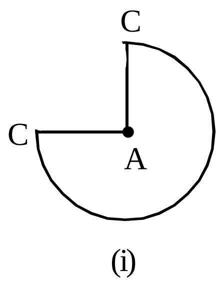


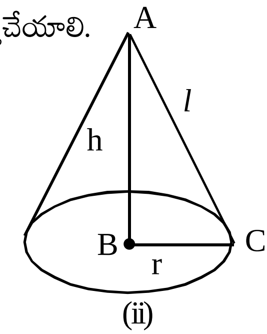
కొంత బంకమట్టి లేదా ప్లాస్టర్ ఆఫ్ పారిస్‌ను తీసుకొని దానిని గుండ్రని స్థూపాకారంగా చేయవచ్చు. లేదా దీర్ఘచతురస్ర ఆకారపు అట్టముక్కను పొడవు వెంబడి మడిస్తే రెండు వెడల్పులు కలుసుకొని స్థూపాకారం ఏర్పడుతుంది.

4. శంకువు :

విద్యార్థులు రోజూ బయట గమనించే విషయాలను వారి దృష్టికి తీసుకువస్తూ శంకువు అంటే ఏమిటి? అవగాహన పరచవచ్చు. ఉదాహరణకు ఇసుక కుప్ప, ధాన్యం కుప్ప, ఐస్‌క్రీమ్ కోన్ బోర్లించిన గరాటు ఎలా ఉంటాయని ప్రశ్నిస్తూ అవి గుడారం లేదా పూరి గుడిసే పై కప్పు

మాదిరిగా ఉంటాయని వాటినే శంకువు ఆకారాలు అంటారని విద్యార్థులకు తెలియజేయాలి. క్యారెట్టు కూడా శంకువు ఆకారమే అని గుర్తుచేయాలి.



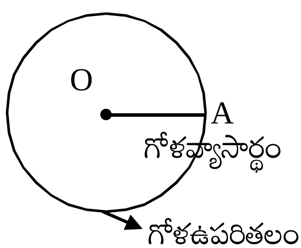


బంక మట్టితో పటంలో చూపిన విధంగా శంకువు ఆకారం చేయవచ్చు.

పలుచని కార్డుబోర్డు లేదా అట్టముక్కను పటం (ఎ) లో చూపినట్లు వృత్తాకారంహో కత్తిరించి దానిని (బి) పటంలో చూపిన విధంగా వ్యాసార్థాలు కలిసినట్లు మడిస్తే శంకువు ఏర్పడడాన్ని గమనించండి.

5. గోళం:

విద్యార్థులు రోజు ఆడుకొనే కొన్ని ఆటవస్తువులు ఉదాహరణకు గోలీలు, బంతులు, గుండ్రని గాలిబుగ్గలు మొదలైనవి చూపిస్తూ ఇటువంటి గుండ్రని ఆకారాన్ని గోళం అని అంటారని తెలపాలి. గోళానికే ఒకే ఒక కొలత ఉంటుంది. అది దాని వ్యాసార్ధం అని చూపాలి.



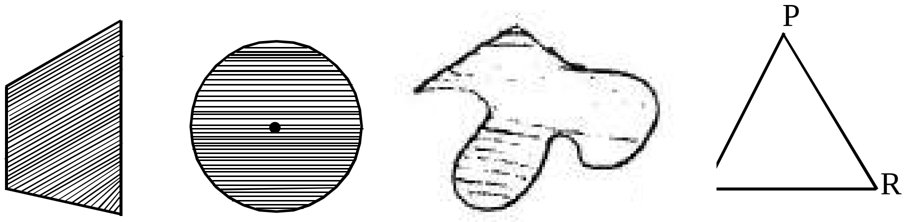
ప్రాజెక్టుపనులు

1. సమఘనం, దీర్ఘఘనం, ఆకారాల్లో ఉన్న ఖాళీ అట్టపెట్టలను సేకరించడం, వాటి తలాలు, అంచులు, మూలలు లెక్కించడం, పట్టిక రూపంలో రాయడం.
2. ఈ అట్టపెట్టెలను కత్తిరించి తలాలు ఏ ఆకారాల్లో ఉన్నాయో పరిశీలించడం.
3. శంకువు, స్థూపం, గోళం ఆకారాల్లో ఉన్న వస్తువులను పరిశీలించడం వాటి సమతలాలు సంఖ్య, వక్రతలాల సంఖ్య, మూలల సంఖ్య, అంచుల సంఖ్యలను పట్టిక రూపంలో రాయడం.

4. బంకమట్టితో సమఘనం, దీర్ఘఘనం, స్థూపం, గోళం, శంకువుల నమూనాలు తయారుచేయడం.

2.2.3: వైశాల్యం – చుట్టుకొలత

కింద గీసిన కొన్ని సంవృత పటాలను పరిశీలించండి.



పై పటాల్లో ప్రతి పటం కాగితపు తలంలో కొంత భాగాన్ని ఆక్రమిస్తుంది. ప్రతి సంవృత పటంలో గీతలతో ఆక్రమించబడిన ప్రదేశాన్ని పటం యొక్క వైశాల్యం అంటారు. వైశాల్యానికి సంబంధించి విద్యార్థులకు కింద వివరించిన విధంగా కృత్యాలు కల్పించడం ద్వారా ఆ భావనపై పూర్తి అవగాహన ఏర్పరుచుకోవచ్చు.

1. ప్రదేశ భావన ఏర్పరచడం:

టేబుల్, పుస్తకం మొదలైన వస్తువుల ఉపరితలాలను పేపరుతో కప్పడం, ఆలాగే రంగు వేయడం, ఒక తలంపై మరొక తలం ఉంచడం మొదలైన కృత్యాల ద్వారా ప్రదేశ భావన ఏర్పరచగలం.

2. రెండు ప్రదేశాలను పోల్చడం:

రెండు పేపర్లను ఒకదానిపై ఒకటి పేర్చడం ద్వారా ఏ పేపరు ప్రదేశం ఎక్కువ? ఏ పేపరు ప్రదేశం తక్కువ? గ్రహింపచేయవచ్చు.

3. వైశాల్యాల దృష్ట్యా క్రమంలో ఉంచడం:

ఉదా: నాలుగైదు పేపర్లు ఒకదానిపై ఒకటి ఉంచడం ద్వారా ఏ పేపరు ప్రదేశం ఎక్కువో, ఏ పేపరు ప్రదేశం తక్కువో విద్యార్థులతో గుర్తింపచేసి ప్రదేశాలను బట్టి పేపర్లు ఒకదానిపై ఒకటి క్రమంలో ఉంచడం.

4. వైశాల్యం – బహురూప నిత్యత్వ సూత్రం పాటిస్తుంది.:

కృత్యాలు:

రెండు పోస్టుకార్డులు తీసుకోండి. ఒక పోస్టుకార్డుపై మరొక పోస్టుకార్డు ఉంచడం ద్వారా రెండింటి వైశాల్యం ఒకటేనని విద్యార్థులు గుర్తిస్తారు. ఒక పోస్టు కార్డును రెండు మూడు ముక్కలు చేసి, ముక్కలతో వేరొక ఆకారం ఏర్పరచాలి.కొత్తగా ఏర్పడిన ఆకారం వైశాల్యం, పోస్టుకార్డు వైశాల్యం ఒకటేనని గ్రహిస్తారు.

5. వైశాల్యం లెక్కించడాని ప్రమాణాల అవసరాన్ని గుర్తింపజేయడం:

కృత్యం:

8×5, 4×10 కొలతలు గల దీర్ఘ చతురస్రాకారపు అట్టముక్కలు చూపి, రెండింటిలో దేనికి వైశాల్యం ఎంత ఎక్కువ అని విద్యార్థులను ప్రశ్నిస్తే ఆయా ప్రదేశాలను మాపనం చేయడానికి ప్రమాణాల ఆవశ్యకతను విద్యార్థులు గుర్తిస్తారు.

6. నిర్దిష్టం కాని ప్రమాణాలతో వైశాల్యం లెక్కించడం:

కృత్యం:

- మేజాబల్లను నోటు పుస్తకాలతో కప్పడం, పాత దినపత్రికలతో కప్పడం
- గణిత కిట్‌లోని డామినోలతో పుస్తక తలాన్ని కప్పడం.
- చదరపు పెంకులతో నిర్ణీత ప్రదేశాన్ని కప్పడం
- అగ్గిపెట్టెలతో పుస్తక తలాన్ని కప్పడం
- చతురస్రాకారంలో ఉన్న పాత స్టాంపులతో పుస్తక తలాలను కప్పడం మొదలైన కృత్యాలద్వారా వైశాల్యాన్ని చదరపు ప్రమాణాల్లో లెక్కించడం సులభం అని విద్యార్థులు గుర్తించేటట్లు చేయవచ్చు.

కృత్యం:

గళ్ళ కాగితంలో వివిధ రకాల చతురస్రాలు, దీర్ఘ చతురస్రాలు గీయడం ద్వారా ప్రతిదాని వైశాల్యం ఎన్ని చదరపు ప్రమాణాలలో లెక్కింపజేయడం.

కృత్యం:

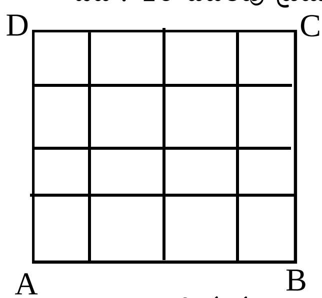
చిన్న పుస్తకాన్ని గళ్ళ కాగితంపై వుంచి దాని తలాన్ని అంచుల వెంబడి గీయడం ద్వారా పటాన్ని ఏర్పరచి, అందులో ఎన్ని చదరపు ప్రమాణాలో లెక్కింపజేయడం.

కృత్యం:

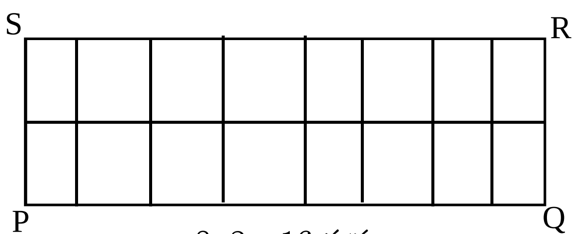
క్రమాకారం లేని పటాల వైశాల్యం గళ్ళ కాగితం ద్వారా లెక్కింపజేయడం ఉదా: పాదం, అరచేయి మొదలైన వాటి వైశాల్యాలను గళ్ళ కాగితం ద్వారా లెక్కించడం.

కృత్యం: అభ్యాసం కోసం గళ్ళ కాగితాన్ని గాని, జియోబోర్డునుగాని, రబ్బరు బ్యాండ్లను గాని ఉపయోగించి తగినన్ని చదరపు గళ్ళు కలిగిన చతురస్రాలు గాని, దీర్ఘ చతురస్రాలు గాని ఏర్పచమనాలి.

ఉదా: 16 చదరపు ప్రమాణాలు కలిగిన వివిధ పటాలు ఏర్పరచడం.



4×4 = 16 చ.ప్ర



8×2 = 16 చ.ప్ర

7. వైశాల్యాన్ని లెక్కించడానికి ప్రమాణిక కొలతలను పరిచయం చేయడం:

కృత్యం:

చదరపు సెంటిమీటర్లు కలిగిన గళ్ళ కాగితంలో వివిధ పొడవు, వెడల్పులు కలిగిన దీర్ఘచతురస్రాలు, అలాగే చతురస్రాలు ఏర్పరచి వైశాల్యాన్ని చదరపు సెంటీమీటర్లలో లెక్కింపజేయడం.

8. దీర్ఘ చతురస్ర వైశాల్యానికి సూత్రం రాబట్టడం:

కృత్యం:

క్రింది కృత్యం ద్వారా దీర్ఘచతురస్ర వైశాల్యం = పొడవు × వెడల్పు అని రాబట్టవచ్చు.

కావలసిన సామాగ్రి:

చదరపు సెంటిమీటర్ల గళ్ళ కాగితం

విధానం:

గళ్ళకాగితం కింది పట్టికలో చూపించిన పొడవు, వెడల్పులు కలిగిన దీర్ఘచతురస్రాలను ఏర్పరచాలి. ప్రతి దీర్ఘ చతురస్ర వైశాల్యాన్ని చదరాలను లెక్కించడం ద్వారా తెలుసుకోవాలి.

వ.నెం.	పొడవు సెం.మీ.	వెడల్పు సెం.మీ.	వైశాల్యం చ.సెం.మీ.	పొడవు × వెడల్పు చ.సెం.మీ
1	3	2	6	$3 \times 2 = 6$
2	4	3		
3	5	2		
4	6	3		
5	6	2		

పట్టికను పరిశీలించడం ద్వారా విద్యార్థులు దీర్ఘచతురస్ర వైశాల్యం కనుక్కోవడానికి సూత్రం పొడవు × వెడల్పు అని గ్రహిస్తారు.

పై పద్ధతిలోనే చతురస్ర వైశాల్యం భుజం × భుజం అని విద్యార్థులు గ్రహించేటట్లు కృత్యాన్ని నిర్వహించవచ్చు.

చుట్ట కొలత :

కింది కృత్యాల ద్వారా చుట్టుకొలతపై విద్యార్థులు పూర్తి అవగాహన పొందేటట్లు చేయగలం

1. చుట్టుకొలత భావన అవగాహన తగిన కృత్యాలు ఇవ్వడం.

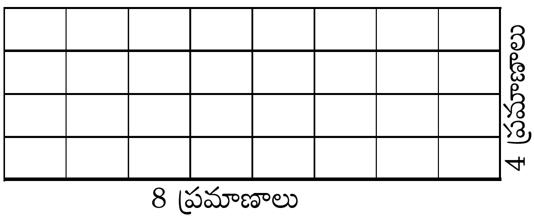
కృత్యం: ఒక ఇంటి చుట్టూ ఉన్న ప్రహారీగోడ, తోటకు వేసిన కంచె వృత్తాకారపు పరుగు పందెపు బాట మొదలైన అంశాలు చుట్టుకొలత భావాన్ని ఏర్పరుస్తాయి

2. చుట్టుకొలతను పోల్చడంపై అవగాహన కల్పించడం.

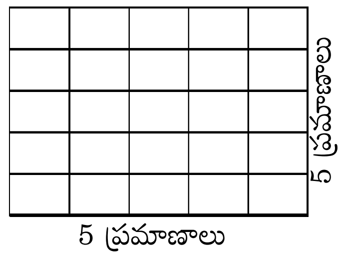
కృత్యాలు:

1. రెండు చెట్ల మొదళ్ళ చుట్టుకొలతను దారంతో కొలవడం ద్వారా ఏ చెట్టు మొదలు యొక్క చుట్టుకొలత ఎక్కువో గుర్తించడం.
2. ఛాతీ చుట్టుకొలత, నడుం చుట్టకొలత మీటరు టేపుతో కొలవడం
3. వివిధ పలకల చుట్టుకొలతలు కొలిచి పోల్చడం
4. మేజాబల్ల, నల్లబల్ల మొదలైన వాటి చుట్టకొలతలు మీటర్ టేప్ లేదా స్కేలుతో కొలవడం

కృత్యం: జియోబోర్డుపైన, గళ్ళ కాగితం మీద చతురస్రాలు, దీర్ఘచతురస్రాలు ఏర్పరచి అంచువెంబడి గళ్ళు లెక్కించడం ద్వారా ప్రతి పటం చుట్టుకొలత లెక్కించడం.



చుట్టుకొలత =8+4+8+4 = 24 ప్ర



చుట్టుకొలత = 5+5+5+5 = 20 ప్ర

చతురస్రం చుట్టుకొలత కనుక్కోవడానికి సూత్రం రాబట్టడం:

కావలసిన సామగ్రి: జియో బోర్డు లేదా గళ్ళ కాగితం

విధానం:

- 4,5,6,7 .... ప్రమాణాలు గల చతురస్రాలను గళ్ళకాగితం మీద ఏర్పరచాలి.
- ప్రతి పటం చుట్టుకొలత అంచుల వెంబడి లెక్కించండి.
- క్రింద చూపిన విధంగా పట్టికలో పూరించాలి.

వ.నెం.	**చతురస్ర భుజం**	**చతురస్ర చుట్టుకొలత**	**చతురస్ర భుజం** ×4 **(4ఎ) ప్ర.**
1	4 ప్ర	4 + 4 + 4 + 4 = 16	4 × 4 = 16
2	5 ప్ర	–	–
3	6 ప్ర	–	–
4	7 ప్ర	–	–

పట్టికను పరిశీలించి ఒక చతురస్రం చుట్టుకొలత, దాని భుజానికి 4 రెట్లు ఉంటుందని గ్రహింపజేయవచ్చు.

చతురస్ర భుజం a ప్రమాణాలైతే దాని చుట్టు కొలత “4a” ప్రమాణాలు

పై విధంగా దీర్ఘచతురస్రం చుట్టుకొలత, దాని పొడవు, వెడల్పు మొత్తానికి రెట్టింపని విద్యార్థులు కనుక్కోవచ్చు.

ఒక దీర్ఘచతురస్రం పొడవు l, వెడల్పు b ప్రమాణాలు అయితే దాని చుట్టుకొలత 2 (l+b) ప్రమాణాలు అవుతుందని సాధారణీకరణం చేయించవచ్చు.

అభ్యాసం - (ఎ)

1. చ.మి.మీ., చ.సెం.మీ., మధ్య ఉన్న సంబంధాన్ని గ్రహించడానికి తగిన కృత్యాలు వివరించండి. అలాగే చ.మీ., చ.సెం.మీ, మధ్య ఉన్న సంబందాన్ని గ్రహించడానికి తగిన కృత్యాలు రాయండి.
2. వైశాల్యాన్ని చదరపు ప్రమాణాల్లో లెక్కించడానికి అనువైనది గ్రహించడానికి తగిన కృత్యాలు సూచించండి.
3. 16 సెం.మీ. నూలు దారం యొక్క రెండు కొనలు ముడివేయండి. ఇలాంటివి ఆరు తయారు చేసుకోండి. ఒక్కొక్కదారంతో చుట్టుకొలత 12సెం.మీ. ఉండేలా గళ్ళ కాగితంపై నాలుగు భుజాలు, ఐదు భుజాలు, ఆరు భుజాలు. గల బహు భుజాలు చివరగా వృత్తం ఏర్పరచి సెల్లో టేపుతో అతికించండి. ప్రతి పటం వైశాల్యం సుమారుగా లెక్కించండి. మీరేమి గమనించారు‘ ఏర్పడిన ప్రతి పటం వైశాల్యంమెంత? చుట్టకొలత ఎంత? ఏ పటం వైశాల్యం ఎక్కువో తెలుసుకోండి.

వృత్తం

1. వృత్తం గీయడం ద్వారా వృత్తాకారాన్ని విద్యార్థులు గుర్తించేటట్లు చేయడానికి విద్యార్థులతో ఈ క్రింది కృత్యాలు తరగతి గదిలోగాని, తరగతి గది బయటగాని చేయించాలి.

i. చేతి గాజు, రూపాయినాణెం, వృత్తాకారపు అంచు కలిగిన నీళ్ళు తాగే గ్లాసు మొదలైన వస్తువుల సహాయంతో పెన్సిలుతో కాగితంపై వృత్తాకారాలు గీయడం.

ii. చిన్న దారపు ముక్క కొనల్లో ఒక దానికి ఒక పెన్సిలును కట్టాలి. రెండవ కొనకు వేరే పెన్సిలు కట్టాలి. రెండవ పెన్సిలు కొనను కాగితంపై నొక్కి పట్టి దారాలను

బిగువుగా లాగిపట్టి కుడిచేతితో మొదటి పెన్సిలును పట్టుకొని పెన్సిలు మొనతో చుట్టూ గీయాలి. ఇట్లా గీసిన రేఖాపటం వృత్తం అవుతుందని విద్యార్థులు గుర్తించేటట్లు చేయాలి.

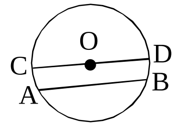
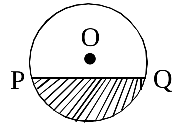
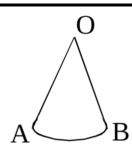
iii. పైన చెప్పిన విదంగా ఒక పొడవైనతాడు. ఒక చిన్న కట్టెపుల్ల సహాయంతో ఆట స్థలంలో ఒక వృత్తాకారపు ఆట స్థలాన్ని గుర్తించేటట్లు చేయాలి.

2. వృత్తంలోని భాగాలు కేంద్రం, వ్యాసం, వ్యాసార్థం, జ్యా, వృత్తఖండం, సెక్టర్‌లు గుర్తించడానికి తగిన కృత్యాలను విద్యార్థులతో చేయించాలి.

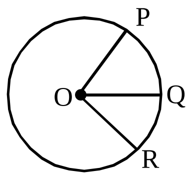
కృత్యం-1 ఒక కాగితం పై ఏదైనా వృత్తాకారపు వస్తువు సహాయంతో ఒక వృత్తాన్ని గీయాలి.

- దీన్ని అంచు వెంబడి కత్తిరించి మిగతా భాగం నుంచి వేరు చేయాలి.
- ఈ కత్తిరించిన వృత్తాకారాన్ని రెండు సమాన భాగాలుగా మడత పెట్టినచోట రేఖ ఆకారం ఏర్పడుతుంది.
- పై రేఖ వెంబడి కాకుండా ఈ వృత్తాకారాన్ని మరొకవిధంగా రెండు సమాన భాగాలుగా మడత పెట్టండి. దాన్ని విప్పి చూస్తే మరొక రేఖ ఆకారం కనిపిస్తుంది. ఈ రెండు రేఖలు ఒక బిందువు వద్ద ఖండించుకొంటాయి. ఈ బిందువును వృత్తాకేంద్రమంటామని గ్రహిస్తారు.
- ఏర్పడిన రేఖ పొడవులు సమానమని అలాగే ఈ రేఖలను వాసాలంటారని విద్యార్థులు గ్రహించగలరు.
- వ్యాసంలో సగం వ్యాసార్థం అంటారని విద్యార్థులు తెలుసుకొనేటట్లు చేయవచ్చు.

కృత్యం-2 వృత్తాకారపు పేపరును తగినవిధంగా మడతలు పెట్టడం ద్వారా కింది పట్టికలో చూపిన అంశాలు గ్రహించేటట్లు చేయవచ్చు.

వ.సం.	పటం పేరు	పటం
1	జూ జ్యాలు	
2	వృత్తఖండం	
3	సెక్టరు	

కృత్యం-3 ఒక సమాంతలంలో ఇచ్చిన ఒక బిందువు నుంచి సమాన దూరంలో బిందుపథాన్ని వృత్తం అంటారని గ్రహింపజేయడం. ఇందుకోసం వృత్తాకారపు పేపరుపై, వృత్త కేంద్రం నుంచి వృత్తపు అంచులపై గల బిందువుల దూరాలు సమానమని కొలిచి తెలుసుకొనేటట్లు చేయాలి.



పటంలో OP = OQ = OR అంటే

P,Q,R బిందువలు 'O' నుంచి సమాన దూరంలో ఉన్నాయి

కృత్యం-4 1) వృత్త పరిధి, వ్యాసానికి గల నిష్పత్తిని తెలుసుకోవడం.

2) వృత్త పరిధి సూత్రాన్ని రాబట్టడానికి కింది ఇచ్చిన కృత్యాన్ని విద్యార్థులతో చేయించాలి.

కావలసిన సామాగ్రి: వివిధ వ్యాసార్థాలు కలిగిన నాలుగు వృత్తాకారపు అట్టముక్కలుస స్కేలు, నూలు దారం

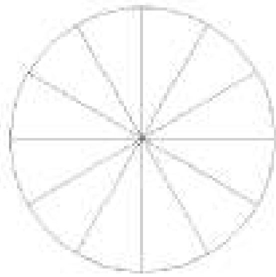
విధానం: కింది పట్టికలో చూపిన వృత్తాల చుట్టుకొలతలను దారం, స్కేలు సహాయంతో కొలిచి పట్టికను పూరించండి.

వ.సం	వృత్తం వ్యాసం	వృత్తం పరిధి	$\frac{\text{పరిధి}}{\text{వ్యాసం}}$
1	3.5 సెం.మీ.	-	-
2	4.2 సెం.మీ.	-	-
3	4.9 సెం.మీ.	-	-
4	5.0 సెం.మీ.	-	-
5	7 సెం.మీ.	-	-

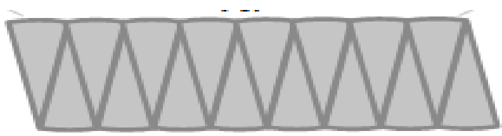
కృత్యం-5 : వృత్త వైశాల్యానికి సూత్రం రాబట్టడం ఇందు కోసం కింద ఇచ్చిన కృత్యాన్ని విద్యార్థులతో చేయించాలి.

కావలసిన సామాగ్రి: వృత్తాకారపు అట్టముక్కలు, స్కేలు

విధానం: కింది చూపిన విధంగా వృత్తాకారపు అట్టముక్కను కత్తిరించి వృత్త వైశాల్యానికి సూత్రం కనుక్కోండి.



కత్తిరించిన ముక్కలను పటంలో చూపిన విధంగా పేర్చండి.



r ప్రమాణాలు

πr ప్రమాణాలు

ఏర్పడిన ఆకారం దీర్ఘచతురస్రాన్ని పోలి ఉంటుంది. దాని పొడవు

$$\frac{2\pi r}{2} = \pi r \text{ ప్రమాణాలు}$$

వెడల్పు = r ప్రమాణాలు అవుతుంది.

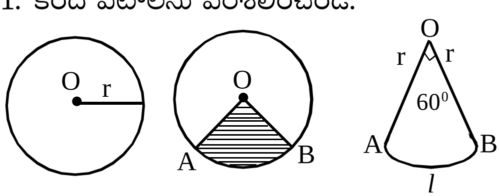
ఏర్పడిన ఆకారవైశాల్యం = $\pi r \times r = \pi r^2$ చ.ప్ర. అవుతుంది.

అది వృత్త వైశాల్యానికి సమానం అవుతంది.

కాబట్టి వృత్త వైశాల్యం (A) = πr^2 చ.ప్ర.

కృత్యం–6: సెక్టారు వైశాల్యానికి సూత్రం రాబట్టడం ఇందుకోసం కింది పద్ధతిలో సెక్టారు వైశాల్యానికి సూత్రం విద్యార్థులు గ్రహించేటట్లు చేయవచ్చు.

1. కింది పటాలను పరిశీలించండి.



l = సెక్టర్ చాపాలు

r = వ్యాసార్ధం

α^0 = సెక్టారు కోణం

సెక్టారు

పై పటాల్ని పరిశీలిస్తే సెక్టరు కేంద్రం వద్ద కోనానికి దాని వైశాల్యానికి సంబంధం గ్రహించవచ్చు. సెక్టరు కేంద్రం వద్ద కోణం పెరిగితే, వ సెక్టరు వైశాల్యం కూడా పెరుగుతుంది.

సెక్టరు కోణం = 360^0 అయితే అది వృత్త వైశాల్యానికి సమానం

కాబట్టి 360^0 కోణం ఉన్నపుడు సెక్టరు వైశాల్యం = πr^2 చ.ప్ర.

1^0 కోణం ఉన్నపుడు సెక్టరు వైశాల్యం = $\frac{\pi r^2}{360}$ చ.ప్ర.

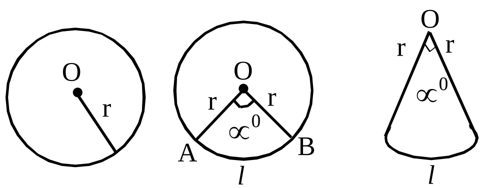
α^0 కోణం ఉన్నపుడు సెక్టరు వైశాల్యం = $\frac{\pi r^2}{360} = (a)^0$ చ.ప్ర.

కాబట్టి

సెక్టరు కోణం α^0, సెక్టరు వ్యాసార్థం = r ప్రమాణాలు అయినప్పుడు

సెక్టరు వైశాల్యం $A = \frac{\alpha}{360} \times \pi r^2$ అవుతంది.

2. కింది పటాలను పరిశీలించండి.



పటంలో సెక్టరు కేంద్రం వద్ద కోణం = α^0

సెక్టరు వ్యాసార్థం = r ప్ర

సెక్టరు చాపం పొడవు = ?ప్ర

పటాలను పరిశీలిస్తే కేంద్రం వద్ద కోణం పెరిగితే ఆ సెక్టరు చాపం పొడవు పెరుగుతుంది. కేంద్రం వద్ద కోణం = 360^0లు అయితే చాపం పొడవు వృత్త పరిధికి సమానం.

కాబట్టి 360^0 కోణానికి చాపం పొడవు = $2\pi r$

$1^{\ 0}$ కోణానికి చాపం పొడవు = $\frac{2\pi r}{360}$

$\propto^0$ కోణానికి సెక్టరు చాపం పొడవు = $\frac{2\pi r}{360}\times\alpha$

కాబట్టి

ఒక సెక్టారు కేంద్రం వద్ద కోణం = α^0

చాపం పొడవు = l ప్రమాణాలు, సెక్టారు వ్యాసార్ధం = r

అయితే సెక్టారు చాపం పొడవు (l) $=\frac{\alpha}{360}\times 2\pi\, r$

అలాగే $\propto=\frac{360l}{2\pi\, r}$

సెక్టారు వైశాల్యం $=A=\frac{\propto}{360}\times\pi\, r^2$

$360l$

$$=\frac{2\pi r}{360}\times\pi\, r^2$$

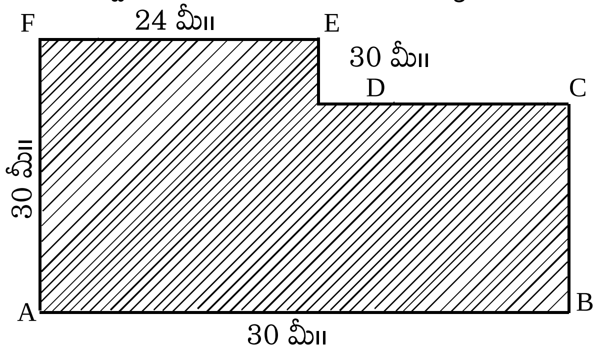
$$=\frac{360}{2\pi r}\times\frac{1}{360}\times\pi\, r^2$$

$$=\frac{lr}{2}$$

కాబట్టి సెక్టార్టు చాపం = L, వ్యాసార్ధం = r గా గల సెక్టారు వైశాల్యం $(A)=\frac{lr}{2}$ అవుతుంది.

అభ్యాసం - (బి)

1. ఒక చతురస్ర భుజం 12 సెం.మీ. దాని వైశాల్యం, చుట్టుకొలతలను కనుక్కోండి.
2. ఒక చతురస్రం చుట్టుకొలత 280మీ. అయితే దాని వైశాల్యమెంత?
3. ఒక దీర్ఘచతురస్రం పొలం వైశాల్యం 8.75 హెక్టార్లు. దాని పొడవు 35.మీ. అయితే దాని చుట్టుకొలత ఎంత?
4. 100మీ. భుజం గల చతురస్రం ఉంది. దాని చుట్టూ కొలతకు సమానమైన చుట్టకొలతగల దీర్ఘచతురస్రం ఉంది. దీని పొడవు 125మీ. వాటి వైశాల్యాల నిష్పత్తి కనుక్కోండి.
5. కింద ఇచ్చిన పటంలో గీతల భాగం వైశాల్యం ఎంత?



6. ఒక ఆటస్థలం వృత్తాకారంగా ఉంది. దాని వ్యాసార్థం 35మీ. దాని చుట్టూ కంచె వేయడానికి మీటరుకు రూ. 20 వంతున ఎంత ఖర్చు అవుతుంది?
7. ఒక వృత్తాకారపు స్థలం పరిధి 44మీ. అయితే చ.మీ. రూ. 2/– చొప్పున స్థలాన్ని చదును చేయడానికి ఎంతఖర్చు అవుతుంది?
8. ఒక సెక్టారు వైశాల్యం 924 చ.మీ. దాని వ్యాసార్ధం 42మీ. సెక్టారు చుట్టుకొలత ఎంత?

ప్రాజెక్టు పని

1. సమీపంలోని పొలాలు తోటకు సంబంధించి పరిమాణాన్ని తగిన సూచిక నిష్పత్తితో పటాలు గీసి, ఆ పటాలు వైశాల్యాలను చుట్టుకొలతలను లెక్కించండి.

2. మీ పాఠశాల గదులు, ఆటస్థలం, బడితోటకు సంబంధించి పరిమాణాన్ని తగిన సూచినక నిష్పత్తిలో పటం గీసి వైశాల్యాలు లెక్కించండి.
3. వృత్త వైశాల్యానికి సూత్రం రాబట్టడానికి పుస్తకంలో వివరించిన పద్ధతి కాకుండా వేరే పద్ధతిలో ప్రయత్నించండి.

2.2.3 త్రిపరిమాణ ఆకారాలు – ఉపరితల వైశాల్యం

ఘనాకారం:–

ఏదైనా ఒక వస్తువు లేక పదార్థం పొడవు, వెడల్పు, ఎత్తులు అనే మూడు కొలతలు కలిగి వున్న వస్తువులను ఘనాకారాలు అంటాం.

ఘనాకార వస్తువులు రెండు రకాలు

1. క్రమ ఘనాకారాలు
2. అక్రమ ఘనాకారాలు

జ్యామితి:

క్రమ ఘనాకారం: ఏదైనా ఒక వస్తువు పొడవు, వెడల్పు, ఎత్తుల కొలతలు ఖచ్చితంగా కలిగి వుంటే దానిని క్రమఘనాకార వస్తువు అంటారు. ఉదా: ఇటుక రాయి, గాజు దిమ్మ, అట్టపెట్టెలు, ఇనుప పెట్టెలు మొదలగునవి.

అక్రమ ఘనాకారం: ఏదైనా ఒక వస్తువు పొడవు, వెడల్పు, ఎత్తుల కొలతలు ఒకేవిధంగా లేకుండా ఉంటే వాటిని అక్రమఘనాకారాలు అంటాం ఉదా: ఒక రాయిముక్క, పగిలిన ఇటుకరాయి మొదలగునవి.

ఘనం:–

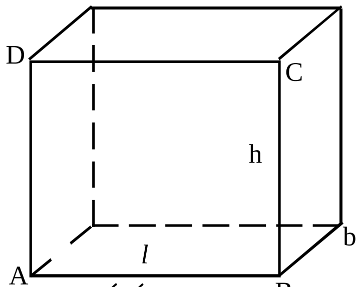
ఒక వస్తువు పొడవు, వెడల్పు, ఎత్తుల కొలతలు సమానంగా ఉంటే దానిని ఘనం అంటాం. ఉదా: పొడవు, వెడల్పు, ఎత్తులు సమానంగా ఉన్నటీ ప్యాకెటు లేక అట్ట పెట్టెలు, ఇనుప పెట్టెలు.

పటాన్ని గమనించండి.

ఘనం పొడవు = l యూ॥

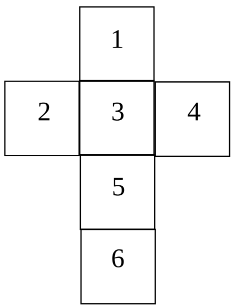
వెడల్పు = b యూ॥

ఎత్తు = h యూ॥



ఘనం

ఉపాధ్యాయుడు ఒక అట్టముక్క లేక కార్డుబోర్డు తీసుకుని పక్కపటంలో చూపిన విదంగా కత్తిరించి దానిని గీతల వెంట మడిస్తే ఘనం ఏర్పడుతుందని చూపించాలి. దీనిని ఆ ఘనం వల అంటామని చెప్పాలి. దానిని విద్యార్థులతో గమనింపజేసి తలాల సంఖ్య, మూలాలు, అంచులు ఎన్నెన్ని ఉన్నాయో ప్రశ్నిస్తూ జవాబు రాబట్టాలి.



పక్కతల వైశాల్యం:-

వివిధ పరిమాణాలు ఉన్న ఘనాలను తయారు చేయించి విద్యార్థులతో పక్కతలాల సంఖ్య, ఒక్కొక్క తల వైశాల్యం, తద్వారా పక్కతల వైశాల్యం లెక్కింపజేస్తూ, పక్కతల వైశాల్య సూత్రాన్ని అవగాహన పరచాలి. అదే విధంగా సంపూర్ణతల వైశాల్యాన్ని గురించి కూడా వివరించాలి.

పక్కతలాలు(4) అవి వరుసగా ABCD, BEFC, EFGH, GHAD

ఒక్కొక్క తల వైశాల్యం = భుజం × భుజం

= $a \times a = a^2$ చ॥యూనిట్లు

పక్కతల వైశాల్యం = $4 \times a^2 = 4a^2$. చ.యూ.

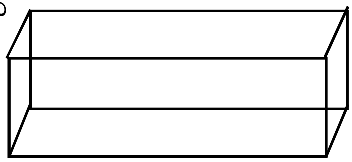
సంపూర్ణతల వైశాల్యం = పక్కతల వైశాల్యం + భూ వైశాల్యం + ఉపరితల వైశాల్యం

= $4a^2 + a^2 + a^2 = 6a^2$ చ॥యూనిట్లు

ఘన పరిమాణం = పొ × వె × ఎ

= a x a x a = a^3 ఘ.యూ.

గమనిక: దీర్ఘఘనము పొడవు *l*, వెడల్పు b, ఎత్తు h అయిన దానిపక్కతల వైశాల్యం 2h(l+b) చ.యూ, సంపూర్ణతల వైశాల్యం= 2(*l*b+bh+lh) చ.యూ, ఘనపరిమాణము = *l*bhఘ.యూ. అని రాబట్టండి.



స్థూపం:

పక్కతలం వక్రంగా వుండి, ఉపరితలం, భూమి సమాంతరంగా సమాన వృత్తాలు కలిగివున్న వస్తువును స్థూపం అంటారు. దీనినే క్రమ స్థూపం అంటారు.

ఉదా: గుండ్రని రేకుడబ్బా, గుండ్రని టిపిన్‌బాక్సు, గుండ్రని అట్టపెట్టె, గుండ్రనిస్తంబం మొదలైనవి.

ఉపరితలం, భూమి, సమాంతరంగా లేని సమానంగా లేని స్థూపాలను అక్రమాకార స్థూపం అంటారు.

పక్కతల వైశాల్యం:

ఒక దీర్ఘచతురస్రాకార కార్డు బోర్డు లేక పలుచని అట్టముక్కను, దాని పొడవు వెంబడి మడిచి రెండు వెడల్పులు ఒకదానికొకటి ఏకీభవించేట్లు చేసిన స్తూపం ఏర్పడుతుంది.

దీర్ఘచతురస్ర వైశాల్యమే, ఆస్తూపం వక్రతల లేదా పక్కతల వైశాల్యమని అవగాహన పరచాలి. దీ.చ. పొడవు స్తూపం భూపరిధిగా వెడల్పు దాని ఎత్తుగా మార్పు చెందాయని ప్రదర్శించాలి.

స్తూపం పక్కతల వైశాల్యం = దీర్ఘచతురస్ర వైశాల్యం

= దీ.చ. పొడవు × వెడల్పు

= స్తూపం భూ చుట్టుకొలత × ఎత్తు

= $2\pi r \times h$

= $2\pi r h$ చ.యూ.

స్థూపం సంపూర్ణతలవైశాల్యం = స్థూపం ప్ర.వై + భూ.వై + ఉపరితల వైశాల్యం

$= 2\pi r h + \pi r^2 + \pi r^2$

$= 2\pi r h + 2\pi r^2 = 2\pi r(h+r)$ చ.యూ.

స్థూపం ఘన పరిమాణం = భూ వైశాల్యం × ఎత్తు

$= \pi r^2 \times h$

$= \pi r^2 h$ ఘ.యూ.

శంకువు:

విద్యార్థులు రోజూ బయట గమనించే విషయాలను వారి దృష్టికి తీసుకువస్తూ శంకువు అంటే ఏమిటి? అవహగాహనపరచవచ్చు. ఉదాహరణకు ఇసుక కుప్ప, ధాన్యం కుప్ప, ఐస్ క్రీమ్‌కోన్, బోర్లించిన గరాటు ఎలా ఉంటాయని ప్రశ్నిస్తూ గుడారం లేదా పూరిగుడిసె పై కప్పు మాదిరిగా ఉంటాయని, వాటినే శంకువు ఆకారాలు అంటారని విద్యార్థులకు తెలియజేయాలి క్యారెటు కూడా శంకువు ఆకారమే అని గుర్తు చేయాలి.

బంకమున్నుతో పటంలో చూపిన విధంగా శంకువు ఆకారం చేయవచ్చు.

లేదా

పలుచని కార్చుబోర్డు లేదా అట్టముక్కను వృత్తాకారంగా కత్తిరించి, దానిని పటంలో చూపిన విధంగా రెండు సెక్టార్లుగా విభజించి, ఒక సెక్టారును దాని రెండు వ్యాసార్ధాలు కలిసినట్లు మడచిన శంకువు ఏర్పడటాన్ని గమనించండి.

శంకువు పక్కతలం వక్రంగాను, భూమి గుండ్రంగాను ఉంటుందని గమనింపచేయాలి. శంకువు పటాన్ని చూపుతూ దానికి మూడు కొలతలు ఉంటాయని తెలపాలి.

భూ వ్యాసార్ధం = r

నిలువుటెత్తు = h

ఏటవాలు ఎత్తు = l

శంకువు పక్కతల వైశాల్యం:

సెక్టారు ఆకారంలో ఉండే కార్డుబోర్డును మడచి రెండు వ్యాసార్ధాలు కలిపితే ఏర్పడే ఆకారం శంకువు అని తెలుసుకున్నారు గదా! ఆ విధంగా వ్యాసార్ధాలను కలిపితే ఏర్పడిన శంకువులో వృత్త వ్యాసార్ధం శంకువు ఏటవాలు ఎత్తుగా, సెక్టారు చాపం శంకువు భూ పరిధిగా మారాయని చూపాలి. శంకువు వక్రతలాన్నే పక్కతలమంటారని, ఆ సెక్టారు వైశాల్యమే శంకువు పక్కతల వైశాల్యమని వివరించాలి.

శంకువు పక్కతల వైశాల్యం = సెక్టారు వైశాల్యం

$\frac{n}{360}\times\pi r^2$ చ.యూ. ఇక్కడ n సెక్టారు చాపం కేంద్రం వద్ద చేసే కోణం దీనినే సెక్టారుకోణమంటారు.

లేదా

= $\frac{1}{2}$ × సెక్టారు చాపం × వ్యాసార్ధం (సెక్టారు వ్యాసార్ధం)

లేదా

= $\frac{1}{2}\times 2\pi r l = \pi r l$ చ.యూ. (సెక్టారు కలిగిన వృత్త వ్యాసార్ధం)

శంకువు సంపూర్ణతల వైశాల్యం

= శంకువు పక్కతల వైశాల్యం + భూవైశాల్యం

= $\pi r l + \pi r^2$

= $\pi r (l + r)$ చ.యూ.

శంకువు ఘనపరిమాణాన్ని కనుక్కోవడం:

ఒకే ఎత్తు, ఒకే భూ వ్యాసార్ధం ఉన్న శంకువు బరువు, స్థూపం బరువులో3వ వంతు ఉండటాన్ని గమనించండి లేదా ఒక శంకువు భూ వ్యాసార్ధం, ఎత్తులతో సమాన భూ వ్యాసార్ధం, ఎత్తుగల (లోపలి కొలతలు) స్థూపాన్ని చేసుకోండి. శంకువు నిండ మొత్తం ఇసుక లేక నీరు తీసుకొని స్థూపంలో మూడు సార్లు పోస్తే స్థూపం పూర్తిగా నిండుతుంది. అంటే శంకువు పూర్తిగా నిండుతుంది.

అంటే శంకువు ఘనపరిమాణం స్థూపం ఘనపరిమాణంలో $\frac{1}{3}$ వ భాగమని తెలుస్తోంది.

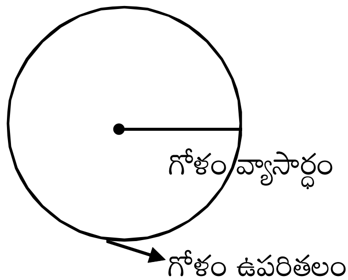
శంకువు ఘన పరిమాణం = $\frac{1}{3}$ స్థూపం ఘనపరిమాణం

$$= \frac{1}{3} \times \pi r^2 h \text{ ఘ.యూ}$$

ఇక్కడ r = శంకువు భూ వ్యాసార్థం, h = శంకువు నిలువుటెత్తు

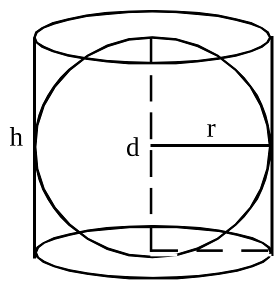
గోళం:

విద్యార్థులు రోజూ ఆడుకునే కొన్ని ఆట వస్తువులు ఉదాహరణకు గోలీలు, బంతులు, గుండ్రని గాలి బుగ్గలు. మొదలగునవి చూపుతూ ఇటువంటి గుండ్రని ఆకారాన్ని గోళం అని అంటారని తెలపాలి.



గోళానికి ఒకే ఒక కొలత ఉంటుంది. అది దాని వ్యాసార్థం అని చూపాలి.

గోళము పైనున్న గుండ్రని ఉపరితలాన్నే దాని పక్కతలమని లేక వక్రతలమని, సంపూర్ణతలమని అదే దాని పక్కతల వైశాల్యం లేదా సంపూర్ణతల వైశాల్యం అని చూపాలి.



గోళము పక్కతలవైశాల్యం లేదా సంపూర్ణతల వైశాల్యం లేదా ఉపరితల వైశాల్యం గోళం వ్యాసార్థంతో సమాన వ్యాసార్థం, గోళం వ్యాసంతో సమానమైన ఎత్తు ఉన్న స్థూపం పక్కతల వైశాల్యానికి సమానమని ప్రయోగపూర్వకంగా నిరూపించవచ్చు.

పటంలో చూపినట్లుగా గోళం వ్యాసార్థంతో సమాన వ్యాసార్థం, గోళం వ్యాసంతో సమాన ఎత్తున ఉన్న స్థూపంలను తీసుకోండి.

గోళం వ్యాసార్ధం r = స్థూపం వ్యాసార్ధం r

గోళ వ్యాసం d = స్థూపం ఎత్తు h

స్థూపం పక్కతలాన్ని ఒక రంగు కాగితంతో మూయండి. దానిని నెమ్మదిగా తొలగించి గోళం ఉపరితలంపై అతికించండి. స్థూపం పక్కతలంలో ఉన్న రంగు కాగితాన్ని గోళం ఉపరితలం మూయడానికి సరిపడుతుందని గమనించండి.

గోళం ఉపరితల వైశాల్యం $= 2\pi r \times h$ (స్థూపం ప్రక్కతల వైశాల్యం)

$= 2\pi r \times 2r$ (స్థూపం ఎత్తు = 2r = h)

$= 4\pi r^2$ చ.యూ.

గోళం ఘన పరిమాణం:

'r' వ్యాసార్ధం గల ఒక గోళం; 'r' వ్యాసార్ధం, 2r ఎత్తుగల ఒక స్థూపం, వ్యాసార్ధం ఎత్తు రెండునూ 'r' అయిన శంకువును తీసుకోండి. స్థూపాన్ని పూర్తిగా నీటితో నింపండి. శంకువుతో రెండుసార్లు నీటిని ఆ స్థూపం నుంచి తీసివేసి మిగిలిన నీటిని గోళంలో పోయండి. అప్పుడు మిగిలిన నీటితో గోళం పూర్తిగా నిండటం గమనించండి. అంటే

గోళం ఘనపరిమాణం $= \pi r^2.2r - 2\times\frac{\pi}{3}r^2.r$ (గోళం వ్యాసార్ధం = r)

$= 2\pi r^3 - \frac{2}{3}\pi r^3$ (స్థూపం ఎత్తు $h = 2r$, శంకువు ఎత్తు)

$= \frac{4}{3}\pi r^3$ ఘ.యూ.

గమనిక:– శంకువు ఎత్తు, గోళం వ్యాసార్ధం సమానమయ్యేట్లు తీసుకుని గోళాన్ని అనేక శంకువుల మొత్తంగా ఊహించండి. దాని నుండి గోళం ఘనపరిమాణం రాబట్టండి.

2.2.4 నిర్మాణాలు

పరిచయం:

జ్యామితిలో నిర్మాణం అంటే జ్యామితి పటాలను వాటి పరికరాలైన స్కేలు, వృత్తలేఖినిలతో కొలతల ప్రకారం కచ్చితమైన పటాలు గీయడం.

జ్యామితీయ నిర్మాణాలు చేపట్టడంలో పెంపొందించవలసిని నైపుణ్యాలు

1. వివిధ గణితోపకరణాలను సక్రమంగా వినియోగించడం
2. దత్తాంశానికి తగిన ఉపకరణాన్ని ఎన్నుకోవడం
3. గణితోపకరణాలతో తీసుకునే కొలతలు, కచ్చితంగా, త్వరగా తీసుకోవడం
4. ప్రతి ఉపకరణాన్ని వీలైనన్ని విధాలుగా ఉపయోగించడం
5. గణిత ఉపకరణాలను ఉపయోగించడంలో తగిన జాగ్రత్తలు తీసుకోవడం
6. ఇచ్చిన కొలతలను తగినవిధంగా పటాలు గీయడం
7. చిత్రపటాలను, రేఖా చిత్రాలను సరైన పరిమాణానికి (Scale) గీయడం
8. చిత్రపటాలను రేఖా చిత్రాలను సరిగ్గా, త్వరగా, కచ్చితంగా గీయడం
9. పటాల్లోని భాగాలను విపులంగా నమోదు చేయడం.

జ్యామితీయ నిర్మాణంలోని సోపానాలు :-

దత్తాంశం :

సారాంశం :

వివరణ :

చిత్తు పటం :

నిర్మాణం :

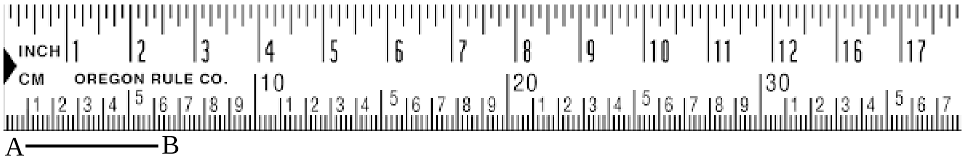
ఉపపత్తి / సరిచూడటం :

రేఖా ఖండాన్ని నిర్మించడం:

5 సెం.మీ. పొడవు గల రేఖా ఖండాన్ని ఈవిధంగా నిర్మిద్దాం.

* కాగితం పై 'A' అనే బిందువును గుర్తించండి.

* స్కేలు పై 'O' గుర్తును బిందువు 'A' కు ఎదురుగా ఉంచండి.



* స్కేలు పై 5 సెం.మీ. గుర్తు వద్ద కాగితం పై మరొక బిందువు 'B' ని గుర్తించండి.

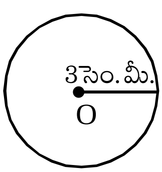
* A,B లను కలుపుతూ స్కేలు అంచు వెంబడి పెన్సిల్‌తో గీతను గీయండి. ఇప్పుడు ఏర్పడిన రేఖాఖండం పొడవు 5 సెం.మీ లేదా $\overline{AB}$ = 5 సెం.మీ.

వృత్తం నిర్మించడం (బిందువు, వ్యాసార్ధం ఇచ్చినప్పుడు)

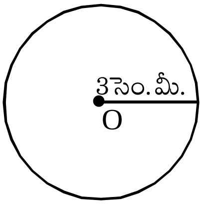
దత్తాంశం : వృత్త కేంద్రం 'O', వ్యాసార్ధం 3 సెం.మీ

సారాంశం : 'O' కేంద్రంగా 3 సెంటీమీటర్ల వ్యాసార్ధంతో వృత్తం నిర్మించడం.

చిత్తు పటం



నిర్మాణం, నిర్మాణక్రమం :-



* 'O' బిందువును గుర్తించండి.

* స్కేలు పై వృత్త లేఖినితో 3సెం.మీ. వ్యాసార్ధాన్ని గుర్తించండి.

* 'O' కేంద్రం పై వృత్తలేఖిని పాదాన్నుంచి పెన్సిల్ మొనను చుట్టు తిప్పితే వృత్తం ఏర్పడుతుంది.

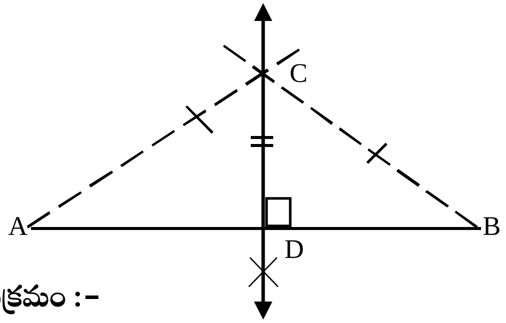
రేఖా ఖండాన్ని లంబ సమద్విఖండన చేయడం:

దత్తాంశం : AB ఒక రేఖా ఖండం

సారాంశం : AB ను 'O' వద్ద సమద్విఖండన చేయడం. AO=OB అని చూపాలి.

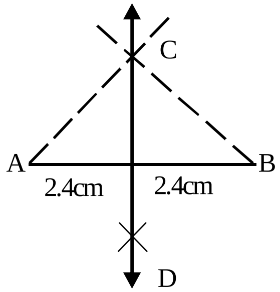
వివరణ :

* దత్తరేఖా ఖండాన్ని సమద్విఖండన చేయడానికి, లంబ సమద్విఖండన రేఖ గీయాలి.
* రేఖా ఖండం తుది బిందువులకు సమాన దూరంలో చలించే బిందు పదమే, ఆ రేఖాఖండం లంబసమద్విఖండన రేఖ అవుతుంది. లంబకోణం, కర్ణం, భుజం (లం.క.భు) నియమం. ఈ నియమాన్ని ఉపయోగించి AO=OB అని నిరూపించవచ్చు.



నిర్మాణం, నిర్మాణక్రమం :-

* AB రేఖాఖండాన్ని స్కేలు సహాయంతో గీయాలి.
* వృత్తలేఖిని సహాయంతో కొంత వ్యాసారం. (ABలో సగం కంటే ఎక్కువ) తీసుకోవాలి.
* దానితో A నుంచి AB కు రెండువైపులా రెండు చాపాలు గీయాలి.
* అదే వ్యాసార్థంతో B నుంచి ఇంకో రెండు చాపాలు గీసి, ఖండన బిందువులు C,D లను గుర్తించాలి.
* C,D లను కలపాలి.
* $\overleftrightarrow{CD}$ రేఖ $\overleftrightarrow{AB}$ కు లంబ సమద్విఖండన రేఖ అవుతుంది.



ఉపపత్తి :-

$\Delta AOC, \Delta BOC$ లలో

AC = BC (చాపాల వ్యాసార్ధాలు)

OC = OC (సామాన్య భుజం)

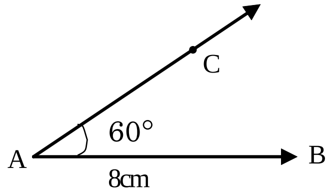
$\angle AOC = \angle BOC = 90^0$

$\therefore \Delta AOC = \Delta BOC$ (లం.క.భు)

$\therefore AO = OB$

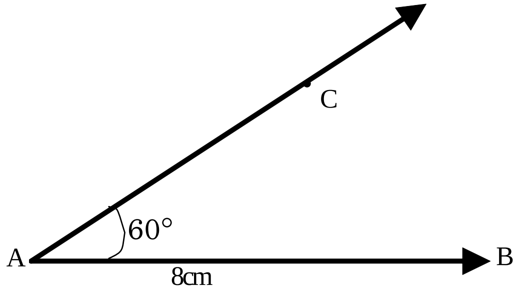
అంటే $\overline{CD}$ రేఖ $\overline{AB}$ రేఖాఖండాన్ని ‘O’ వద్ద సమద్విఖండన చేస్తుంది.

కోణమానిని ఉపయోగించి కోణం నిర్మించడం:-

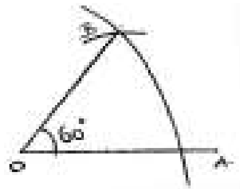


నిర్మాణం, నిర్మాణంక్రమం

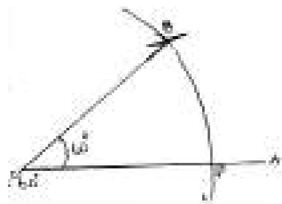
* $\overline{AB} = 8$ సెం.మీ. వుండేటట్లుగా ఒక రేఖాఖండాన్ని గీయాలి.
* 60^0 పెట్టి కోణమానితో కోణరేఖను గీయాలి.



వృత్తలేఖిని ఉపయోగించి 60^0, 120^0 కోణాలు గీయడం 60^0 కోణాన్ని గీయడం.



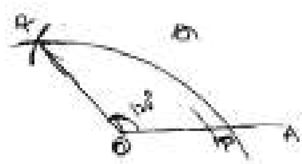
నిర్మాణం, నిర్మాణక్రమం :



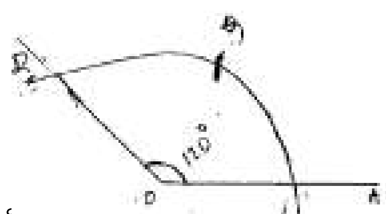
* $\overline{OA}$ ని గీయాలి.
* 'O' కేంద్రంగా, కొంత వ్యాసార్ధంలో మొదట చాపాన్ని $\overline{OA}$ ను P వద్ద ఖండించేటటు ఒక చాపాన్ని గీయాలి.
* P కేంద్రంగా అదే వ్యాసార్ధంతో మొదట చాపాన్ని B వద్ద ఖండించేటట్లు రెండో చాపాన్ని గీయాలి.
* $\overline{OB}$ ని గీయాలి.
* $\angle AOB = 60^0$

సరిచూడటం : $\angle AOB$ ని కోణమానితో కొలిచి $\angle AOB = 60^0$ ఉందని గమనించాలి.

120^0 కోణాన్ని గీయడం.



నిర్మాణం, నిర్మాణక్రమం :



* $\overline{OA}$ ని గీయాలి.
* O కేంద్రంగా అనుకూలమైన వ్యాసార్ధాంతో $\overline{OA}$ ను P వద్ద ఖండించేటట్టు ఒక చాపాన్ని గీయాలి.

* P కేంద్రంగా, అదే వ్యాసార్ధంలో మొదటి చాపాన్ని Q వద్ద ఖండించేటట్టు మరో చాపాన్ని గీయాలి.

* Q కేంద్రంగా అదే వ్యాసార్ధంతో మొదటి చాపాన్ని R వద్ద ఖండించేటట్టు ఇంకొక చాపాన్ని గీయాలి.

* $\overline{OR}$ ను గీయాలి.

* $\angle AOR = 120^0$

సరిచూడటం : $\angle AOR$ ను కోణమానితో కొలవాలి. $\angle AOR = 120^0$ అని గమనించాలి.

ఇచ్చిన కోణానికి సమాన కోణాన్ని నిర్మించడం:

దత్తాంశం : $\angle AOB$ ఒక కోణం

సారాంశం : $\angle AOB$కు సమానమైన మరొక కోణాన్ని నిర్మించడం

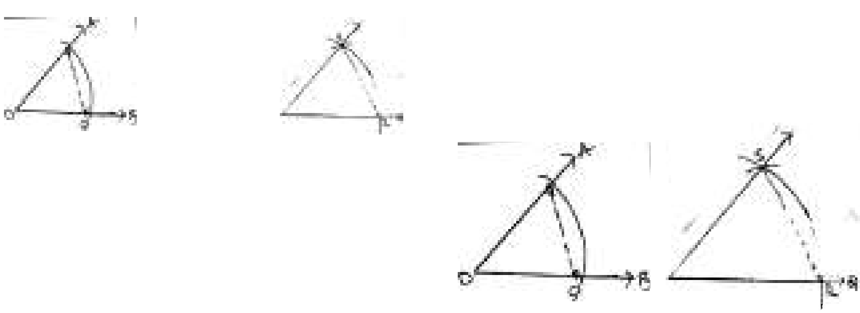
వివరణ : దత్తకోణానికి సమానమైన కోణాన్ని కింది నియమాల ఆధారంగా నిర్మించాలి.

* ఒకే వ్యాసార్ధం ఉన్న (సమాన) వృత్తాల్లో లేదా ఒకే వృత్తంలోని సమానజ్యాలు, సమాన చాపాలను ఖండిస్తాయి.

* సమాన వృత్తాల్లోని సమాన చాపాలు కేంద్రం వద్ద సమాన కోణాలు చేస్తాయి.

* సమాన వృత్తాల్లోని సమాన జ్యాలు కేంద్రం దగ్గర సమాన కోణాలు చేస్తాయి.

* భుజం, భుజం, భుజం సర్వసమాన నియమం.



* $\overline{PQ}$ కిరణం గీయాలి.

* 'O' నుంచి కొంత వ్యాసార్ధంతో (ఇచ్చిన) దత్తకోణం $\angle AOB$ మీద ఒక చాపరేఖను గీయాలి.

* అది $\overline{OB}$ కిరణాన్ని C వద్ద $\overline{OA}$ కిరణాన్ని D వద్ద ఖండిస్తుంది.

* అదే వ్యాసార్ధంతో 'P' నుంచి $\overrightarrow{PQ}$ కిరణాన్ని 'R' వద్ద ఖండించేటట్లుగా ఒక చాపాన్ని గీయాలి.

* దత్తకోణంలోని $\overline{CD}$ చాపం పొడవును వృత్తలేఖినితో కొలిచి, అదే కొలతతో R నుంచి $\overrightarrow{PQ}$ కిరణం పై గీసిన చాపాన్ని 'S' వద్ద ఖండించాలి.

* P,S లను కలిపి పొడిగించాలి.

* ఇప్పుడు SPQ కోణం, AOB కోణానికి సమాన కోణంగా ఏర్పడడాన్ని గమనించాలి.

ఉపపత్తి :

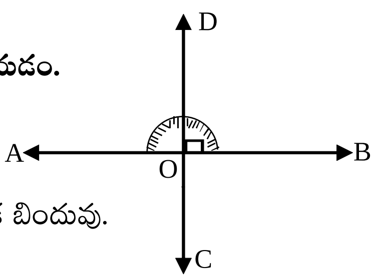
* $\Delta DOC, \Delta SPR$ నియమం ప్రకారం సర్వసమానం.

  $\therefore \angle SPR = \angle AOB$

* కోణం $\angle SPQ$ ను, కోణం $\angle AOB$ పైన ఉంచితే అవి రెండు ఒకదానితో ఒకటి ఏకీభవిస్తాయి.

* కాబట్టి $\angle SPQ = \angle AOB$

ఇచ్చిన రేఖకు దానిపైన ఇచ్చిన బిందువు వద్ద లంబాన్ని గీయడం.



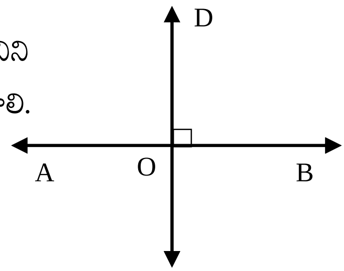
మొదటి పద్ధతి : కోణమానిని ఉపయోగించి

దత్తాంశం : $\overleftrightarrow{AB}$ ఒక దత్తరేఖ AB పై 'O' ఒక బిందువు.

సారాంశం : $\overline{AB}$ కి O వద్ద లంబాన్ని గీయడం

నిర్మాణం, నిర్మాణక్రమం :

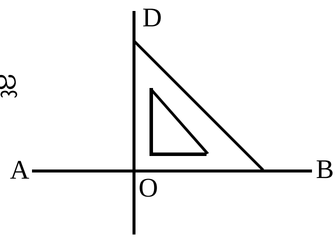
* $\overleftrightarrow{AB}$ ని గీసి దానిపై O బిందువును గుర్తించాలి.
* కోణమానిని మధ్య బిందువు 'O' పై పడేటట్లు కోణమానిని వ్యాసం $\overleftrightarrow{AB}$ పై పడేటటు కోణమానిని $\overleftrightarrow{AB}$ పై ఉంచాలి.



* $\angle BOD = 90^0$ ఉండేటట్లు D బిందువును గుర్తించాలి.
* O,D లను కలపాలి.
* $\overleftrightarrow{OD} \perp \overleftrightarrow{AB}$

రెండో పద్ధతి (మూలమట్టాన్ని ఉపయోగించి) నిర్మాణ సోపానాలు:

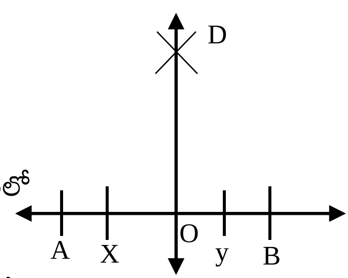
* $\overleftrightarrow{AB}$ ని గీసి దాని పై 'O' బిందువును గుర్తించాలి.
* మూలమట్టం లంబ అంచుల్లో ఒకదానిని $\overleftrightarrow{AB}$ పై పడేటట్లు మూలమట్టాన్ని ఉంచండి. మూలమట్టం లంబకోణం శీర్షం 'O' పై పడేటట్లు చూడండి.



* మూలమట్టం రెండో లంబం అంచు వెంట $\overleftrightarrow{OD}$ ని గీయాలి.
* $\overline{OD} \perp \overline{AB}$

మూడో పద్ధతి (వృత్తిలేఖిని ఉపయోగించి) నిర్మాణ సోపానాలు:

* $\overline{AB}$ ని గీచి దాని పై 'O' బిందువును గుర్తించాలి.
* 'O' కేంద్రంగా అనువైన వ్యాసార్ధంలో రెండు చాపాలు ABని X,Y బిందువుల వద్ద ఖండించేటట్లు గీయాలి.



* 'X' కేంద్రంగా XY లో సగం కంటె ఎక్కువ వ్యాసార్ధంలో ఒక చాపాన్ని గీయాలి.
* 'Y' కేంద్రంగా, అదే వ్యాసార్ధంలో మొదటి చాపాన్ని 'P' వద్ద ఖండించేటట్లు వేరొక చాపాన్ని గీయాలి.
* O,P లను కలపాలి.

* $\overrightarrow{OP} \perp \overrightarrow{AB}$
* $\angle BOP = 90^0$ అని కోణమానితో కోణాన్ని కొలిచి సరిచూడాలి.

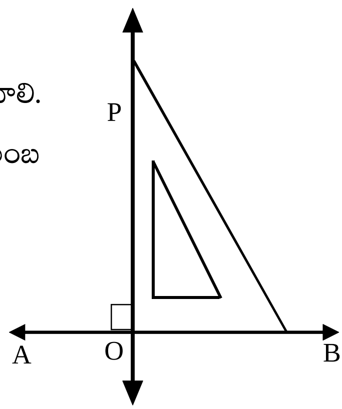
రేఖమీద లేని బిందువు నుంచి రేఖకు లంబం గీయడం

మొదటి పద్ధతి : మూలమట్టం ఉపయోగించి

దత్తాంశం : $\overline{AB}$ ఇచ్చిన రేఖ. AB రేఖ పై లేని బిందువు D

సారాంశం : రేఖ మీద లేని బిందువు D నుంచి $\overrightarrow{AB}$ కి లంబాన్ని గీయడం

నిర్మాణం, నిర్మాణక్రమం:



* $\overleftrightarrow{AB}$ ని గీసి, $\overleftrightarrow{AB}$ పై లేకుండా P బిందువును గుర్తించాలి.
* లంబకోణం గల ఒక అంచు AB పై పడేటట్లు, రెండో లంబ అంచు P ను తాకేటట్లు మూలమట్టాన్ని ఉంచండి.
* P ను తాకే అంచు వెంట 'PO' ను గీయాలి.
* $\overleftrightarrow{PO} \perp \overleftrightarrow{AB}$
* కోణమానినితో $\angle BOP$ ని కొలవాలి.

సరిచూడటం : కోణమానితో $\angle BOP$ ని కొలిచినప్పుడు $\angle BOP = 90^0$ అని గమనించాలి.

రెండో పద్ధతి : వృత్తలేఖిని ఉపయోగించి

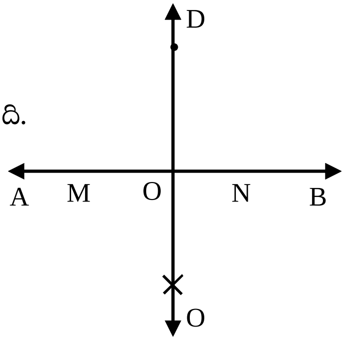
దత్తాంశం : $\overleftrightarrow{AB}$ ఇచ్చిన రేఖ అనుకోండి.

సారాంశం : రేఖ మీద లేని బిందువు నుంచి రేఖకు వృత్తలేఖిని ద్వారా లంబం గీయడం.

నిర్మాణం, నిర్మాణక్రమం:

* $\overleftrightarrow{AB}$ ని గీసి $\overleftrightarrow{AB}$ కి వెలుపల P బిందువును గుర్తించాలి.
* P కేంద్రంగా కొంత వ్యాసార్ధంతో, $\overleftrightarrow{AB}$ ని M,N ల వద్ద ఖండించేటట్లు చాపాలు గీయాలి.
* M కేంద్రంగా M,N లో సగం కంటే ఎక్కువ వ్యాసార్ధంతో P కి అవతలవైపు ఒక చాపం గీయాలి.

* N కేంద్రంగా అదే వ్యాసార్ధంతో మొదట చాపాన్ని 'Q' వద్ద ఖండించేట్టు ఇంకోక చాపాన్ని గీయాలి.
* P,Q లను కలపాలి. $\overleftrightarrow{PQ}$, $\overleftrightarrow{AB}$ ని 'O' వద్ద ఖండిస్తుంది.
* $\overleftrightarrow{PQ} \perp \overleftrightarrow{AB}$
* $\angle BDP$ ని నిలిచి, $\angle BOP = 90^0$ అని గమనించాలి.

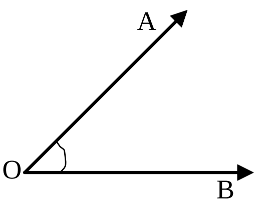


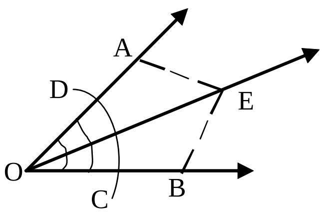
కోణం సమద్విఖండన చేయడం:

దత్తాంశం : $\angle AOB$ ఒక కోణం

సారాంశం : $\angle AOB$ ను సమద్విఖండన చేయడం $\angle AOE = \angle BOE$ అని చూపాలి.

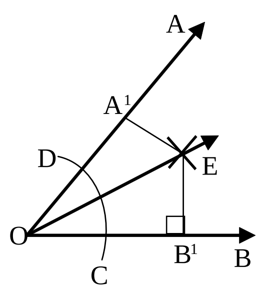
వివరణ : దత్త కోణాన్ని సమద్విఖండన చేయడానికి కోణ సమద్విఖండన రేఖ పైనున్న బిందువు ఆ కోణ భుజాలను సమాన దూరంలో ఉంటుందనే నియమాన్ని లం.క.భు. నియమాన్ని ఉపయోగించి నిరూపించాలి.





నిర్మాణం, నిర్మాణక్రమం:

* దత్తకోణం $\angle AOB$ ను నిర్మించాలి.
* 'O' నుంచి కొంత వ్యాసార్ధంతో $\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}$ లను C,Dల వద్ద ఖండించేట్లు ఒక చాపాన్ని గీయాలి.
* అదే వ్యాసార్ధంతో C,Dల నుంచి మరో రెండు చాపాలను, 'E' వద్ద ఖండించేటట్లు గీయాలి.
* O,E లను కలపాలి.
* $\overrightarrow{OE}$ రేఖ $\angle AOB$ కోణ సమద్విఖండన రేఖ అవుతుంది.
* E నుంచి $\overline{OA}$ కు లంబం A కు A గీయాలి.



ఉపపత్తి:

$\Delta OA'E, \Delta OB'E$ లంబకోణ త్రిభుజాలలో

OE = OE (సామాన్య భుజం)

A'E = B'E (లంబ దూరం)

$\Delta OA'E, \Delta OB'E = 90^0$

$\angle OAE \cong \angle OBE$ (లం.క.భు)

$\therefore \angle AOE = \angle BOE$

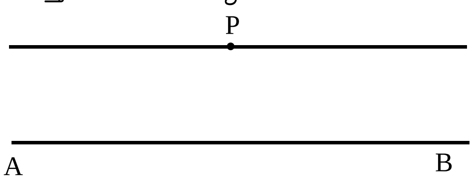
$\overline{OE}, \angle AOB$ కోణ సమద్విఖండన రేఖ.

ఒక రేఖకు దానిపై లేని బిందువు గుండా సమాంతర రేఖ గీయడం.

మొదటి పద్ధతి :

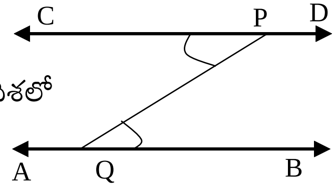
దత్తాంశం : దత్త సరళరేఖ ABకి 'P' బాహ్యబిందువు

సారాంశం : దత్త సరళరేఖ బాహ్యబిందువు 'P' గుండా సమాంతర రేఖను గీయడం.



నిర్మాణం, నిర్మాణక్రమం:

* $\overline{AB}$ సరళరేఖను గీయండి.
* $\overline{AB}$ పై 'Q' అనే బిందువు గుర్తించండి.
* P,Q లను కలపండి.
* $\angle PQB$ కోణానికి సమాన కోణాన్ని దానికి వ్యతిరేకదిశలో P వద్ద $\angle QPC$ ని నిర్మించండి.
* $\angle P$ ని D వరకు పొడిగించండి.



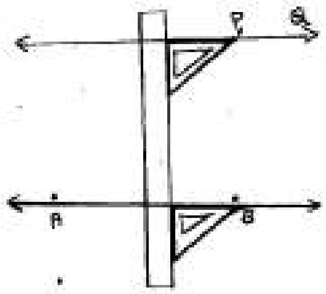
ఉపపత్తి:

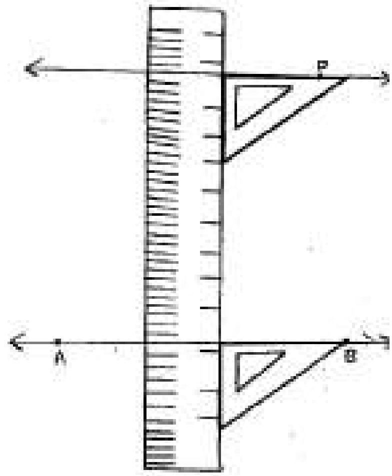
* $\angle PQB = \angle QPC$ (ఏకాంతర కోణాలు) సమానం కాబట్టి AB//CD అని గమనించండి.

రెండవ పద్ధతి :

దత్తాంశం : దత్త సరళరేఖ ABకి P బాహ్యబిందువు

సారాంశం : దత్త సరళరేఖ బాహ్యబిందువు P గుండా సమాంతర రేఖను గీయడం.





నిర్మాణం, నిర్మాణ సోపానాలు:

* $\overline{AB}$ ని గీసి P బిందువును $\overleftrightarrow{AB}$కి వెలుపల గుర్తించాలి.
* మూలమట్టం లంబ అంచుల్లో ఒక దానిని $\overleftrightarrow{AB}$ పై ఉంచాలి.
* రూలర్ అంచు మూలమట్టం అంచు వెంబడి ఉండేటట్లు, రూలర్‌ను పటంలో చూపినట్లు ఉంచాలి.
* రూలర్ ఈ స్థానంలో గట్టిగా పట్టుకొని, మూలమట్టాన్ని రూలర్ అంచు పై, మూలమట్టం రెండో అంచు ఇచ్చిన బిందువు P ని తాకేటట్లు జరపాలి.
* P బిదువును తాకే మూలమట్టం అంచు వెంట $\overleftrightarrow{PQ}$ ని గీయాలి.

ఉపపత్తి:

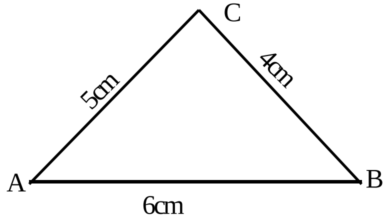
* $\overleftrightarrow{PQ} // \overleftrightarrow{AB}$

త్రిభుజంలో మూడు భుజాలిచ్చినప్పుడు త్రిభుజం నిర్మించడం.

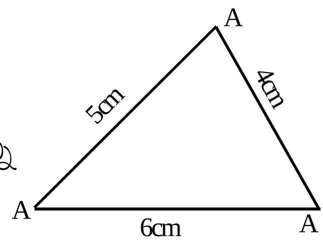
ఉదా : ΔABCలో AB = 6సెం.మీ, BC= 4 సెం.మీ, CA = 5 సెం.మీ ఉంటే ΔABC త్రిభుజం నిర్మించండి.

దత్తాంశం : ΔABCలో AB= 6 సెం.మీ, BC= 4సెం.మీ, CA= 5 సెం.మీ.

సారాంశం : ABC త్రిభుజం నిర్మించండి.



నిర్మాణం, నిర్మాణ క్రమం:



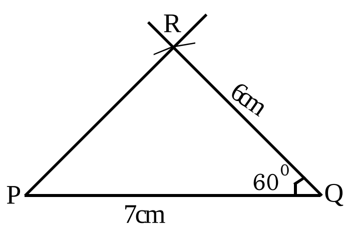
* $\overline{AB}$ = 6సెం.మీ ఉండేటట్లు ఒక రేఖాఖండాన్ని గీయాలి.
* 'A' నుంచి 5 సెం.మీ వ్యాసార్ధంతో ఒక చాపం గీయాలి.
* 'B' నుంచి 4 సెం.మీ వ్యాసార్ధంతో ఆ చాపాన్ని ఆ చాపాన్ని 'C' వద్ద ఖండించండి.
* AC,BC లను కలపాలి.
* ABC మనకు కావలసిన త్రిభుజం ఏర్పడుతుంది.

త్రిభుజంలో రెండు భుజాలు, ఒక కోణం ఇస్తే త్రిభుజం నిర్మించడం:

ఉదా : ΔPQR లో PQ= 7 సెం.మీ, QR= 6 సెం.మీ, $\angle PQR = 60^0$ కొలతలు గల PQR త్రిభుజం నిర్మించాలి.

దత్తాంశం : ΔPQR లో PQ= 7 సెం.మీ, QR= 6సెం.మీ, $\angle PQR = 60^0$

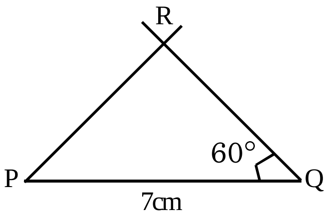
సారాంశం : ΔPQR నిర్మించడం



నిర్మాణం, నిర్మాణ క్రమం:

* $\overline{PQ}$ = 7 సెం.మీ పొడవు ఉన్న రేఖాఖండం గీయాలి.
* Q వద్ద 60^0 కోణరేఖను గీయాలి.

* Q నుంచి 6 సెం.మీ వ్యాసార్ధంతో ఆ కోణరేఖను 'R' వద్ద ఖండించాలి.
* P,R లను కలపాలి.
* PQR మనకు కావలసిన త్రిభుజం ఏర్పడుతుంది.

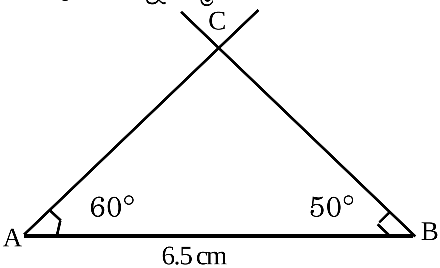


త్రిభుజంలో రెండు కోణాలు, వాటి మధ్య భుజాన్ని ఇస్తే త్రిభుజం నిర్మించడం.

ఉదా : ΔABCలో AB= 6.5 సెం.మీ, $\angle ABC = 50^0$, $\angle BAC = 60^0$ కొలతలు గల ABC త్రిభుజం నిర్మించాలి.

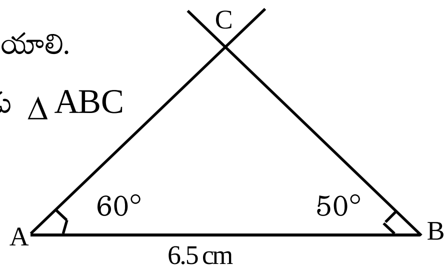
దత్తాంశం : ΔABC లో AB= 6.5 సెం.మీ, $\angle BAC = 60^0$సెం.మీ, $\angle ABC = 50^0$

సారాంశం : ABC త్రిభుజాన్ని నిర్మించడం



నిర్మాణం, నిర్మాణ క్రమం:

* $\overline{AB}$ = 6.5 సెం.మీ పొడవు ఉన్న రేఖాఖండం గీయాలి.
* కోణమానిని ఉపయోగించి A వద్ద 60^0 కోణాన్ని, B వద్ద 50^0 కోణాన్ని చేసే రెండు కోణరేఖలను గీయాలి.
* అవి రెండు 'C' వద్ద ఖండించుకొంటాయి. ఇప్పుడు Δ ABC కావలసిన త్రిభుజం ఏర్పడింది.



అభ్యాసం

ఈ క్రింది జ్యామితి పటాలు నిర్మించి నిర్మాణక్రమాన్ని రాయండి.

1) 6 సెం.మీ ల రేఖాఖండం

2) 2 సెం.మీ.ల వ్యాసార్ధం గల వృత్తం

3) 5 సెం.మీ.ల రేఖాఖండానికి లంబ సమద్విఖండన రేఖ

4) 45^0, 50^0, 90^0, 110^0 కోణాలు (కోణమానిని ఉపయోగించి)

5) AB = 3 సెం.మీ, BC = 4 సెం.మీ, AC = 5 సెం.మీ గల ΔABC

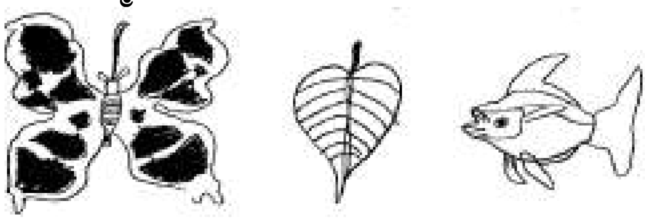
6) AB = 5 సెం.మీ, BC = 6 సెం.మీ, $\angle ABC = 70^0$ గల ΔABC

7) AB 5.5సెం.మీ, $\angle ABC = 70^0$, $\angle BAC = 60^0$ గల ΔABC

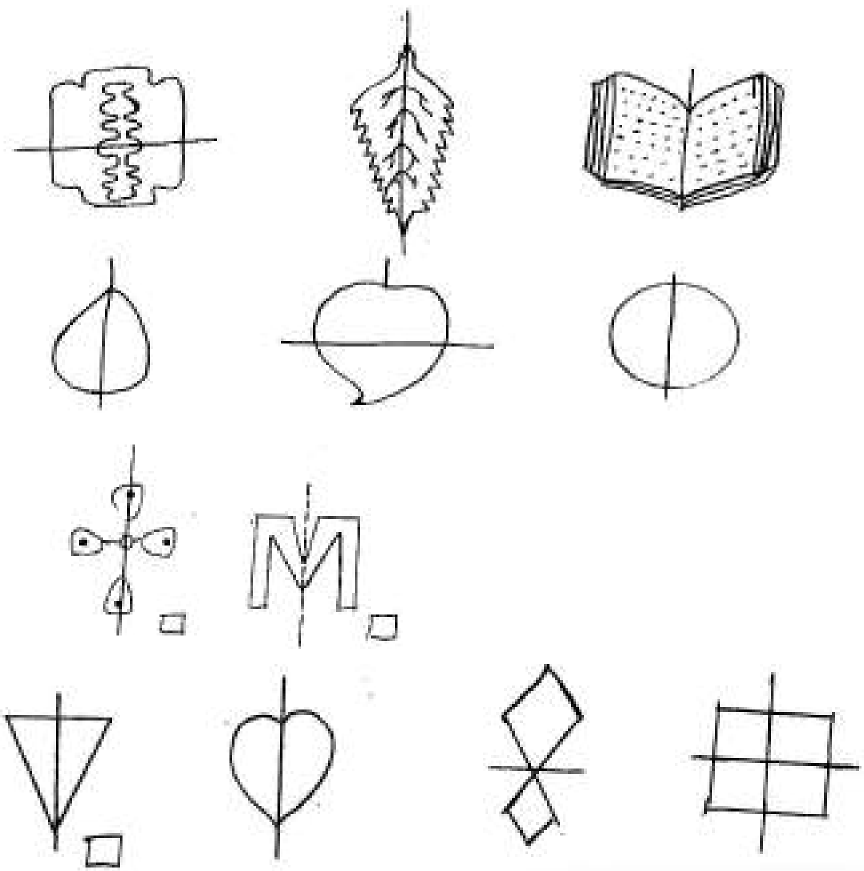
2.2.5 సౌష్ఠవం

ఒక పటాన్ని ఒక రేఖ వెంబడి మడిస్తే లేదా కత్తిరిస్తే ఆ రెండు భాగాలు ఒక దానితో ఒకటి ఏకీభవిస్తే, ఆ ఆకారం సౌష్ఠవంగా ఉందని అంటాం. అలాంటి రేఖను సౌష్ఠవాక్షం అంటారు. (లేదా) సౌష్ఠవ రేఖ అని అంటాం.

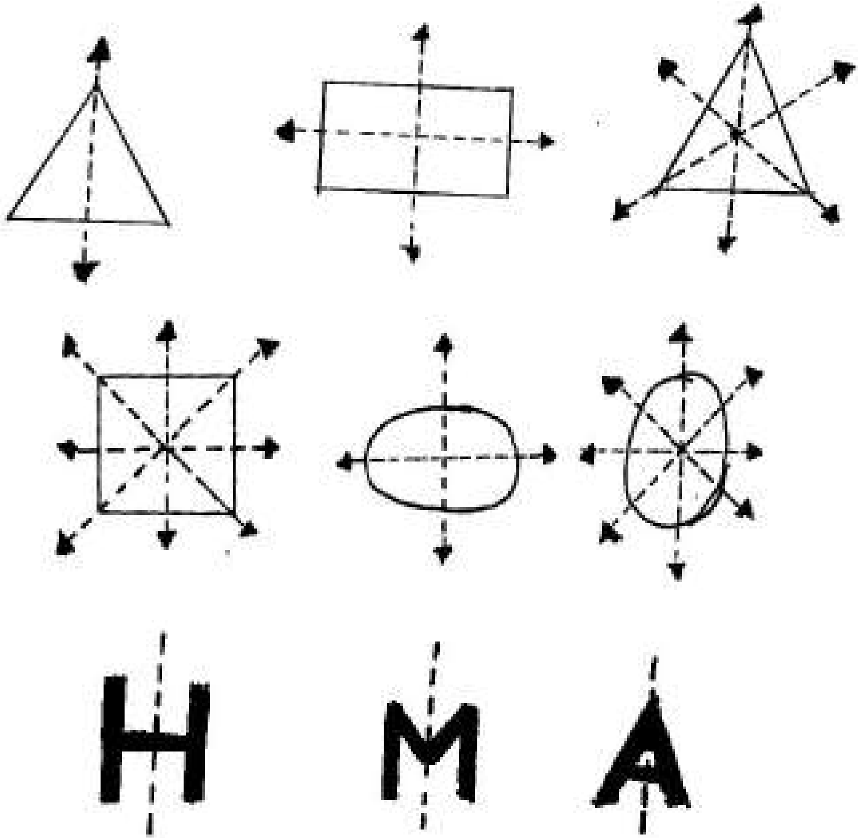
(1) కింది బొమ్మలను పరిశీలింపజేయడం



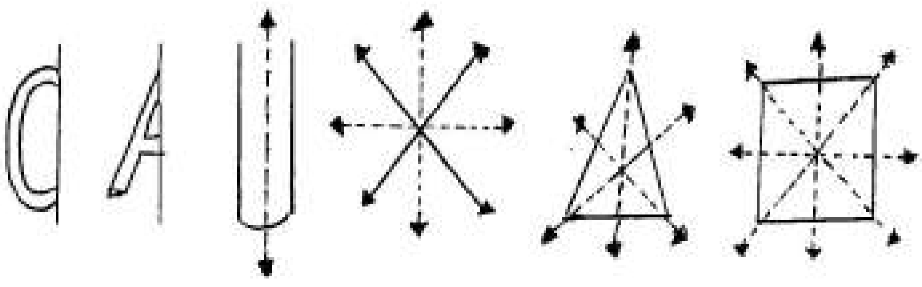
(2) కింది పటాలు పరిశీలింపజేసి సౌష్ఠవంగా ఉన్నవి లేనివి గుర్తించండి.

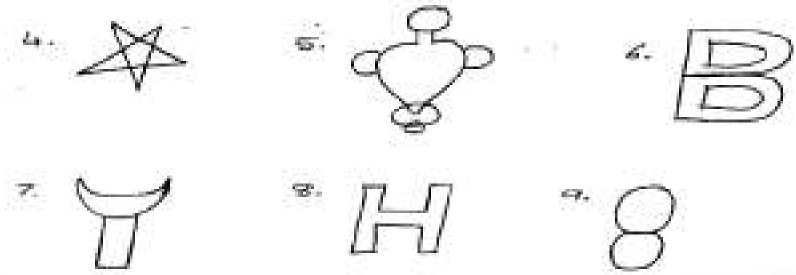


(3) కింది పటాలు పరిశీలింపజేసి సౌష్ఠవాక్షాలను గుర్తింపు చేయడం ద్వారా కొన్ని పటాలకు ఒకటి కంటె ఎక్కువ సౌష్ఠవాక్షాలు ఉంటాయని అవగాహన పరచడం.



(4) కింది పటాలకు వీలైనన్ని సౌష్ఠవాక్షాలు గీయించండి.





(5) సమద్విబాహు త్రిభుజం, సమబాహు త్రిభుజం, దీర్ఘచతురస్రం, చతురస్రాలకు ఎన్నెన్ని సౌష్ఠవాక్షాలుంటాయో ఆయా ఆకారాల కాగితాలను మడచడం ద్వారా గుర్తింపుచేయడం, పటాలు గీయంచడం.

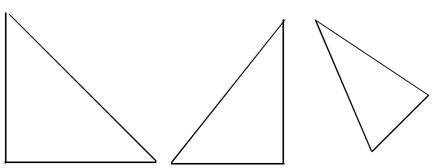
(6) వృత్తాకార కాగితాన్ని తీసుకుని, మడతలు ద్వారా దానికి ఎన్ని సౌష్ఠవాక్షాలు ఉంటాయో తెలుసుకునేటట్లు చేయడం, పటం గీయడం.

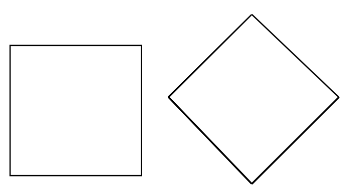
(7) సిరా చుక్కలతో ఏర్పడిన చిత్రాల్లో ఏవి సౌష్ఠవాలో ఏవి కావో నిర్ణయింపచేయడం.

2.2.7 సర్వసమానత్రిభుజాలు, చతుర్భుజాలు – వర్గీకరణ ధర్మాలు

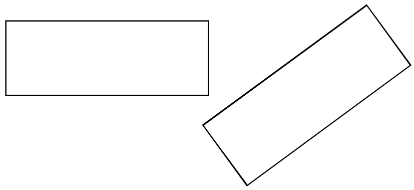
పరిచయం:

విద్యార్థులు రేఖాగణితంలో అనేక పటాలను గురించి చర్చించి నేర్చుకున్నారు. వివిధ పటాల ధర్మాలు, వాటి మధ్య ఉన్న సంబంధాలను గురించి క్రింది తరగతులలో చదివారు. ప్రతి రేఖాపటానికి ఒక ఆకారం పరిమాణ స్థానం అనే గుణాలు ఉంటాయి. రెండు పటాలను ఇచ్చి వాటిని పరిశీలించండి అన్నప్పుడు మొదట మనం చూసేది అన్ని ఒకే ఆకారంలో ఉన్నాయా!లేవా! ఒకే పరిమాణంలో ఉన్నాయా!లేవా! అనే విషయాలను గమనిస్తాం. ఏవైనా రెండు పటాలను ఒకే ఆకారం, పరిమాణం కలిగి ఉంటే అటువంటి పటాలను సర్వసమాన పటాలు అంటారు. అంటే రెండు పటాలు సర్వసమానమని నిరూపించడానికి ఒకదానిపై మరొకటి (super position) ఉంచి అవి ఏకీభవిస్తే అటువంటి పటాలను సర్వసమాన పటాలంటాం. ఉదాహరణకు క్రింది పటాలను గమనించండి.

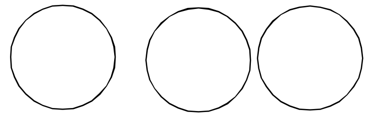
(1) 

(2) 

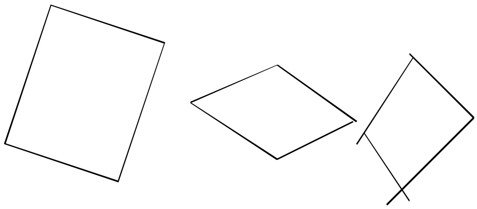
(3)



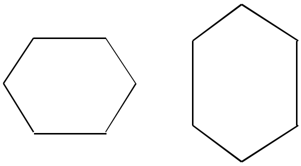
(4)



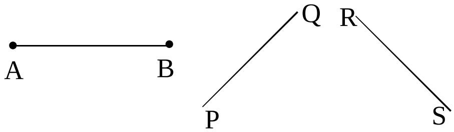
(5)



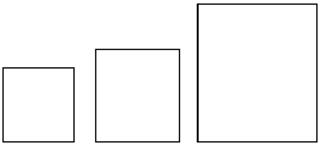
(6)



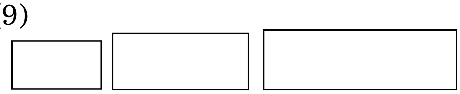
(7)



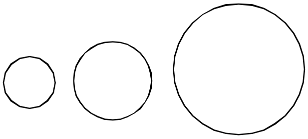
(8)



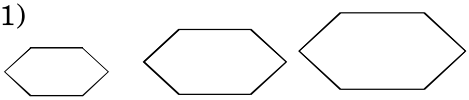
(9)



(10)



(11)



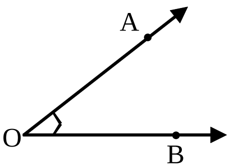
(1) నుంచి (7) వరకు వరుసక్రమంలో ఉన్న పటాలను సర్వసమాన పటాలని గమనించండి. అవి ఒకే ఆకారం, పరిమాణాలు కలిగి ఉన్నాయి. పటాలు(8) నుండి (9) వరకు ఉన్నవి సర్వసమాన పటాలు కావు. ఎందువల్లంటే అవి ఒకే ఆకారంలో ఉన్నా ఒకే పరిమాణంలో లేవు. అవి ఒకదానిపై మరొకదాన్ని ఉంచితే ఒకదానితో మరొకటి ఏకీభవించదు. అయితే అటువంటి వాటిని ఏమంటారు? ఒకే ఆకారం ఉండి, వివిధ పరిమాణాలతో ఉన్న పటాలను సరూప పటాలంటారు. (similar figures) సరూప భావనను తరువాత చర్చిద్దాం.

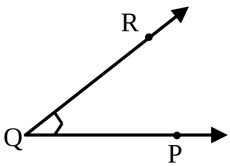
సర్వసమాన పటాలను పోల్చడం:

రెండు సర్వసమాన రేఖా ఖండాలు:

ఈ రేఖాఖండాలు ఒకదానిపై మరొకటి ఉంచినపుడు A,C తోను, B,D తోను ఏకీభవిస్తుంది. లేదా A,D తోను B,C తోను ఏకీభవిస్తుంది. అంటే రెండు రేఖాఖండాలు ఒకే పొడవు కలిగివున్నాయి. ఏదైనా రెండు రేఖాఖండాలు ఒకే పొడవు కలిగే వుంటే వాటిని సర్వసమానరేఖా ఖండాలంటాం.

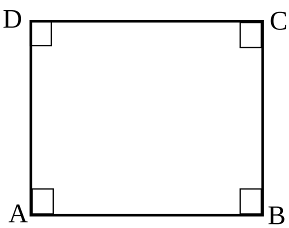
రెండు సర్వసమాన కోణాలు:

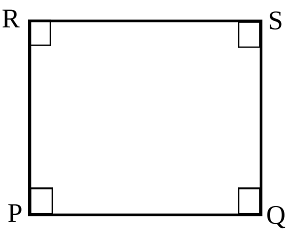




పటము(3) లోని కోణం పటం(4) లోని కోణాలను ఒకదానిపై మరొకటి ఉంచితే 'O' బిందువు Q బిందువుతో $\overrightarrow{OA}$ కిరణం $\overrightarrow{QR}$ కిరణంతోను $\overrightarrow{OB}$ కిరణం $\overrightarrow{QP}$ కిరణంతోను ఏకీభవిస్తుంది. అటువంటి కోణాలను సర్వసమాన కోణాలంటాం. అంటే రెండు కోణాలు ఒకే కొలత (పరిమాణం) కలిగి ఉంటే వీటిని సర్వసమాన కోణాలంటాం.

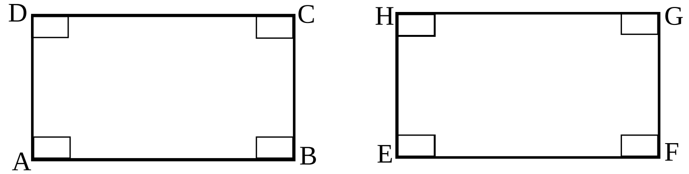
రెండు సర్వసమాన చతురస్రాలు:





ఈ పటాలలో $\angle A=\angle P$, $\angle B=\angle Q$, $\angle C=\angle R$, $\angle D=\angle S$, AB=PQ, BC = Qr, CD=RS, AD=PS కాబట్టి ABCd, PQRS చతురస్రాలు సర్వసమాన చతురస్రాలు.

రెండు సర్వసమాన దీర్ఘచతురస్రాలు:



ఈ పటాలను పోలిస్తే మనం గమనించిన విషయాలు AB=EF, BC=FG, CD=GH, DA=HE, కోణాలు $\angle L=\angle E$, $\angle C=\angle G$, $\angle D=\angle H$ పై పటాలలోని ఒకదాని నాలుగు భుజాలు, నాలుగు కోణాలు వరుసగా రెండవదాని నాలుగుభుజాలు, నాలుగు కోణాలకు సమానమని గమనించాం. అటువంటి పటాలను సర్వసమాన పటాలంటాం. ABCD, EFGH లు రెండు సర్వసమాన దీర్ఘచతురస్రాలు.

సర్వసమానత్వం–నిర్వచనం:

ఏవైన రెండు బహుభుజ రేఖ పటాల ఒకదాని భుజాలు వరుసగా రెండవదాని సదృశ భుజాలకు, ఒకదాని కోణాలు వరుసగా రెండవదాని సదృశ కోణాలకు సమానమైన అవి రెండు సర్వసమాన బహుభుజాలంటారు.

సర్వసమాన త్రిభుజాలు:

1వ నిబంధన:– రెండు త్రిభుజాలలో ఒకదాని మూడు భుజాలు వరుసగా రెండవదాని సదృశ భుజాలకు సమానమైతే ఆ రెండు త్రిభుజాలు సర్వసమానం.

Ex : ΔABC లో AB=5cm, BC=6cm, CA=4cm మరియు ΔPQR లో PQ=5c, QR=6cm, RP=4cm ఉన్నాయనుకుందాం.

కావున ΔABC, ΔPQRలు సర్వసమానం. దీన్నే $\Delta ABC \cong \Delta PQR$ అని రాస్తాం.

2వ నిబంధన:– రెండు త్రిభుజాలో ఒకదాని రెండు భుజాలు వాటి మధ్యకోణం, వరుసగా దాని రెండు సదృశ భుజాలు వాని మధ్య కోణానికి సమానమైన అవి రెండు త్రిభుజాలు సర్వసమానాలు.

$\Delta ABC, \Delta DEF$ లలో $AB=DE, BC=EF$ మరియు $\Delta ABC, \angle DEF$

$\therefore \Delta ABC \cong \Delta DEF$

3వ నిబంధన:– రెండు త్రిభుజాలో ఒకదాని రెండు కోణాలు వాటి మధ్యభుజం వరుసగా దాని రెండు సదృశ కోణాలు వాటి మధ్య భుజానికి సమానమైన, ఆ రెండు త్రిభుజాలు సర్వసమానాలు.

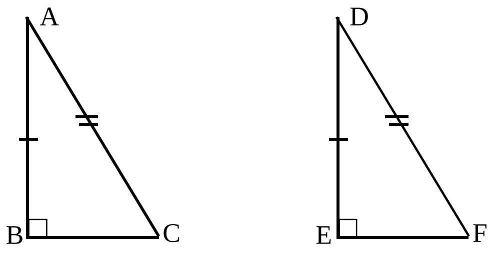
$\Delta ABC \Delta PQR$ లలో $\angle ABC=\angle PQR, \angle ACB=\angle PRQ,$ మరియు $BC=QR$

$\therefore ABC \cong \Delta PQR$

4వ నిబంధన:– రెండు లంబకోణ త్రిభుజాలలో ఒకదాని కర్ణం భుజం రెండవదాని కర్ణం సదృశ భుజానికి సమానమైన, ఆ రెండు త్రిభుజాలు సర్వసమానం.

$\Delta ABC, \Delta DEF$ లంబకోణ త్రిభుజాలలో భుజం AB = భుజం DE కర్ణం AC = కర్ణం DF

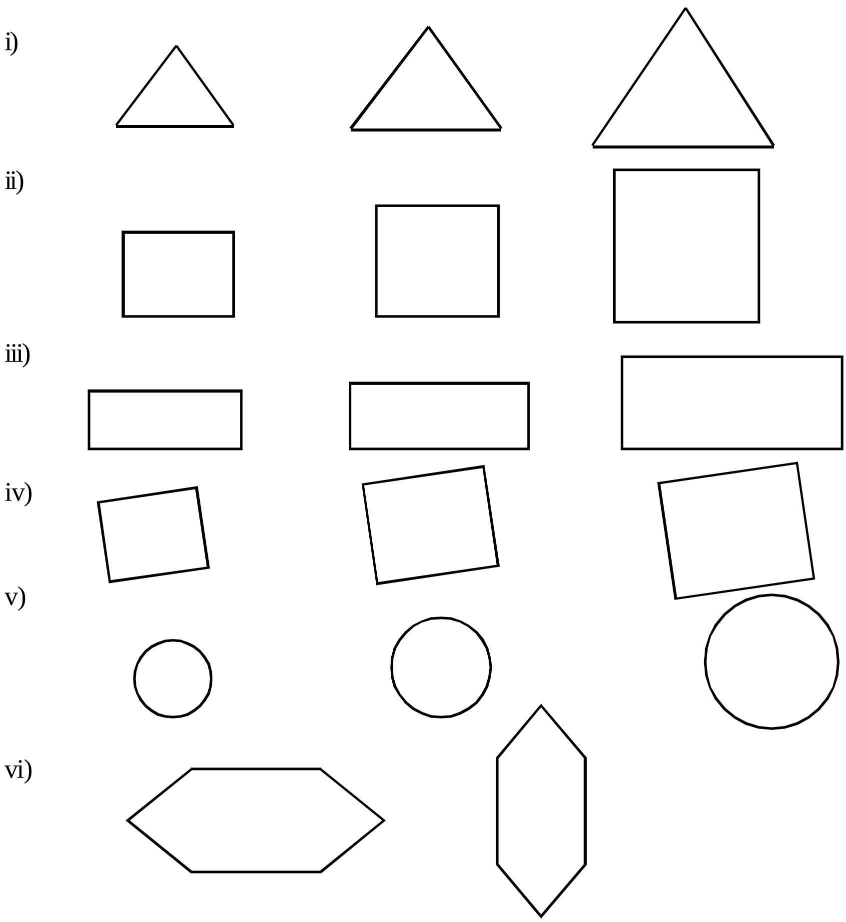
$\Delta ABC, \cong \Delta DEF$

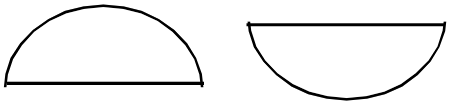


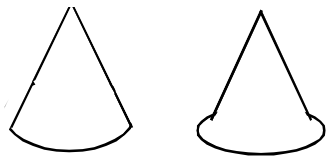
సరూప భావన:

విద్యార్థులు తమ పరిసర ప్రాంతాలలో ఉన్న వివిధ పటాలు, వస్తువులను గమనిస్తుంటారు. ఒకే ఆకారం ఉన్న వివిధ వస్తువులను చూస్తూ ఉంటారు. ఉదాహరణకు ఒకే మాదిరిగాఉన్న కుర్చీలు, బల్లలు, అలమార్లు మొదలగునవి. అదేవిధంగా వివిధ ఆకారాలు ఉన్న రేఖా పటాలు చూస్తూ ఉంటారు. వాటి ఆకారాలు ఒకటిగా ఉన్నప్పటికీ వాటి పరిమాణం మాత్రం సమానం కావచ్చు, కాకపోవచ్చు. ఆ విషయాలన్నీ విద్యార్థుల దృష్టికి తెచ్చి సరూపభావనను బోధించవచ్చు.

సరూపం అంటే ఒకటే రూపం, ఒకటే ఒక ఆకారం(షేప్) కాబట్టి రెండుగాని అంతకంటే ఎక్కువగాని వస్తువులు లేదా రేఖాచిత్ర పటాలను ఒకే ఆకారం ఉన్నవై వివిధ పరిమాణాలలో ఉన్న వాటిని సరూప వస్తువులు లేదా సరూప పటాలు అంటారు. క్రింది చిత్ర పటాలను గమనించండి.

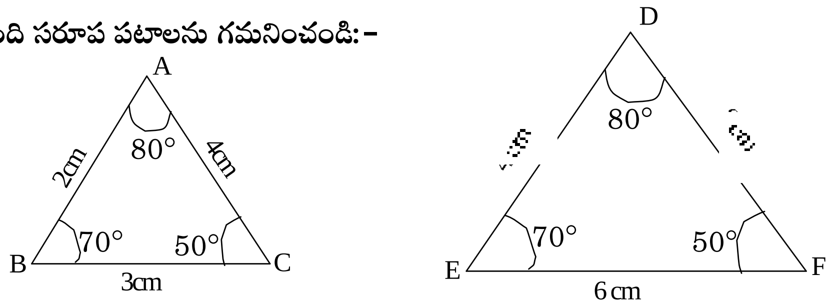


vii) 

viii) 

పై పటాలలో(1) నుంచి (5) దాకా ఉన్న రేఖా పటాలు సరూప పటాలు,(6) నుంచి (8) దాకా ఉన్న చిత్రపటాలు సరూపాలు సర్వసమానం కాబట్టి సర్వసమాన చిత్రాలన్నీ సరూపాలే కాని సరూప పటాలన్నీ సర్వసమానం కానవసరం లేదు.

ఈ క్రింది సరూప పటాలను గమనించండి:–



ΔABC, ΔPQR లను పోల్చండి.

$\angle A = \angle D = 60^0$

$\angle B = \angle E = 70^0$

$\angle C = \angle F = 50^0$

భుజం AB = 2సెం.మీ. DE = 4 సెం.మీ

$\frac{AB}{DE} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$\frac{BD}{EF} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

$\frac{AC}{DF} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

పై రెండు త్రిభుజాలను పోలిస్తే ΔABC , లోని మూడు కోణాలు, ΔDEF లోని, మూడు కోణాలకు సమానంగా ఉన్నాయి.

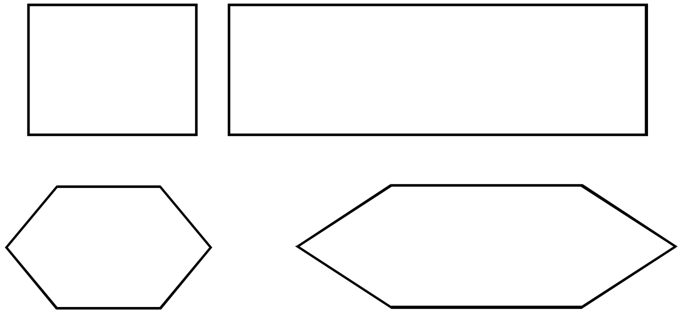
ΔABC లోని భుజాలు, ΔDEF లోని సదృశ భుజాలనిష్పత్తి సమానంగా ఉంది. దీనిని బట్టి రెండు పటాలు సరూపాలు కావాలంటే ఒకదాని మూడు కోణాలు, మరొక దాని మూడు కోణాలకు సమానంగా ఉండాలి. ఒకదాని మూడు భుజాలు, మరొక దాని మూడు సదృశభుజాల నిష్పత్తి సమానంగా ఉండాలి.

అంటే రెండు బహుభుజాలు(పటాలు) సరుపాలుకావడానికి కింది నియమాలు కలిగి ఉండాలి.

(1) ఒకదాని కోణాలన్నీ, రెండవదాని అన్ని సదృశకోణాలకు సమానం

(2) ఒకదాని భుజాల పొడవు రెండవదాని సదృశభుజాల పొడవుకు అనుపాతంలో ఉండాలి. బహుభుజాలు సరూపాలు కావడానికి పై రెండు నియమాలు పాటించాలి. ఒక పటం దాని కార్బన్ కాపీ లేదా జిరాక్స్ కాపి రెండును సరూపాలు, సర్వసమానాలు.

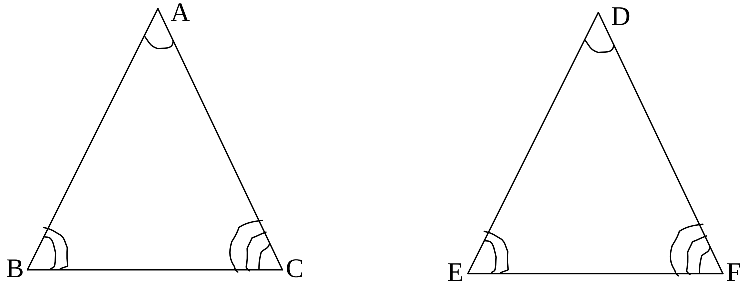
కింది పటాలను గమనించండి.



ఈ పటాలు సరూపాలు కావు. ఎందువల్ల? ఈ పటాలలో కోణాలు సమానం, కాని భుజాలు సమాన నిష్పత్తిలో లేవు.

త్రిభుజాకార పటాలు సరూపాలు కావడానికి నియమాలు (నిబంధనలు) :

రెండు త్రిభుజాలలో ఒకదాని మూడు కోణాలు వరుసగా రెండవదాని సదృశ కోణాలకు సమానమైతే ఆ రెండు త్రిభుజాలు సరూపాలు.



Δ ABC, Δ DEF లలో

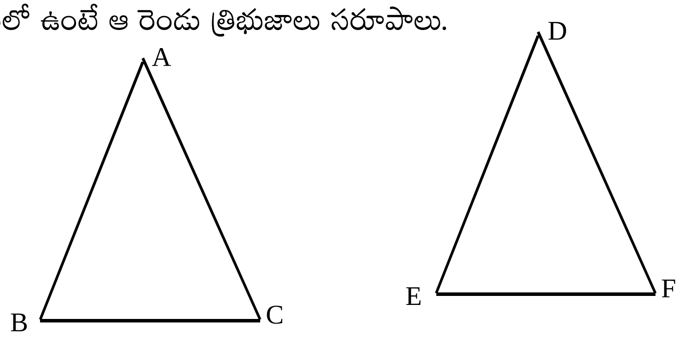
$\angle A=\angle D; \angle B=\angle E, \angle C=\angle F$,

$\therefore \Delta AB \sim \Delta DEF$

రెండు త్రిభుజాలలో ఒకదాని రెండు కోణాలు వరుసగా రెండవదాని సదృశ కోణాలకు సమానమైతే ఆ రెండు త్రిభుజాలు సరూపాలు – ఎందువల్ల?

(త్రిభుజంలోని కోణాల మొత్తం 180^0 కాబట్టి ఒక త్రిభుజంలోని ఏ రెండు కోణాలైనా రెండవదాని రెండు కోణాలకు సమానమైతే, మూడవ కోణం తప్పనిసరిగా సమానమై ఉంటాయి. అందువల్ల నియమం 1 ప్రకారం ఆ రెండు త్రిభుజాలు సరూపాలు)

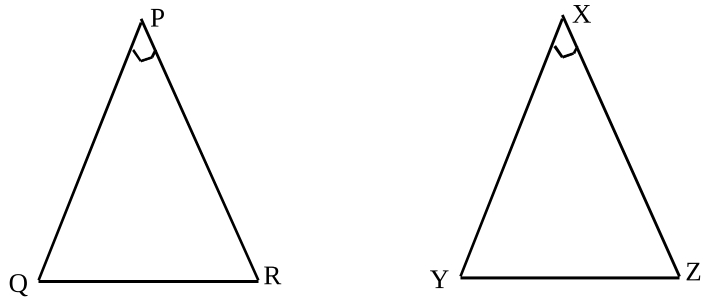
రెండు త్రిభుజాలలో ఒకదాని మూడు భుజాలు, రెండవదాని మూడు సదృశ్య భుజాలకు అనుపాతంలో ఉంటే ఆ రెండు త్రిభుజాలు సరూపాలు.



Δ ABC, Δ DEF లో $\frac{AB}{DE}=\frac{BC}{EF}=\frac{AC}{DF}$

$\therefore \Delta ABC \sim \Delta DEF$

4. రెండు త్రిభుజాలలో ఒకదాని రెండు భుజాలు, రెండవదాని సదృశ్యభుజాలకు అనుపాతంలో ఉండి, ఆ రెండు భుజాల మధ్యకోణాలు సమానమైతే ఆ రెండు త్రిభుజాలు సరూపాలు.



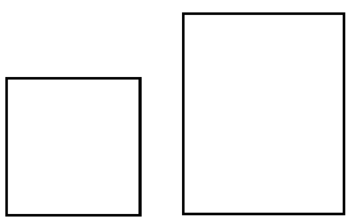
$\Delta PQR, \Delta XYZ$ లలో $\frac{PQ}{XY}=\frac{PR}{XZ}$ మరియు $\angle P=\angle X$ అయితే $\Delta PQR \sim \Delta XYZ$

సమాంతర చతుర్భుజాలు, దీర్ఘచతురస్రాలు, చతురస్ర పటాలు సరూపాలు కావడానికి నిబంధనలు.

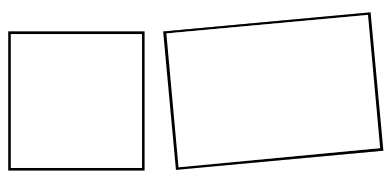
(1) ఒకదాని కోణాలు, వరుసగా రెండవదాని సదృశ కోణాలకు సమానంగా ఉండాలి.

(2) ఒకదాని భుజాలు, రెండవదాని సదృశ భుజాలకు అనుపాతంలో ఉండాలి.

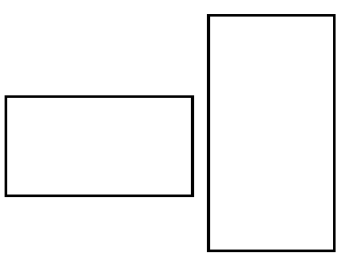
కింది పటాలను గమనించండి:



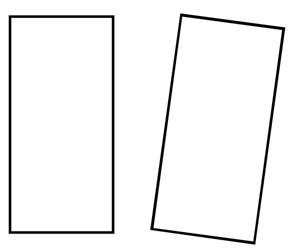
1. సరూపాలు



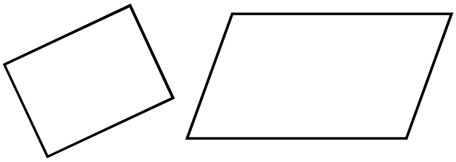
2. సరూపాలు కావు

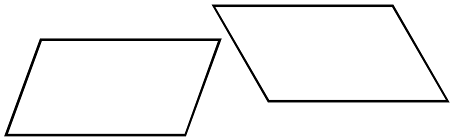


3. సరూపాలు



4. సరూపాలు కావు

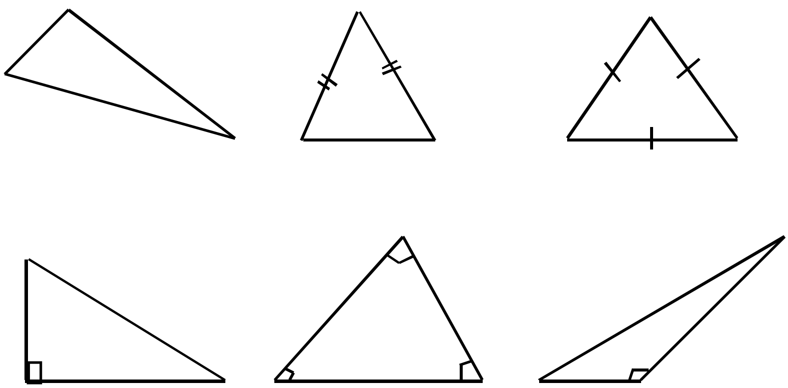




5. సరూపాలు **6. సరూపాలు కావు**

త్రిభుజాలు – ధర్మాలు

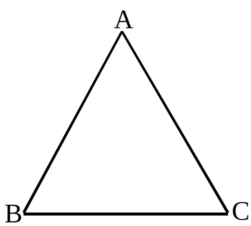
త్రిభుజం :– సరేఖీయాలు కాని మూడు బిందువులతో ఏర్పడే మూడు రేఖా ఖండాల సమ్మేళనమే త్రిభుజం.

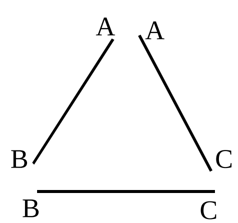


విద్యార్థులతో వివిధ త్రిభుజాకార అట్టముక్కలను కత్తిరింప చేయడం.

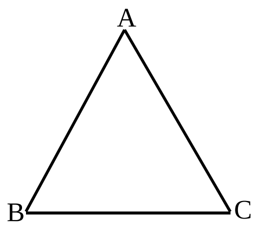
త్రిభుజ భాగాలు

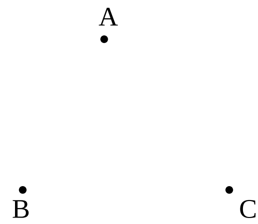
భుజాలు:కృత్యం: వెదురు బద్దలతో తయారు చేయబడిన త్రిభుజాన్ని తీసుకొని, భుజాలను ఏర్పరస్తూ భుజాలను పరిచయం చేయడం వాటిని ఆంగ్ల అక్షరాలతో గుర్తింపుచేయడం.





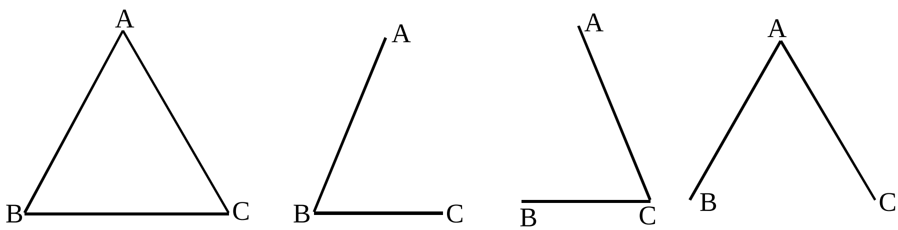
శీర్షాలు:కృత్యం: Δ ABC ని నిర్మించి శీర్షాలను పరిచయం చేయడం .





శీర్షాలు A,B,C

కోణాలు:– Δ ABC తో శీర్షాలు A,B,C ల వద్ద $\Delta\angle CAB, \angle ABC, \angle BCA$ లు ఏర్పడతాయి.



చుట్టుకొలత:–

కృత్యం: త్రిభుజం ABC ని గీయండి. భుజాలు AB,BC, CA కొలవండి. AB+BC+CAను గణించండి. ఈ భుజాల మొత్తం ఆ త్రిభుజం యొక్క చుట్టుకొలత.

గమనిక: మరికొన్ని ఉదాహరణలు ఇవ్వండి.

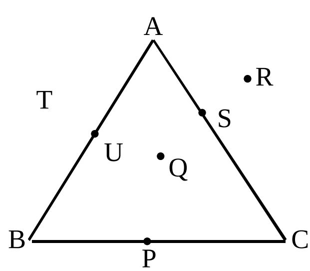
త్రిభుజ అంతరం బాహ్యం: ఒక తలంలో గీసిన త్రిభుజం ఆ తలాన్ని 3 భాగాలుగా విభజిస్తుంది.

(1) త్రిభుజం పై ఉన్న బిందువుల సమితి

(2) త్రిభుజం లోపల ఉన్న బిందువుల సమితి

(3) త్రిభుజానికి బయట ఉన్న బిందువుల సమితి

విద్యార్థులతో కింది పటంలోని బిందువులు తలంలో ఏ భాగానికి చెందినవో తెలపమనండి.



1. త్రిభుజాల రకాలు:

భుజాలను బట్టి త్రిభుజాల రకాలు : భుజాల కొలతలను బటి త్రిభుజాలు మూడు రకాలు.

1. సమబాహు త్రిభుజం:– ఒక త్రిభుజం యొక్క మూడు భుజాల పొడవులు సమానమైతే, దానిని "సమబాహు త్రిభుజం" అంటారు.

2. సమద్విబాహు త్రిభుజం:– ఒక త్రిభుజంలో రెండు భుజాల పొడవులు సమానమైతే ఆ త్రిభుజాన్ని "సమద్విబాహు త్రిభుజం" అంటారు.

3. విషమబాహు త్రిభుజం:– ఒక త్రిభుజంలో ఏ రెండు భుజాల పొడవులు సమానం కాకపోతే దానిని "విషమబాహు త్రిభుజం" అంటారు.

కృత్యం–1:

A) కృత్య పత్రం పై త్రిభుజాలు (సమబాహు త్రిభుజాలు) గీసి విద్యార్థులకు ఇవ్వడం. విద్యార్థులు భుజాల కొలతలు కొలిచి కింది పట్టికలో నమోదు చేయడం.

క్రమ సంఖ్య	త్రిభుజం	1వ భుజం కొలత	2వ భుజం కొలత	3వ భుజం కొలత
1				
2				
3				

1. పై త్రిభుజాన్ని బాహువుల (భుజాలు) కొలతలు ఎలా ఉన్నాయి?

2. ఇవి ఎటువంటి త్రిభుజాలు?

B) కృత్య పత్రం పై త్రిభుజాలు (సమద్విబాహు త్రిభుజాలు) గీసి విద్యార్థులకు ఇవ్వడం. విద్యార్థులు భుజాల కొలతలు కొలిచి కింది పట్టికలో నమోదు చేయడం.

క్రమ సంఖ్య	త్రిభుజం	1వ భుజం కొలత	2వ భుజం కొలత	3వ భుజం కొలత
1				
2				
3				

1. పై త్రిభుజాలు బాహువుల (భుజాలు) కొలతలు ఎలా ఉన్నాయి?

2. ఇవి ఎటువంటి త్రిభుజాలు?

C) కృత్య పత్రం పై త్రిభుజాలు (విషమబాహు త్రిభుజాలు) గీసి విద్యార్థులకు ఇవ్వడం. విద్యార్థులు భుజాల కొలతలు కొలిచి కింది పట్టికలో నమోదు చేయడం.

క్రమ సంఖ్య	త్రిభుజం	1వ భుజం కొలత	2వ భుజం కొలత	3వ భుజం కొలత
1				
2				
3				

1. పై త్రిభుజాలు బాహువుల (భుజాలు) కొలతలు ఎలా ఉన్నాయి?

2. ఇవి ఎటువంటి త్రిభుజాలు?

కృత్యం-2:-

A) అట్టముక్కలను త్రిభుజాలుగా (సమబాహు, సమద్విబాహు, విషమబాహు త్రిభుజాలు ఏర్పడేలా) కత్తిరించి గ్రూపుల్లో విద్యార్థులకు ఇవ్వడం, విద్యార్థులు వాటి భుజాల(అంచుల) పొడవులు కొలిచి కింది పట్టికలో నమోద చేయడం.

క్రమ సంఖ్య	త్రిభుజం	1వ భుజం కొలత	2వ భుజం కొలత	3వ భుజం కొలత
1				
2				
3				

విద్యార్థులు పై పట్టిక ఆధారంగా గ్రూపులో చర్చించి భుజాలను బట్టి త్రిభుజాలను వర్గీకరించడం. వాటి పేర్లు రాయడం (త్రిభుజం పేరు - కొలతలు)

కృత్యం-3: విద్యార్థులు గ్రూపుల్లో వివిధ త్రిభుజాలు గీయడం, భుజాల పొడవులు కొలిచి వాటిని నమోదు చేయడం అవి ఏ రకమైన త్రిభుజాలో వ్యాఖ్యానించడం.

కృత్యం-4: విద్యార్థులు జియోబోర్డు పై రబ్బరుబాండ్‌లతో (భుజాల దృష్ట్యా) వివిధ రకాల త్రిభుజాలు ఏర్పరచడం.

కృత్యం−5: సమబాహు, సమద్విబాహు, విషమబాహు త్రిభుజాలు ఏర్పాటు చేయడానికి వీలున్నట్లు 9 స్ట్రాలు/పుల్లలు విద్యార్థులకు ఇవ్వడం. విద్యార్థులు వాటితో 3 రకాలు త్రిభుజాలు ఏర్పరచడం.

కోణాలను బట్టి త్రిభుజాల రకాలు:− కోణాల కొలతలు బట్టి త్రిభుజాలు మూడు రకాలు అవి

1. అల్పకోణ త్రిభుజం:− త్రిభుజంలో ప్రతి కోణం అల్పకోణమైతే ఆ త్రిభుజం అల్పకోణ త్రిభుజం

2. లంబకోణ త్రిభుజం:− త్రిభుజంలో ఒక కోణం లంబకోణమైతే ఆ త్రిభుజం లంబకోణ త్రిభుజం

3. అధికకోణ త్రిభుజం:− త్రిభుజంలోని ఒక కోణం అధికకోణమైతే ఆ త్రిభుజం అధికకోణ త్రిభుజం.

కృత్యం−1: విద్యార్థులు అట్ట గడియారపు ముళ్ళను తిప్పుతూ ఏర్పడే కోణాలను పరిశీలించడం. అల్ప, లంబ, అధిక, కోణాలను గుర్తించడం.

కృత్యం−2: కృత్య పత్రంపై త్రిభుజాలు (అల్పకోణ, అధికకోణ, లంబకోణ త్రిభుజాలు) గీసి విద్యార్థులకు ఇవ్వడం. విద్యార్థులు కోనాల కొలతలు కొలిచి కింది పట్టికలో నమోదు చేయడం.

క్రమ సంఖ్య	**త్రిభుజం**	**1వ కోణం కొలత**	**2వ కోణం కొలత**	**3వ కోణం కొలత**
1				
2				
3				

పట్టికలో నమోదు చేసిన వివరాల నుంచి కోణాల దృష్ట్యా త్రిభుజాలు ఏ రకమో గుర్తించి నమోదు చేయడం.

కృత్యం−3: గ్రూపుల్లో విద్యార్థులు వివిధ త్రిభుజాలు గీయడం. కోణాల కొలతలు కొలిచి వాటిని నమోదు చేయడం. అవి ఏ రకమైన త్రిభుజాలో వ్యాఖ్యానించడం.

త్రిభుజ ధర్మాలు:

ఎ. త్రిభుజంలోని మూడు కోణాల కొలతల మొత్తం 180^0

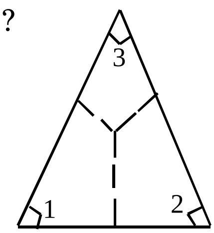
కృత్యం−1: కృత్య పత్రం పై రకరకాల త్రిభుజాలు గీసి వాటి కోణాల కొలతలు గుర్తించి విద్యార్థులకు ఇవ్వడం. విద్యార్థులు కోణాల కొలతలు మొత్తాన్ని కనుక్కోవడం. కొన్ని సందర్భాల్లో కోణాల కొలతలు మొత్తమెంతో తెలపడం.

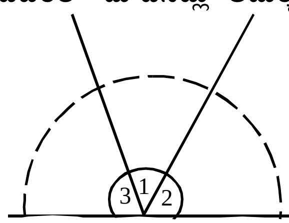
కృత్యం-2: విద్యార్థులు వారికి ఇష్టమైన త్రిభుజాలను తెల్లకాగితం పై గీసి కోణాల కొలతలను పట్టికలో నమోదు చేయడం.

క్రమ సంఖ్య	త్రిభుజం	1వ భుజం కొలత	2వ భుజం కొలత	3వ భుజం కొలత	3 కోణాల కొలతల మొత్తం
1					
2					
3					

పట్టిక ఆధారంగా త్రిభుజంలోని మూడు కోణాల కొలతలు మొత్తం 180^0 అని గ్రహించడం.

కృత్యం-3: ఒక తెల్ల కాగితం పై ఒక త్రిభుజాన్ని గీయండి. దాని కోణాలను గుర్తించండి. త్రిభుజం రెండు మూలాలను కత్తిరించండి. కోణాలను కింది పటంలో చూపినట్లు అమర్చండి. ఏమి గమనించారు.?





ఈ మూడు కోణాలు కలిపి ఒక సరళ కోణమవుతుంది. అంటే త్రిభుజంలో మూడు కోణాల కొలతల మొత్తం ఒక సరళకోణం(180^0)

కృత్యం-4: పట్టికలో కోణాలను రాయడం

క్రమ సంఖ్య	అల్ప కోణ త్రిభుజం				అధిక కోణ త్రిభుజం				లంబ కోణ త్రిభుజం			
	1వ కోణం	2వ కోణం	3వ కోణం	3 కోణాల మొత్తం	1వ కోణం	2వ కోణం	3వ కోణం	3 కోణాల మొత్తం	1వ కోణం	2వ కోణం	3వ కోణం	3 కోణాల మొత్తం
1												
2												
3												
4												

పై పట్టిక ఆధారంగా వ్యాఖ్యానించండి.

B) **త్రిభుజం అసమానత్వాలు:**

1. త్రిభుజంలోని ఏ రెండు భుజాల కొలతల మొత్తమైనా మూడవ భుజం కొలత కంటే ఎక్కువ

Δ ABC i) AB+BC > AC (or) c+a > b

ii) BC+CA>AB (or) a+b > c

iii) CA+AB > BC (or) b+c > a

2. త్రిభుజంలోని ఏ రెండు భుజాల కొలతలు భిన్నమైనా మూడవభుజం కొలత కంటే తక్కువ.

Δ ABC i) AB-BC $\angle$AC (or) c-a $\angle$ b

ii) BC-CA $\angle$ AB (or) a-b $\angle$ c

iii) CA-AB $\angle$ BC (or) b-c $\angle$ a

కృత్యం-1:

కృత్య పత్రం పై కొలతలు గుర్తించి త్రిభుజాలు విద్యార్థులకు ఇవ్వడం. విద్యార్థులు భుజాల కొలతలను కింది పట్టికలో నమోదు చేయడం.

క్రమ సంఖ్య	భుజాల కొలతలు			రెండు భుజాల మొత్తం			పరిశీలన
	a	b	c	a+b	b+c	c+a	

పై పట్టిక ఆధారంగా త్రిభుజంలో రెండు భుజాల మొత్తానికి మూడవ భుజానికి సంబంధం వ్యాఖ్యానించడం.

కృత్యం-2: విద్యార్థులు తెల్లకాగితం పై వివిధ త్రిభుజాలు గీసి, వాటి భుజాల పొడవులు కొలిచి అందులో రెండేసి భుజాల మొత్తాన్ని మూడవ భుజంతో పోల్చడం.

కృత్యం–3: కృత్యం 1లో లాగే రెండు భుజాల భేదానికి కృత్యం చేయడం

కృత్యం–4: కృత్యం 3 లో లాగే తెల్లకాగితం పై త్రిభుజాలు గీసి, అందులో రెండు భుజాల భేదాన్ని మూడవ భుజంతో పోల్చడం

కృత్యం–5: విద్యార్థులు వివిధ పొడవుల స్ట్రాలు / పుల్లలతో త్రిభుజాలు ఏర్పరచడం అందులో కొన్నింటిలో త్రిభుజం ఏర్పడటం, కొన్నింటితో త్రిభుజాలు ఏర్పడకపోవడం మనించడం, కారణాలు తెలపడం.

C) **త్రిభుజ భుజాల కోణాల మధ్య సంబంధం:**

1. త్రిభుజంలో (రెండు భుజాలు అసమానమైతే) పెద్ద భుజం ఎదురు కోణం, కొలత, చిన్న భుజం ఎదురు కోణం కొలత కంటే పెద్దది.
2. త్రిభుజంలో (రెండు కోణాలు అసమానమైతే) పెద్ద కోణం ఎదురు భుజం, చిన్న కోణం ఎదురు భుజం కొలత కంటే పెద్దది.
3. త్రిభుజంలో సమాన భుజాలకు ఎదురు కోణాలు సమానం.
4. సమబాహు త్రిభుజంలో అన్నికోణాలు సమానం.
5. సమద్విబాహు త్రిభుజంలో రెండుకోణాలు సమానం
6. విషమబాహు త్రిభుజంలో ఏ రెండు కోణాలు సమానం కావు.
7. లంబ కోణ త్రిభుజంలో కర్ణం మిక్కిలి పెద్ద భుజం.

సూచన: తగిన కృత్యాలను నిర్వహించి కొలతలను పట్టికలలో రాసి పైన పేర్కొన్న సంబంధాలను పరిశీలించి నిర్ణయించండి.

అభ్యాసం

1. **కింది భుజాలు గల త్రిభుజాలు ఏ రకమైనవి**

1)	6సెం.మీ॥	7 సెం.మీ॥	6 సెం.మీ॥
2)	6 సెం.మీ॥	5 సెం.మీ॥	4 సెం.మీ॥
3)	5 సెం.మీ॥	5 సెం.మీ॥	5 సెం.మీ॥
4)	3 సెం.మీ॥	4 సెం.మీ॥	5 సెం.మీ॥

2. **కింది త్రిభుజాలకు భుజాల కొలతలు రాయండి.**

1) సమబాహు త్రిభుజము

2) సమద్విబాహు త్రిభుజము

3) విషమబాహు త్రిభుజం

3. **కింది కోణాల కొలతలు గల త్రిభుజాలు ఏ రకమైనవి**

1) 30^0, 40^0, 110^0 2) 30^0,60^0,90^0 3) 30^0,70^0, 80^0

4) 60^0, 60^0, 60^0 5) 45^0,45^0,90^0 6) 35^0,35^0, 110^0

7) 80^0, 50^0, 50^0 8) 60^0,60^0,70^0

4. **కింది వాటిలో త్రిభుజం కోణాలు ఏవి?**

1) 60^0, 30^0, 90^0 2) 50^0,50^0,100^0 3) 60^0,40^0, 30^0

4) 48^0,52^0, 80^0 5) 90^0,45^0, 35^0

5. **కింది పట్టికలో త్రిభుజంలోని మూడు కోణాల కొలతలు ఉండేలా ఖాళీలను పూరించండి.**

వ.నెం	త్రిభుజం		
	1వ కోణం	2వ కోణం	3వ కోణం
1	50^0	20^0	....
2	48^0	62^0	....
3	75^0	....	....
4	....	70^0	....
5	....	....	....

6. రెండు కోణాల కొలతలు సమానంగా ఉండేవిధంగా కొన్ని త్రిభుజ కోణాల కొలతలు రాయండి.

7. ఒక త్రిభుజంలో ఎన్ని లంబకోణాలుంటాయి? (ఎన్ని లంబకోణాలుండే అవకాశం ఉంది)

8. ఒక త్రిభుజంలో రెండు అధిక కోణాలుంటాయా? కారణమేమి?

9. కింది వాటిలో ఏవి త్రిభుజ భుజాల కొలతలు?

1) 3 సెం.మీ॥ 4 సెం.మీ॥ 5 సెం.మీ॥

2) 5 సెం.మీ॥ 4 సెం.మీ॥ 12 సెం.మీ॥

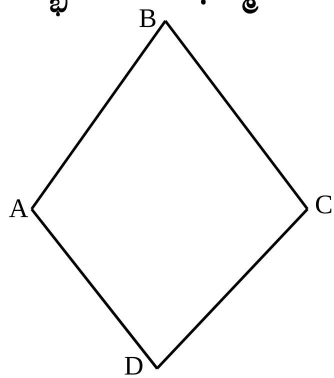
3) 5 సెం.మీ॥ 6 సెం.మీ॥ 11 సెం.మీ॥

4) 5 సెం.మీ॥ 8 సెం.మీ॥ 10 సెం.మీ॥

10. త్రిభుజ భుజాల కొలతలకు కొన్ని ఉదాహరణలివ్వండి.

చతుర్భుజాలు - ధర్మాలు

1. చతుర్భుజం - భాగాలు

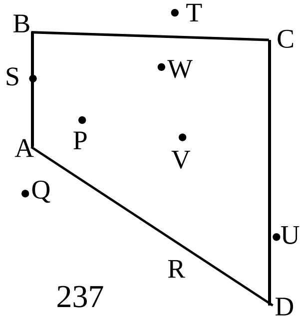


ABCD ఒక సరళ సంవృత పటం. ఇది 4 భుజాలను కల్గి ఉంది. దీన్ని చతుర్భుజము అంటాం.

1. చతుర్భుజం ఒక సరళసంవృత పటం. ఇది నాలుగు భుజాలు కల్గిన బహుభుజి.

2. చతుర్భుజానికి 4 శీర్షాలు, 4 భుజాలు, 4 కోణాలు వుంటాయి. ABCD చతుర్భుజంలో A,B,C,D లు శీర్షాలు. $\angle ADC$, $\angle DCB$, $\angle CAB$, $\angle BAC$లు అంతర్కోణాలు.

చతుర్భుజం-అంతర్ బాహ్య ప్రదేశాలు : ABCD చతుర్భుజం దృష్ట్యా సమతలంలో సూచించిన బిందువుల స్థానాలను పరిశీలించండి.



P,V,W బిందువుల చతుర్భుజం లోపల (అంతర్ ప్రదేశం) Q,T,U బిందువులు చతుర్భుజం వెలుపల (బాహ్యప్రదేశం), R,S బిందువులు చతుర్భుజం పై ఉన్నాయి.

ఈవిధంగా

చతుర్భుజం, సమతలాన్ని మూడు భాగాలుగా విభజిస్తుంది. అవి

1. చతుర్భుజం పై (మీద) బిందువుల సమితి – చతుర్భుజం
2. చతుర్భుజం అంతరంలోని (లోపల) బిందువుల సమితి – చతుర్భుజం అంతరం
3. చతుర్భుజం బాహ్యంలోని(బయట) బిందువుల సమితి – చతుర్భుజం బాహ్యం

చతుర్భుజం–ఆసన్న భుజాలు, ఎదురు భుజాలు :

ABCD చతుర్భుజంలో $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ లు, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ లు, $\overline{CD}, \overline{DA}$ లు $\overline{DA}, \overline{AB}$ లు ఆసన్న భుజాలు

ABCD చతుర్భుజంలో $\overline{AB}, \overline{CD}$, $\overline{BC}, \overline{DA}$ లు ఎదుట భుజాల జతలు

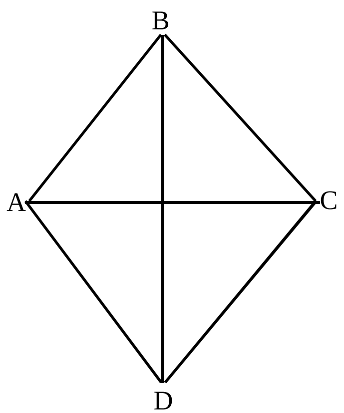
ABCD చతుర్భుజంలో $\angle A, \angle B$ లు , $\angle B, \angle C$ లు, $\angle C, \angle D$ లు $\angle D, \angle A$ లు ఆసన్న కోణాల జతలు

ABCD చతుర్భుజంలో $\angle A, \angle C$ లు, $\angle B, \angle D$ లు ఎదుటి కోణాల జతలు

ABCD చతుర్భుజంలో A,C ఒక జత ఎదుట శీర్షాలు, BDలు ఒక జత ఎదుట శీర్షాలు

చతుర్భుజం–కర్ణాలు :

చతుర్భుజంలో ఏ రెండు ఎదుటి శీర్షాలనైనా కలిపితే ఏర్పడే రేఖాఖండాన్ని కర్ణం అంటాం. చతుర్భుజంలో రెండు కర్ణాలు ఏర్పడతాయి. ABCD చతుర్భుజంలో $\overline{AC}, \overline{BD}$ లు కర్ణాలు.



గమనిక :

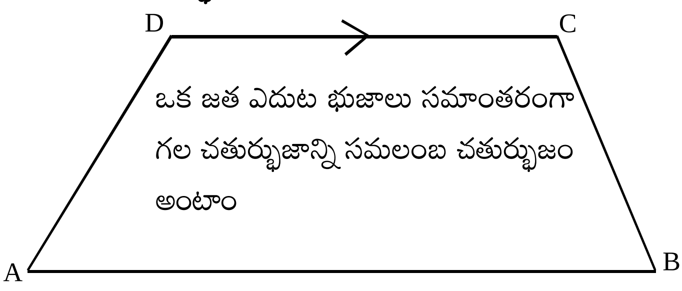
1. చతుర్భుజాన్ని దాని కర్ణం రెండు త్రిభుజాలుగా విభజిస్తుంది.
2. చతుర్భుజాన్ని దాని రెండు కర్ణాలు నాలుగు త్రిభుజాలుగా విభజిస్తాయి.

చతుర్భుజంలోని కోణాల మొత్తం:

కృత్యం: వివిధ రకాల చతుర్భుజాలను తీసుకోండి. ప్రతీ ఒకదాని అంతర్కోణాలు నాల్గింటిని లెక్కించి మొత్తం ఎంతో తెలుసుకోండి. ఇలా కనీసం 5 చతుర్జునాల కోణాల కొలతలు, విడివిడిగా వాటి మొత్తం ఒక పట్టిక రూపంలో నమోదు చేసి మీ పరిశీలనను తెలపండి. చతుర్భుజంలోని నాలుగు కోణాల మొత్తం 360^0 అని నిర్ణయించవచ్చునేమో చూడండి.

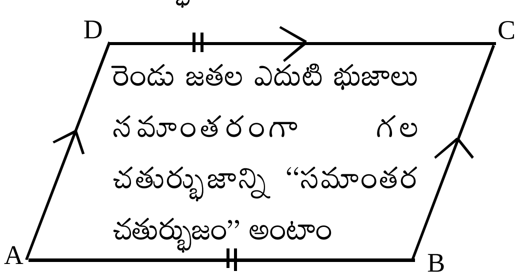
2. చతుర్భుజం-రకాలు-ధర్మాలు:

i) సమలంబ చతుర్భుజం

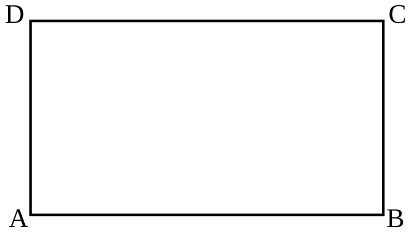


దీనిలో AB, DCలు సమాంతరాలు. అంటే ఆ భుజాల మధ్య దూరం సమానం. కాని AD,BC లు సమాంతరాలు కావు.

ii) సమాంతర చతుర్భుజం : క్రింది చతుర్భుజాన్ని పరిశీలించండి. చతుర్భుజం ABCD లో AB//DC, BC//AD అంటే రెండు జతల ఎదుటి భుజాలు సమాంతరాలు. ఇటువంటి చతుర్భుజాన్ని "సమాంతర చతుర్భుజం " అంటారు.



సమాంతర చతుర్భుజ ధర్మాలు: ABCD సమాంతర చతుర్భుజాన్ని పరిశీలించండి. దిగువ విషయాలను నిర్ధారించండి.



సమాంతర చతుర్భుజంలో

i) ఎదుటి భుజాలు సమానం

ii) ఎదుట కోణాలు సమానం

iii) ఏ రెండు ఆసన్న కోణాల మొత్తం అయినా 180^0 అనగా ఆసన్న కోణాలు సంపూరకాలు.

కృత్యం : ఏవేని నాలుగు సమాంతర చుతుర్భుజాల పటాలు తీసుకుని పైన పేర్కొన్న మూడు ధర్మాలను నిరూపించండి. అంతేగాక

iv) సమాంతర చతుర్భుజంలో కర్ణాలు పరస్పరం సమద్విఖండన చేసుకొనును

v) ప్రతి ఒక కర్ణం సమాంతర చుతుర్భుజాన్ని రెండు సర్వసమాన త్రిభుజాలుగా విభజించునని గ్రహించండి.

iii) **సమబాహు చతుర్భుజం (సమచతుర్భుజం – Rhombus):**

రాంబస్ ధర్మాలు

1) రాంబస్‌లో నాలుగు భుజాలు సమానం

2) రాంబస్‌లో ఎదుటి కోణాలు సమానం

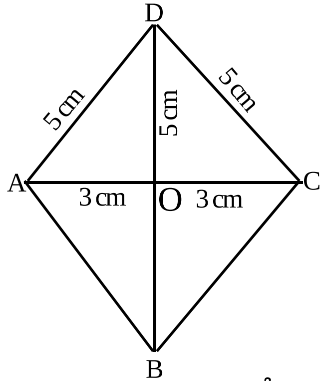
3) రాంబస్‌లో ఏ రెండు ఆసన్న కోణాల మొత్తమయినా 180°

4) రాంబస్‌లో ప్రతి కర్ణం దానిని రెండు సర్వ సమాన త్రిభుజాలుగా విభజిస్తుంది.

నాలుగు భుజాలు సమానంగా గల సమాంతర చతుర్భుజాన్ని సమబాహు చతుర్భుజం
(లేదా)
సమచతుర్భుజం (రాంబస్) అంటాం.
(లేదా)
రెండు ఆసన్న భుజాలు సమానంగా గల సమాంతర చతురుభజాన్ని రాంబస్ అంటాం.

కింది రాంబస్‌ను పరిశీలించండి

5 సెం.మీ భుజంలో రాంబస్‌ను పరిశీలించండి.



కర్ణాలు AC, BD లు '0' వద్ద ఖండించుకొన్నాయి. $AO = OC =$ = 3సెం.మీ.

BD = OD = 4cm అని గమనించండి

$\angle AOB = 90^0$ అని, అలాగే

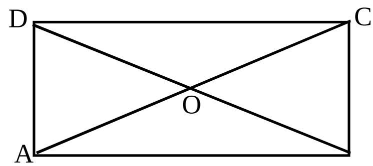
$\angle BOC = \angle COD = \angle AOD = 90^0$ అని గమనించాలి.

రాంబస్‌లో దాని కర్ణాలు పరస్పరం లంబ సమద్విఖండన చేసుకొంటాయి.

iv) దీర్ఘచతురస్రం – Rectangle:

ప్రతి కోణం లంబకోణంగా గల చతుర్భుజాన్ని "దీర్ఘ చతురస్రం" లేదా ఒక సమాంతర చతుర్భుజంలోని ఒక కోణం లంబకోణమైతే దానిని దీర్ఘచతురస్రం అంటాం.

దీర్ఘచతురస్రం ధర్మాలు :



1) దీర్ఘచతురస్రంలో ఎదుటి భుజాలు సమానం (AB=CD, AD=BC)

2) దీర్ఘ చతురస్రంలో ప్రతికోణం లంబకోణం ($\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90^0$)

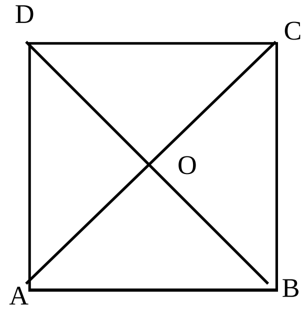
3) దీర్ఘ చతురస్ర కర్ణాలు సమానం (AC=BD)

4) దీర్ఘచతురస్ర ప్రతి కర్ణం దానిని రెండు సర్వసమాన త్రిభుజాలుగా విభజిస్తుంది. (అవి లంబకోణ త్రిభుజాలు) ($\Delta DAB \cong \Delta CBA, \Delta ADC \cong \Delta ABC$)

5) దీర్ఘచతురస్ర కర్ణాలు పరస్పరం సమద్విఖండన చేసుకొంటాయి. (AO=OC, BO=OD)

v) చతురస్రం (Square) :

నాలుగు భుజాలు సమానంగా కలిగి నాలుగు కోణాలు లంబకోణాలుగా గల చతుర్భుజాన్ని "చతురస్రం" అంటాం. లేదా ప్రక్క భుజాలు సమానంగా గల దీర్ఘచతురస్రాన్ని "చతురస్రం" అంటాం. లేదా ఒక కోణం లంబకోణంగా గల "రాంబస్" ను "చతురస్రం" అంటాం.



చతురస్ర ధర్మాలు: ఆసన్న భుజాలు సమానంగా గల దీర్ఘచతురస్రమే చతురస్రం. ఒక కోణం లంబకోణంగా గల రాంబస్ చతురస్రం అనేది కాబట్టి చతురస్రం అనేది దీర్ఘచతురస్రం, రాంబస్‌ల ధర్మాలను కలిగి ఉంటుంది.

1) చతురస్రంలో అన్ని (నాలుగు) భుజాలు సమానం
2) చతురస్రంలో నాలుగు కోణాలు సమానం. (అన్నీ లంబ కోణాలు)
3) చతురస్రంలో కర్ణాలు సమానం.
4) చతురస్ర కర్ణాలు పరస్పరం లంబసమద్విఖండన చేసుకొంటాయి.
5) చతురస్రాన్ని దాని ప్రతి కర్ణమూ రెండు సర్వసమాన లంబకోణ సమద్విబాహు (త్రిభుజాలుగా విభజిస్తుంది.)
6) చతురస్రాన్ని దాని రెండు కర్ణాలు, నాలుగు, సర్వసమాన (లంబకోణ సమద్విబాహు) త్రిభుజాలుగా విభజిస్తాయి.

vi) ఒక చతుర్భుజం – సమాంతర చతుర్భుజం, దీర్ఘ చతురస్రం, రాంబస్, చతురస్రం అయ్యేందుకు నియమాలు.

1. ఒక చతుర్భుజం; సమాంతర చతుర్భుజం అయ్యేందుకు

1) రెండు జతల ఎదుటి భుజాలు సమానం కావాలి (లేదా)
2) ఒక జత ఎదుటి భుజాలు సమానం, సమాంతరం కావాలి (లేదా)
3) రెండు జతల ఎదుటి కోణాలు సమానం కావాలి (లేదా)
4) దాని కర్ణాలు పరస్పరం సమద్విఖండన చేసుకోవాలి.

2. ఒక చతుర్భుజం; దీర్ఘచతురస్రం అయ్యేందుకు

1) దాని అన్ని కోణాలు లంబకోణాలు కావాలి (లేదా)

2) కర్ణాలు సమానమై పరస్పరం సమద్విఖండన చేసుకోవాలి (లేదా)

3) రెండు జతల ఎదుటి భుజాలు సమానమై, ఒక కోణం లంబకోణం(90^0) కావాలి (లేదా)

4) రెండు జతల ఎదుటి భుజాలు సమానమై వాటి కర్ణాలు సమానం కావాలి.

3. ఒక చతుర్భుజం; రాంబస్ అయ్యేందుకు

1) దాని అన్ని భుజాలు సమానం కావాలి (లేదా)

2) దాని కర్ణాలు పరస్పరం లంబ సమద్విఖండన చేసుకోవాలి (లేదా)

3) రెండు జతల ఎదుటి భుజాలు సమానమై కర్ణాలు పరస్పరం లంబాలు కావాలి

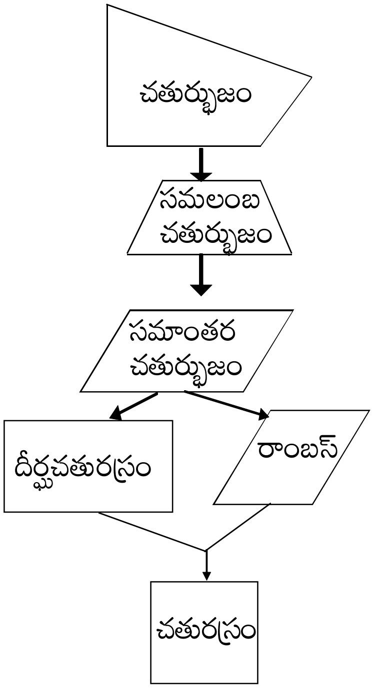
4. ఒక చతుర్భుజం; ఒక చతురస్రం అయ్యేందుకు

1) అన్ని భుజాలు సమానమై ఒక కోణం 90^0 ఉండాలి (లేదా)

2) భుజాలన్నీ సమానమై, కర్ణాలు సమానం కావాలి (లేదా)

3) కోణాలన్నీ సమానమై, కర్ణాలు పరస్పరం లంబాలు కావాలి.

vii) చతుర్భుజ రకాలు – సంబంధం: కింది పటాన్ని పరిశీలించండి.



GRK

అభ్యాసం

1) ఒక చతుర్భుజంలోని మూడు కోణాల కొలతల మొత్తం 290^0 అయితే నాల్గవ కోణం ఎంత?

2) ఒక చతుర్భుజంలోని కోణాలు $x^0.(x+10)^0,(x+20)^0,(x+30)^0$ అయితే వాటిని కనుక్కోండి.

3) ఒక చతుర్భుజంలోని కోణాల నిష్పత్తి $3:4:5:6$ అయితే ఆ కోణాలను కనుక్కోండి.

4) ABCd సమాంతర చతుర్భుజంలో $\angle A=70^0$ మిగిలిన కోణాలను కనుక్కోండి.

5) ఒక సమాంతర చతుర్భుంలోని పక్క కోణాల నిష్పత్తి $2:3$ అయితే దాని కోణాలను కనుక్కోండి.

6) ABCD దీర్ఘ చతురస్రంలో కర్ణాలు "O" వద్ద ఖండించుకున్నాయి. $\angle OAB=40^0$ అయితే $\angle AOB$ ని కనుక్కోండి?

7) సమాంతర చతుర్భుజం యొక్క ABCD లో $\angle A+\angle B$ ఎంత?

8) ఒక సమాంతర చతుర్భుజం భుజాలు 5సెం.మీ, 7 సెం.మీ. వాటి ఎదుట భుజాల కొలతలు ఎంత?

9) ఒక చతుర్భుంలోని రెండు ఆసన్న కోణాలు 125^0, 35^0 మిగిలిన రెండు కోణాలు సమానం అయితే ఆ ఒక్కొక్క సమానకోణం విలువ ఎంత?

10) ABCD ట్రెపీజియంలో AB, CD కి సమాంతరం. $\angle A=50^0, \angle B=70^0$ అయితే $\angle C, \angle D$ లను కనుక్కోండి.

2..3. సాంఖ్యకశాస్త్రం (STATISTICS)

విషయక్రమం :

2.3.0 : లక్ష్యాలు (Objectives)
2.3.1 : పరిచయం (Introduction)
2.3.2 : దత్తాంశ సేకరణ – నిర్వహణ (Data Collection - Management)
2.3.3 : దత్తాంశ విశ్లేషణ (Data Analysis)
2.3.4 : అవర్గీకృత దత్తాంశం – వ్యాఖ్యానం (Interpretation of ungrouped data)
2.3.5 : దత్తాంశ వర్గీకరణ (Classification of Data)
2.3.6 : కేంద్రస్థాన కొలతలు (Measures of Central Tendency)
2.3.6.1 : అంకమధ్యమం (Mean)
2.3.6.2 : మధ్యగతం (Median)
2.3.6.3 : బాహుళకం (Mode)
2.3.7 : పౌనఃపున్య రేఖాచిత్రాలు (Frequenc Graphs)
2.3.7.1 : సోపాన చిత్రం (Histogram)
2.3.7.2 : పౌనఃపున్య బహుభుజి (Frequency Polygon)
2.3.7.3 : పౌనపున్య వక్రం (Frequency Curve)
2.3.7.4 : సంచిత పౌనఃపున్య వక్రాలు (Cumulative Frequency Curves)
2.3.8 : సంభావ్యత (Probability)

2.3.0 : లక్ష్యాలు

1. దత్తాంశ సేకరణ, విశ్లేషణ, ఫలితాలను వ్యాఖ్యానించడం, భావాలను అవగాహన చేసుకొని నిత్యజీవిత సన్నివేశాలలో ఎలా వినియోగించుకోవాలో తెలుసుకుంటారు.
2. దత్తాంశ కేంద్రస్థాన కొలతలు లెక్కించే విధానము, అంకమధ్యమం, మద్యగతం, బాహుళకములను నిత్యజీవిత సన్నివేశాలలో వినియోగించడం నేర్చుకుంటారు.
3. పౌనఃపున్య బహుభుజి, పౌనఃపున్య వక్రాలు గీయడం మరియు ఇచ్చిన దత్తాంశాన్ని రేఖా చిత్రాల ద్వారా ప్రదర్శించి వాఖ్యానించగలరు.
4. బోధనా సంబంధిత సమస్యలకు ప్రయోగాల ద్వారా దతాంశాన్ని సేకరించి, విశ్లేషించగల నైపుణ్యాన్ని పొందుతారు.

సాంఖ్యకశాస్త్రం (Statistics)

2.3.1. పరిచయం :

సాంఖ్యకశాస్త్రాన్ని ఇంగ్లీషులో "స్టాటిస్టిక్సు" అంటారు. స్టాటిస్టిక్సు అనేపదం స్టాటస్ అనే లాటిన్ పదం నుంచి లేదా స్టాటస్టా అనే ఇటాలియన్ పదం నుంచి లేదా స్టాటిస్టిక్ అనే గ్రీకు పదం నుంచి ఉత్పన్నమై వుంటుందని శాస్త్రవేత్తల అభిప్రాయం. ఈ పదాలకు రాజ్యం అని అర్థం. పూర్వం దేశ పరిపాలన విషయంలో

కావలసిన జనాభా, ఆస్తులు, దేశరక్షణకు కావలసిన సిబ్బంది వివరాలు మొదలైనవి సంఖ్యల రూపంలో ప్రభుత్వాలు సేకరించేవి. ఇటువంటి వివరాలనే 'సాంఖ్యకాలు' అంటే 'స్టాటిస్టిక్సు' అనేవారు

మనదేశంలో ప్రతి పది సంవత్సరాలకు ఒకసారి జనాభా లెక్కలు తయారు చేస్తారు. జనాభా లెక్కలతో పాటు ఇతర వివరాలు సేకరిస్తారు. ఆ సేకరించిన వివరాలను క్రోడీకరించి, పరిశీలించి, దేశ ప్రగతికి అనుకూలమైన, ప్రణాళికలను తయారు చేస్తారు. ఈవిధంగా ప్రణాళికలను తయారు చేయడానికి సాంఖ్యకశాస్త్రం తోడ్పడుతుంది.

ప్రస్తుతం సాంఖ్యకశాస్త్ర వినియోగాన్ని జన్యుశాస్త్రం, ఆర్థికశాస్త్రం, భూగర్భశాస్త్రం, భౌగోళికశాస్త్రం, వైద్యం, మనోవిజ్ఞానశాస్త్రం, విద్య తదితర రంగాలకు విస్తరింపచేస్తున్నారు. సర్ రోనాల్డ్ ఎ.ఫిషర్ (Sir Ronald A.Fisher, 1890-1962)ను సాంఖ్యకశాస్త్ర పితామహుడు అంటారు.

దత్తాంశము మరియు దత్తాంశ నిర్వహణ గురించి D.El.Ed ప్రథమ సంవత్సరములో చర్చించాం. ఈ విద్యాసంవత్సరంలో సాంఖ్యకశాస్త్రంలోని దత్తాంశ వర్గీకరణ, విశ్లేషణ మరియు ప్రదర్శన గురించి అధ్యయనం చేస్తాం.

2.3.2. దత్తాంశ సేకరణ మరియు నిర్వహణ :

ఒక లక్ష్యాన్ని దృష్టిలో ఉంచుకుని, సేకరించిన వాస్తవ విషయాలు లేదా సమాచారాన్ని "దత్తాంశం" (Data) అంటాం. అట్టి సమాచారం లేదా దత్తాంశం లోని సంఖ్యా వివరాలను 'రాశులు' అంటారు. దత్తాంశాన్ని రెండు విధాలుగా సేకరించవచ్చు.

1. ఒక విషయానికి సంబంధించిన పరిశోధన జరిపే వ్యక్తి తాను స్వయంగా క్షేత్రస్థాయిలో సమాచార సేకరణ చేయుటం. ఇలాంటి దత్తాంశాన్ని "ప్రాథమిక దత్తాంశం (Primary Data)" అంటారు.
2. పరిశోధన చేసే వ్యక్తి క్షేత్రస్థాయిలో కాకుండా వివిధ ప్రామాణిక మూలాల నుంచి సమాచారాన్ని సేకరించడం. ఈ దత్తాంశాన్ని గౌణ దత్తాంశం (Secondary Data) లేదా ద్వితీయ దత్తాంశం అంటారు.

దత్తాంశ నిర్వహణ అనగా సేకరించిన దత్తాంశాన్ని అర్థవంతంగా, సమగ్రంగా ప్రదర్శించడం, పరిశీలన చేయడం, విశ్లేషణ చేయడం, వ్యాఖ్యానించడం, అనుమితి చేయడం, నిర్ణయాలు చేయడం, రాబోయే పరిణామాలను సూచించడం లాంటి వ్యాసక్తులు కూడి ఉన్న ప్రక్రియ.

2.3.3. దత్తాంశ విశ్లేషణ (Data Analysis) :

ఒక లక్ష్యాన్ని దృష్టిలో పెట్టుకొని సేకరించిన వాస్తవ విషయాల సమూహాన్ని 'దత్తాంశం' లేదా 'సమాచారం' అంటాం. సమాచారంలోని సంఖ్యా వివరాలను 'రాసులు' అంటాం.

సేకరించిన సమాచారమును అర్థవంతంగా సమగ్రంగా అవగాహన చేసుకొనుటకు దానిని పరిశీలించి విశ్లేషించుట అవసరం.

ఒక ఉదాహరణ పరిశీలిద్దాం :

50 గరిష్ఠ మార్కులు గల ఒక గణిత పరీక్షలో 15 మంది విద్యార్థులు పొందిన మార్కులు 50, 45, 40, 7, 25, 34, 42, 20, 39, 42, 20, 11, 50, 30, 28. ఇట్లు రాశులన్నింటిని విడివిడిగా ప్రకటించు దత్తాంశమును "ముడి దత్తాంశము" అంటారు. ఈ దత్తాంశమును పరిశీలించి విశ్లేషించినచో క్రింది వాస్తవాలను నిర్ధారించవచ్చు.

1. పరీక్షలో సాధించిన కనిష్ఠ మార్కులు = 7
2. పరీక్షలో సాధించిన గరిష్ఠ మార్కులు = 50

3. దత్తాంశం యొక్క వ్యాప్తి = గరిష్ఠ విలువ గల రాశి – కనిష్ఠ విలువ గల రాశి

= 50 – 7 = 43

4. దత్తాంశములోని రాశులన్ని 7, 50 మధ్య ఉన్నాయి.

5. దత్తాంశములోని 15 రాశులను ఆరోహణ క్రమంలో అమర్చగా,

7, 4, 20, 20, 25, 28, 30, 34, 39, 40, 42, 42, 45, 50, 50

– వీనిలోని 8వ రాశి 34 దత్తాంశము యొక్క మధ్యరాశి (మధ్యగతము) అవుతుంది.

– 60% అనగా $\frac{60}{100}x50=30$ మార్కులు లేక అంతకంటే ఎక్కువ మార్కులు పొందిన విద్యార్థుల సంఖ్య = 9

– 60% కంటే తక్కువ మార్కులు పొందిన విద్యార్థుల సంఖ్య = 6.

6. తరగతి సగటు మార్కులు = $\frac{\text{రాశుల మొత్తం}}{\text{రాశుల సంఖ్య}}$

$$=\frac{7+11+20+20+15+20+30+34+39+40+4+42+45+50+50}{15}=15$$

$$=\frac{483}{15}=32.2$$

సేకరించిన దత్తాంశంను క్రోడీకరించడం, సంఘటితం చేయడం, పరిశీలించడం, వాస్తవాలు తెలుసుకోవడం, నిర్ణయాలు తీసుకోవడం, ఫలితాలు రాబట్టడం, నిర్ధారణ చేయడం, సలహాలు సూచనలు ఇవ్వడం మొదలగు ప్రక్రియలను దత్తాంశ విశ్లేషణ అంటారు.

2.3.4 : వ్యాఖ్యానం (Interpretation) :

పై దత్తాంశ విశ్లేషణ ద్వారా వాస్తవాలను క్రింది విధంగా నిర్ధారించవచ్చు.

– పై దత్తాంశంలో కనిష్ఠ మార్కులు 7. అలాగే గరిష్ఠ మార్కులు 50.

– దత్తాంశము యొక్క వ్యాప్తి 43.

– గణిత పరీక్షలో సాధించిన సగటు మార్కులు 32.

– 60% లేక అంతకంటే ఎక్కువ మార్కులు సాధించిన వారి సంఖ్య 9

– అనగా 60% విద్యార్థులు 60% లేక అంత కంటె ఎక్కువ మార్కులు సాధించారు.

– అనగా 40% విద్యార్థులు 60% కంటే తక్కువ మార్కులు సాధించారు.

ఈవిధంగా సేకరించిన సమాచారము లేక దత్తాంశాలను ఒక శాస్త్రీయ పద్ధతిలో గణించి, విశ్లేషణ చేసి తెలుసున్న ఫలితాలను అర్థవంతమైన సామాన్యాంశాలుగా వ్యక్తపరిచే పద్ధతినే 'వ్యాఖ్యానం' అంటారు.

2.3.5 : దత్తాంశ వర్గీకరణ (Tabulation of Data) :

సేకరించిన దత్తాంశాన్ని పట్టిక రూపంలో రాయడమనేది సాంఖ్యకశాస్త్రంలో ప్రథమ అంశం. వర్గీకరణ అనేది సామ్యరూపం గల అంశాలను ఒక చోట కూర్చడంగా చెప్పవచ్చు. దీని ముఖ్యఉద్దేశాలు

(1) అవసరం లేని అంశాలను నిర్మూలించి దత్తాంశాన్ని కుదించడం

(2) అవసరమైన అంశాలను పోల్చడం. (వర్గీకరణ పద్ధతులు ముఖ్యంగా రెండు రకాలు.)

1. అవర్గీకృత దత్తాంశం లేదా ముడి దత్తాంశం (Ungrouped data or Raw data)

2. వర్గీకృత దత్తాంశం (Grouped data)

విద్యార్థులు ఒక పరీక్షలో సాధించిన మార్కులను దత్తాంశంగా తీసుకుంటే ఆ దత్తాంశాన్ని అవర్గీకృత దత్తాంశం అంటారు.

ఒక 100 మార్కుల గణిత పరీక్షలో 30 మంది విద్యార్థులు సాధించిన మార్కులు కింది విధంగా వున్నాయి.

2	50	2	4	6	12	6	15	16	17
20	25	23	27	28	29	30	34	40	43
45	50	55	54	56	60	64	69	70	12.

ఈ ప్రదర్శనను సమాచారము లేక దత్తాంశము అంటారు.

ముందుగా ఈ దత్తాంశ వ్యాప్తిని తెలుసుకుందాం

వ్యాప్తి (Range) : దత్తాంశంలోని గరిష్ఠ, కనిష్ఠ విలువలకు గల వ్యత్యాసాన్ని (తేడా) వ్యాప్తి అంటారు.

$\therefore$ వ్యాప్తి = గరిష్ఠ విలువ − కనిష్ఠ విలువ

$70 - 2 = 68$

వీటిలో కనిష్ఠ విలువ 2, గరిష్ఠ విలువ 70 అని మిగిలిన విలువలన్నీ 2, 70 మధ్య ఉంటాయని మాత్రమే గ్రహిస్తాం. ఆ తరగతి ప్రమాణాన్ని కూడా వెంటనే తీసుకోలేం. దత్తాంశం ఎక్కువగా ఉన్నపుడు దాన్ని ఈవిధంగా ఆరోహణ, అవరోహణ క్రమంలో రాయడం కష్టం. ఆవిధంగా కాకుండా తరగతి 20 కంటే తక్కువ మార్కులు పొందిన విద్యార్థుల సంఖ్యను లెక్కించి చెప్పవచ్చు. అదేవిధంగా 20 నుంచి 40 మార్కుల వరకు, 40 నుంచి 60 మార్కుల వరకు, 60 మార్కులపైన వచ్చిన విద్యార్థుల సంఖ్యను లెక్కించి చెప్పవచ్చు. వీటి నుంచి తరగతి ప్రమాణాన్ని తెలుసుకోవడానికి వీలవుతుంది. 20 నుండి 40, 40 నుండి 60 అనే వాటిని తరగతులు అనుకుంటే దత్తాంశాన్ని మనం కొన్ని తరగతులుగా విభజిస్తున్నాం. ఈవిధంగా దత్తాంశ స్వభావాన్ని పరిశీలించే నిమిత్తం దత్తాంశాన్ని అనువైన రీతిలో వర్గీకరించి పట్టికలో తెలియజేస్తే దాన్ని పౌనఃపున్య పట్టిక లేదా పౌనఃపున్య విభాజనం అంటారు.

పౌనఃపున్య విభాజన పట్టిక (Frequency Distribution Table) :

సోపానాలు :

1. దత్తాంశంలోని గరిష్ఠ, కనిష్ఠ విలువల తేడా కనుక్కోవాలి. దీన్ని వ్యాప్తి అంటారు.
2. తరగతి అంతరం 5 లేదా 10 లేదా 50 లేదా 100 ఉండేలా దత్తాంశాన్ని బట్టి నిర్ణయించాలి. తరగతి అంతరాన్ని తరగతి పొడవు అని కూడా అంటాం.
3. ఈ తరగతి అంతరంతో వ్యాప్తిని భాగించగా తరగతుల సంఖ్య వస్తుంది. ఈ తరగతుల సంఖ్య సాధారణంగా 5 నుండి 15 వరకు ఉండవచ్చు. వ్యవహారికంలో 5కు తగ్గక, 10 ని మించకుండా తీసుకుంటారు.
4. తరగతి అంతరం, తరగతుల సంఖ్య నిర్ణయించిన తరువాత దత్తాంశంలోని కనిష్ఠ సంఖ్యతో మొదలు

పెట్టిగాని, దీనికి ముందున్న ఏదైనా సంఖ్యతోగాని తరగతులు రాయాలి.

5. దత్తాంశంలోని ప్రతిసంఖ్యను చదివి అది చెందే తరగతికి ఎదురుగా ఒక గణనచిహ్నం (ఒక నిలువుగీత) గీయాలి. గణన సులభంగా ఉండటానికి ఈ గణన చిహ్నాలను 5 కట్టలుగా ఏర్పాటు చేయాలి. ఒక తరగతి ఎదురుగా చూపించే ప్రతి 5 గణన చిహ్నాన్ని ముందుగా గీసిన నాలుగు గణన చిహ్నాలను ఖండించేట్లు ఒక అడ్డుగీత గీయాలి.

ఉదా : 𝍸 అనేది 5 ను చూచిస్తుంది.

సాధన :

వ్యాప్తి = గరిష్ఠ విలువ – కనిష్ఠ విలువ

= 70 – 2 = 68

తరగతుల సంఖ్య = 8

$$\text{తరగతి అంతరం} = \frac{\text{వ్యాప్తి}}{\text{తరగతుల సంఖ్య}}$$

=

= 9 (పూర్ణాంకానికి సవరిస్తే)

ఇలాంటి సందర్భాలలో 10ని తరగతి అంతరంగా తీసుకుంటే సౌకర్యంగా ఉంటుంది.

పౌనఃపున్య విభాజన పట్టిక :

తరగతి (Class)	గణ చిహ్నాలు (Tally Marks)	పౌనఃపున్యం (Frequency)
0–9	𝍸	5
10–19	𝍸	5
20–29	𝍸 |	6
30–39	||	2
40–49	|||	3
50–59	𝍸	5
60–69	|||	3
70–79	|	1
మొత్తం (Total)		

గమనిక (Note) : (సిగ్మా) అనే గుర్తు రాసుల మొత్తాన్ని సూచిస్తుంది.

ఇందులో ప్రతి తరగతిని రెండు సంఖ్యలతో సూచిస్తారు.

మొదటి సంఖ్యను ఆ తరగతి దిగువ అవధి, రెండవ సంఖ్యను ఎగువ అవధి అంటారు.

ఉదా : 0–9 తరగతి దిగువ అవధి 0, ఎగువ అవధి 9

రెండు వరుస తరగతుల దిగువ అవధుల తేడా లేదా ఎగువ అవధుల తేడా తరగతి అంతరం అవుతుది.

2.3.6. కేంద్రస్థానం కొలతలు (Measures of Central Tendency) :

కేంద్రస్థాన విలువలనే కేంద్రీయ ప్రవృత్తిమానాలు అంటారు.

ఇవి 3 రకాలు

1. సగటు (Mean) లేదా సరాసరి (Average) లేదా అంకమధ్యమం (Arithmetic Mean
2. మధ్యగతం (Median) లేదా మాధ్యమిక
3. బాహుళకం (Mode)

2.3.6.1. అంకమధ్యమం :

నిత్యజీవితంలో ఉపయోగించే సరాసరి లేదా సగటు అనే పదాన్ని సాంఖ్యకశాస్త్రం ప్రకారం 'అంకమధ్యమం' అంటారు.

అవర్గీకృత దత్తాంశ అంకమధ్యమం (Mean for ungrouped data) :

ఈ పద్ధతిలో 'దత్తాంశం'లోని అన్ని అంశాల విలువను కూడగా వచ్చిన మొత్తాన్ని, అంశాల సంఖ్యతో భాగించగా వచ్చే ఫలితాన్ని అంకమధ్యమం అంటారు దీ $(\bar{x})$ $\frac{\sum x}{N}$ $\frac{30}{5} = 6$గా సూచిస్తారు.

అంకమధ్యమం = $\frac{\text{రాశుల మొత్తం}}{\text{రాశుల సంఖ్య}}$ లేదా

ఉదా : కింద ఇచ్చిన అవర్గీకృత దత్తాంశానికి అంకమధ్యమం కనుక్కోండి.

5, 7, 4, 8, 6

సాధన :-

రాశుల మొత్తం = 5+7+4+8+6 = 30

రాశుల సంఖ్య = 5; అంకమధ్యమం $(\bar{x})$ = $\frac{\text{రాశుల మొత్తం}}{\text{రాశుల సంఖ్య}}$ =

వర్గీకృత దత్తాంశపు అంకమధ్యమం (Mean for Grouped Data) :

ఈ పద్ధతిలో అంకమధ్యమాన్ని ఆ క్రింది సూత్రాలు ఉపయోగించి కనుక్కుంటారు.

i) $\frac{\sum f.x}{\sum f}$ లేదా $\frac{\sum f.x}{N}$

ఇక్కడ f ను పౌనఃపున్యం అని x ను తరగతి మధ్య విలువ అంటారు.

అంటే పౌనఃపున్యాల మొత్తం

ఉదా :

తరగతి	10-19	20-29	30-39	40-49	50-59
పౌనఃపున్యం	4	13	33	48	58

సాధన :

తరగతి అంతరం (C.I)	x మధ్యవిలువ	f పౌనఃపున్యం Frequency	fx
10-19	14.5	4	58.0
20-29	24.5	9	220.5
30-39	34.5	20	690.0
40-49	44.5	15	667.5
50-59	54.5	10	545.0
	మొత్తం : $N = \sum f$	= 58	$\sum fx = 2181$

$N = \sum f$

$$\therefore x = \frac{\sum fx}{\sum fx} = \frac{2181}{58} = 37.6$$

ఉదా :

ii) $x = A + \frac{\sum fd}{N} x\ c$ (విచలన పద్ధతి) Deviation or Short cut method

A = ఏదైనా ఒక తరగతి మధ్య విలువ (సాధారణంగా మధ్యలోని తరగతి)

f = పౌనఃపున్యం; C = తరగతి అంతరం (పొడవు)

d = విచలనం = $\frac{x - A}{c}$

A = ప్రతి తరగతి మధ్య విలువ

N = పౌనఃపున్యాల మొత్తం

ఉదా :

తరగతి	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
పౌనఃపున్యం	4	9	15	6	6

సాధన :

తరగతి అంతరం (C.I)	మధ్యవిలువ (x)	$d = \frac{x - A}{c}$	పౌనఃపున్యం (f)	fd	
10–20	15	–2	4	–8	–17
20–30	25	–1	9	–9	
30–40	35(A)	0	15	0	
40–50	45	1	6	6	18
50–60	55	2	6	12	
మొత్తం :			$n = \sum f = 40$	$\sum fd = 1$	

$\therefore$ అంకమధ్యమం

$$= 30 + \frac{1}{40} x10 = 35 + 1/4 = 35 + 0.25 = 35.25$$

2.3.6.2. మధ్యగతం (Median) :

$$\bar{x} = A + \frac{\sum fd}{N} x\ c \qquad \left[\frac{N+1}{2}\right]$$

ఇది మధ్యస్థ అంశం. మధ్యగతానికి దత్తాంశంలోని అంశాలు ఇరువైపుల సమ సంఖ్యలో ఉంటాయి.

అవర్గీకృత దత్తాంశపు మధ్యగతం (Median for Ungrouped Data) :

దత్తాంశంలోని అంశాలను ఆరోహణ లేదా అవరోహణ క్రమంలో అమర్చినపుడు మధ్యగత లేదా మధ్యస్థ అంశ విలువలను మధ్యగతం అంటారు.

ఎ) అంశాల సంఖ్య (N) బేసిసంఖ్య అయితే

మధ్యగతం = $\left[\frac{N+1}{2}\right]$ స్థాన విలువ (అరోహణ, అవరోహణ అమరిక)

బి) అంశాల సంఖ్య (N) సరిసంఖ్య అయిన

మధ్యగతం = $\frac{(N/2) + (N/2+1)}{2}$ విలువ

ఉదా :1.

6, 49, 14, 46, 16, 42, 26, 32, 28 అంశాల మధ్యగతం కనుక్కోండి.

ఆరోహణ క్రమంలో 6, 14, 16, 26, 28, 32, 42, 46, 49

N = 9 (బేసి సంఖ్య)

వ స్థాన విలువ

$\left[\frac{N+1}{2}\right]=\left[\frac{a+1}{2}\right]=$ 5వ విలువ

$\therefore$ మధ్యగతం = 28

ఉదా : 2

1.8, 2.7, 1.2, 4.5, 2.3, 3.7, 3.1 అంశాల మధ్యగతాన్ని కనుక్కోండి.

అవరోహణ క్రమంలో = 4.5, 4.0, 3.7, 3.1, 2.7, 2.3, 1.8, 1.2

N = 8 (సరిసంఖ్య) N/2 = 8/2=4 విలువ = 3.1

N/2+1=8/2+1 = 5 వ విలువ = 2..7

మధ్యగతం =

వర్గీకృత దత్తాంశపు మధ్యగతం (Median for Grouped Data) :

ఈ పద్ధతిలో మధ్యగతాన్ని కింది సూత్రాన్ని ఉపయోగించి కనుక్కోండి.

మధ్యతం = $L+\left[\frac{N/2-F}{f}\right]c$

ఇక్కడ L అనేది మధ్యగత తరగతి దిగువ హద్దు

N అనేది పౌనఃపున్యాల మొత్తం.

N/2 = మధ్యగత తరగతి విలువ

F = సంచిత పౌనఃపున్యంలోని మధ్యగత తరగతికి ముందున్న సంచిత పౌనఃపున్యం

$$\frac{3.1+2.7}{2}=\frac{5.8}{2}=2.9$$

f = మధ్యగత తరగతి పౌనఃపున్యం

c = తరగతి అతరం (C.1)

ఉదా :

తరగతి	1-3	4-6	7-9	10-12
పౌనఃపున్యం	3	2	7	1

సాధన :

తరగతి అంతరం (C.I)	హద్దులు	పౌనఃపున్యం Frequency	f పౌనఃపున్యం Frequency
1-3	05.-3.5	3	3
4-6	3.5-6.5	2	5 (3+2)
7-9	6.5-9.5	4	9(3+2+4)
10-12	9.5-12.5	1	10(3+2+4+1)
మొత్తం (Total) = N = 10			

$N/2 = 10/2 = 5 \quad L = 3.5$

$F = 3$

$f = 2$

$c = 3$

$\therefore$ మధ్యగతం =

$$= 23.5 + \frac{5-3}{2} x3 = 3.5 + \frac{2}{2} x3 = 3.5 + 3 = 6.5$$

మధ్యగత గుణాలు (Merits of Median) :

1. దీన్ని సులభంగా అర్థం చేసుకోవచ్చు.
2. దీన్ని తేలికగా గణించవచ్చు.
3. ఇది గరిష్ఠ, కనిష్ఠ విలువల వల్ల మార్పు చెందదు.
4. అంశాల సంఖ్య సరిసంఖ్య అయినపుడు మాత్రమే రెండు మధ్యస్థ విలువల సగటు లెక్కిస్తారు.

లోపాలు (Demerits) :

1. ఇది ఇన్ని అంశాలను పరిగణనలోకి తీసుకోదు
2. బీజీయ ప్రస్తావనకు సరిపోదు.

$$\left[\frac{3+4}{2}\right] \quad \left[L+\frac{N/2-F}{f}\right]c$$

2.3.6.3. బహుళకం (Mode) :

దత్తాంశంలో చాలా తరచుగా (ఎక్కువసార్లు వచ్చే) విలువను ఆ దత్తాంశం బహుళకం అంటారు.

దీన్ని 'Z' తో సూచిస్తారు.

అవర్గీకృత దత్తాంశపు బహుళకం (Mode for Ungrouped Data) :

దత్తాంశంలో ఇచ్చిన ఏ అంశం ఎక్కువసార్లు వస్తుందో ఆ అంశాన్ని దత్తాంశ బహుళకం అంటారు.

ఉదా : 9, 8, 7, 7, 6, 3, 7, 2, 1, 7, 9 ల బహుళకం 7.

ఉదా : 4, 8, , 3, 2, 1, 6, 7, 9, 4 ల బహుళకం

6, 4 రెండు పర్యాయాలు వచ్చాయి.

బహుళకం = 4, 6

ఉదా : 3, 5, 8, 11, 4, 6, 4, 2 ల బహుళకం నిర్ధారించలేం.

గమనిక (Note) :

1. దత్తాంశానికి ఒకే ఒక బాహుళకం ఉంటే దాన్ని ఏకమూలంక బాహుళక దత్తాంశం అంటారు.
2. దత్తాంశానికి రెండు బాహుళకాలు ఉంటే దాన్ని ద్విబాహుళక దత్తాంశం అంటారు.

వర్గీకృత దత్తాంశ బాహుళకం (Mode for Grouped Date) :

ఈ పద్ధతిలో బాహుళకాన్ని $L+\left[\frac{\Delta_1}{\Delta_1+\Delta_2}\right]x\,c$ ఉపయోగించి కనుక్కుంటారు.

ఇక్కడ $\Delta_1 = f - f_1$

$\Delta_2 = f - f_2$

C = తరగతి అంతరం

L = బాహుళకం తరగతి దిగువ అవధి

= బాహుళకం తరగతి పౌనఃపున్యం

= బాహుళకం తరగతికి ముందున్న పౌనఃపున్యం

= బాహుళకం తరగతికి తరువాత ఉన్న పౌనఃపున్యం

ఉదా :

మార్కులు	15-24	25-34	35-44	45-54	55-64	65-74
విద్యార్థులసంఖ్య	8	20	28	30	10	4

	మార్కులు	విద్యార్థుల సంఖ్య	
	15-24	8	
	25-34	20	
	35-44	28	
L = 44.5	45-54	30	బాహుళకం తరగతి
	55-64	10	
	65-74	4	

$$L=\frac{44+45}{2}=44.5$$

$$f=30,\ f_1=20\ \ f_2=10\ \ c=10$$

$$\Delta_1 = f - f_1 = 30-28 = 2$$

$$\Delta_2 = f - f_2 = 30-10 = 20$$

$$\therefore \text{mode}(z) = L+\left[\frac{\Delta_1}{\Delta_1+\Delta_2}\right]x\,c = 44.5+\frac{2}{2+20}x10$$

$$=44.5+\frac{2}{22}x10 = 44.5+0.91 = 45.91$$

గమనిక : (i) బహుళకం $L+\left[\frac{f-f_1}{2f-f_1-f_2}\right]x\,c$ సూత్రం ద్వారా కూడా కనుక్కోవచ్చు.

బాహుళకం = 3 మధ్యగతం - 2 అంకమధ్యమం నుంచి కూడా గ్రహించవచ్చు.

బహుళకం గుణాలు (Merits of Mock) :

1. దీన్ని సులభంగా అర్ధం చేసుకోవచ్చు.
2. దీన్ని తేలికగా లెక్కించవచ్చు.
3. ఇది అంశాలపై ప్రభావితం కాదు.
4. అంకమధ్యమం, మధ్యగతం తెలిస్తే దీన్ని గణించవచ్చు.

లోపాలు (Demerits) :

1. ఇది బీజీయ ప్రస్తావనకు పనికిరాదు
2. ఎక్కువ సందర్భాలలో స్పష్టత ఉండదు
3. ఎక్కువ అంశాలకు తగు ప్రాముఖ్యం ఇవ్వవలసి వస్తే ఇది పనికిరాదు.
4. ఒకటి కన్నా ఎక్కువ లేదా అసలు లేకుండుట జరుగవచ్చు.

2.3.7. పౌనఃపున్య రేఖాచిత్రాలు :

దత్తాంశాన్ని సంక్షిప్తం చేసి పౌనఃపున్య విభాజన పట్టికలు రూపంలో తెలపడం వల్ల సాంఖ్యక విశ్లేషణ జరపడానికి ప్రాతిపదిక ఏర్పడుతుంది. కాని సంఖ్యాత్మక రూపంలో ఉండే దత్తాంశాన్ని పరిశీలించి అందులోని కొన్ని అంతర్గత స్వభావాలను వెంటనే తెలుసుకోలేం. పరిచయంలేని వారికి అంకెలు, పట్టికలు తికమకగా ఉంటాయి. సాంఖ్యక పరిజ్ఞానం ఉన్నవారికి కూడా కొన్ని దత్తాంశాలను, పట్టికలను రేఖాచిత్రాల ద్వారా ప్రదర్శించినపుడే ఫలితాలను ఊహించే వీలవుతుంది. చలనరాశి పెరుగుదలతో పాటు పౌనఃపున్యం మార్పు వివిధ తరగతులలో పౌనఃపున్యాల కూర్పు, దత్తాంశంలోని సౌష్ఠవత మొదలైన వాటి పరిశీలనకు రేఖాచిత్రాలు ఎంతో ఉపయోగపడతాయి.

దత్తాంశాలకు సంబంధించిన పౌనఃపున్య పట్టికలకు సాధారణంగా ఈ క్రింది రేఖాచిత్రాలను విరివిగా ఉపయోగిస్తారు.

1. సోపాన చిత్రం (Histogram)
2. పౌనఃపున్య బహుభుజి (Frequency Polygon)
3. పౌనఃపున్య వక్రం (Frequency Curve)
4. సంచిత పౌనఃపున్యవక్రం (Cumulative Frequency Curves)
5. ఆరోహణ సంచిత పౌనఃపున్య వక్రం (Lessthan Cummulative Frequency Curve)
6. అవరోహణ సంచిత పౌనఃపున్య వక్రం (Greterthan Cummulative Frequency Curve)

2.3.7.1. సోపాన చిత్రం :

తరగతి యదార్ధ హద్దులపై నిర్మించిన ఆసన్న దీర్ఘచతురస్రాల రేఖా చిత్రాన్ని సోపానచిత్రం అంటారు.

ఇచ్చిన పౌనఃపున్య పట్టిలో తరగతుల అంతరాలు సమానంగా ఉంటే ఒక గళ్ళ కాగితం (Graph) పై తగిన స్కేలు తీసుకుని x-అక్షంపై తరగతులు, y-అక్షంపై పౌనఃపున్యాలు గుర్తించాలి. తరగతి అంతరం వెడల్పుగాను, పౌనఃపున్యం పొడవుగాను తీసుకుని ప్రతి తరగతికి సంబంధించి ఆసన్న దీర్ఘచతురస్రం నిర్మించాలి.

గమనిక : దీర్ఘ చతురస్ర వైశాల్యాలు అనురూప తరగతుల పౌనఃపున్యాల అనుపాతంలో (Proportion) ఉ

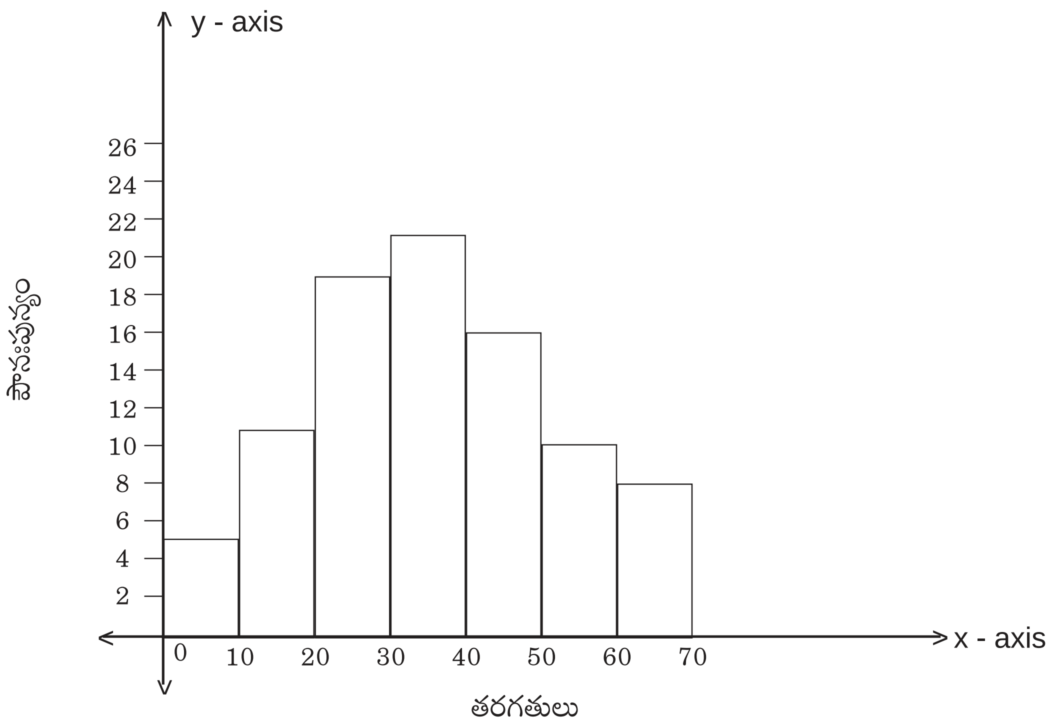
ఉదా :

తరగతి	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70
పౌనఃపున్యం	5	11	19	21	16	10	8

ఇక్కడ తరగతి అంతరం 10ని ఒక యూనిట్‌గా తీసుకుంటే స్కేలు

x – అక్షంపై 1 సెం.మీ. = 10 యూనిట్లు

y – అక్షంపై 1 సెం.మీ. = 2 యూనిట్లు



2.3.7.2. పౌనఃపున్య బహుభుజి (Frequency Polygon) :

దత్తాంశానికి గీసిన సోపాన చిత్రంలోని దీర్ఘచతురస్రాలపై వెడల్పు భుజాల మధ్య బిందువులను వరుసగా కలిపే సరళరేఖను పౌనఃపున్య బహుభుజి అంటారు. ఒక పౌనఃపున్య విభాజనానికి చెందిన ప్రతి తరగతిలోని పౌనఃపున్యమంతా తరగతి మధ్యవిలువల వద్ద కేంద్రీకృతమవుతుంది. కాబట్టి దత్తాంశానికి పౌనఃపున్య బహుభుజిని నిర్మించడానికి దాని తరగతుల మధ్య విలువను x – అక్షంపై, వాటి పౌనఃపున్యవిలువలను y – అక్షంపై తీసుకుని (x, y) బిందువులను గళ్ళ కాగితంపై గుర్తించాలి. ఆ బిందువలను వరుసగా సరళరేఖతో కలపగా వచ్చే పటాన్ని పౌనఃపున్య బహుభుజి అంటారు.

ఉదా :

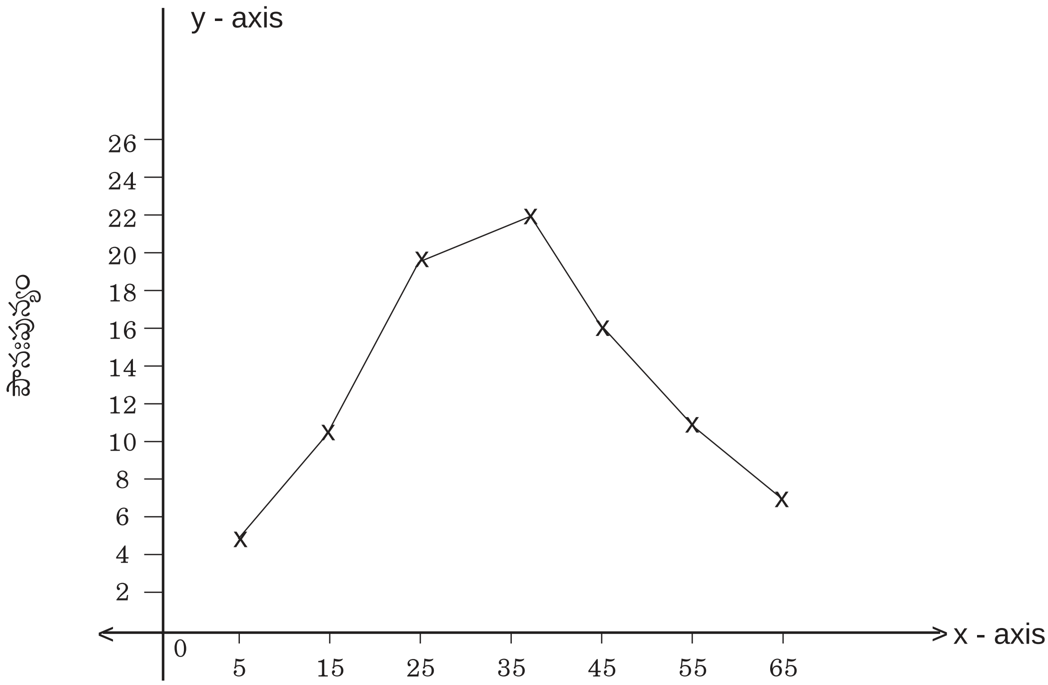
తరగతి	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70
పౌనఃపున్యం	5	11	19	21	16	10	8

తరగతుల మధ్య విలువలు

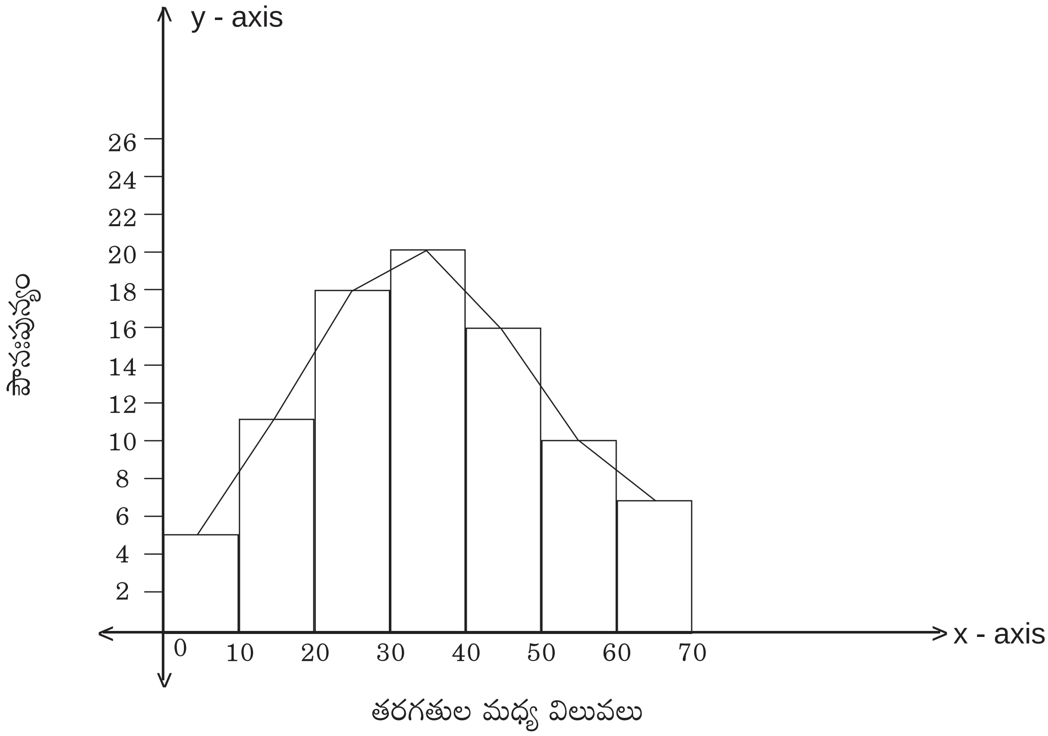
అదేవిధంగా మిగిలిన తరగతుల మధ్య విలువలు 35, 45, 55, 65 తరగతుల మధ్య విలువలతో పౌనఃపున్య విభాజనం

తరగతి	తరగతి మధ్య విలువ	పౌనఃపున్యం
0-10	5	5
10-20	15	11
20-30	25	19
30-40	35	21
40-50	45	16
50-60	55	10
60-70	65	8

$\frac{0+10}{2}=5, \frac{10+20}{2}=15, \frac{2+30}{2}=25$



తరగతుల మధ్య విలువలు



2.3.7.3. పౌనఃపున్య వక్రం (Frequency Curve) :

పౌనఃపున్య పట్టికలోని తరగతుల మధ్యవిలువలు, వాటి అనురూప (Corresponding) పౌనఃపున్యాలకు సంబంధించిన బిందువులను గళ్ళ కాగితంపై గుర్తించి, ఆ బిందువులను వరుస క్రమ వక్రంలో కలుపగా వచ్చే పటాన్ని 'పౌనఃపున్య వక్రం' అంటారు.

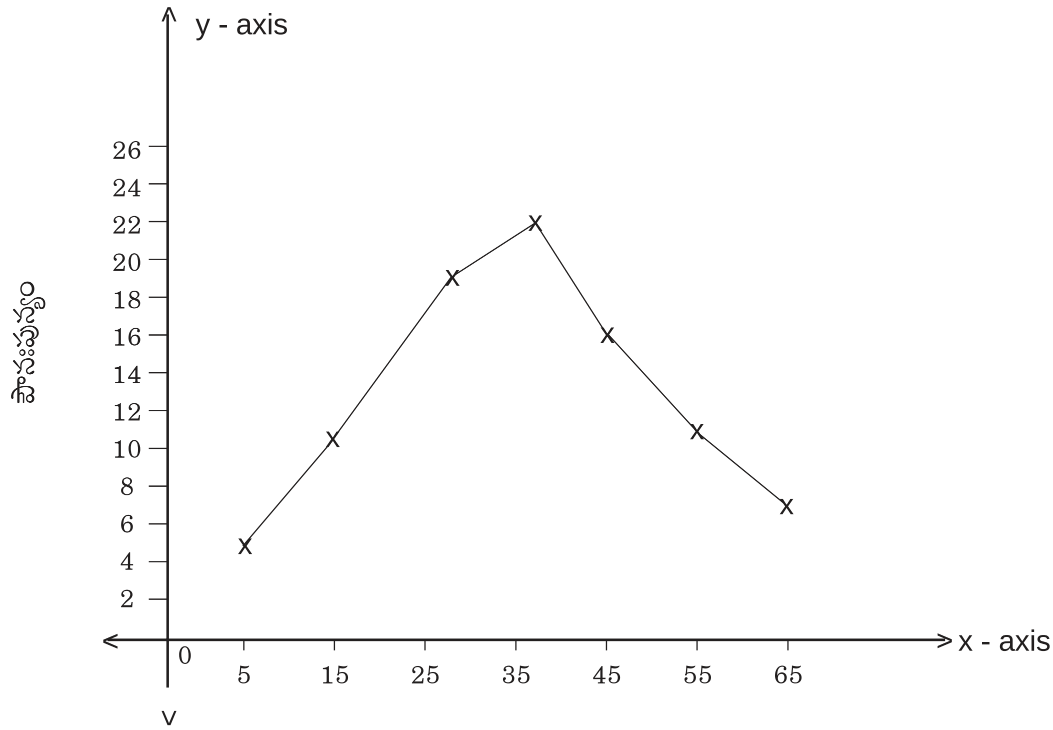
గమనిక :–

1. పౌనఃపున్య పట్టికలో తరగతి అంతరం తక్కువవైతే పౌనఃపున్య బహుభుజి నిర్మాణంలో వివిధ బిందువులను కలిపే సరళరేఖలు వక్రంగా ఉజ్జాయింపు అవుతాయి. ఆ బిందువులను సరస వక్రంగా కలుపవచ్చు. ఆవిధమైన వక్రాన్ని పౌనఃపున్య వక్రం అంటారు. 2. అంశాల సంఖ్య ఎక్కువగా ఉండి తరగతి అంతరం తక్కువగా ఉన్నపుడు పౌనఃపున్య బాహుభుజి దాదాపుగా పౌనఃపున్య వక్రమని భావించవచ్చు.

ఉదా :

తరగతి	0–10	10–20	20–30	30–40	40–50	50–60	60–70
పౌనఃపున్యం	5	11	19	21	16	10	8

తరగతి మధ్యవిలువ	పౌనఃపున్యం
5	5
15	11
25	19
35	21
45	16
55	10
65	8
	90



2.3.7.4. సంచిత పౌనఃపున్య వక్రాలు (Cummulative Frequency Curves) :

తరగతి యదార్థ హద్దులకు, వాటికంటే ఎక్కువ లేదా తక్కువగా ఉండే సంచిత పౌనఃపున్యాలకు నిర్మించిన వక్రాలను 'సంచిత పౌనఃపున్య వక్రాలు' అంటారు.

ఆరోహణ సంచిత పౌనఃపున్య విభాజనానికి నిర్మించిన వక్రాన్ని 'ఆరోహణ సంచిత పౌనఃపున్య వక్రం' అని, సంచిత పౌనఃపున్య విభాజనానికి నిర్మించిన వక్రాన్ని 'అవరోహణ సంచిత పౌనఃపున్య వక్రం అని అంటారు. వీటి సహాయంతో చలరాశి ఏదైనా ఒక విలువకు ఎగువగాని, దిగువన గాని ఎంత పౌనఃపున్యం ఉందో తెలుసుకోవచ్చు. ఆరోహణ (అవరోహణ) సంచిత పౌనఃపున్య పట్టిక తయారు చేసిన తరువాత ఎగువహద్దు (దిగువహద్దు) అనురూప సంచిత పౌనఃపున్య విలువలను సూచించే బిందువలును గళ్ళకాగితంపై గుర్తించి ఆ బిందువులను వరుక్రమంతో కలపగా వచ్చే రేఖాచిత్రాన్ని అరోహణ (అవరోహణ) సంచిత పౌనఃపున్య వక్రం అంటారు.

తరగతి	10-19	20-29	30-39	40-49	50-59
పౌనఃపున్యం	20	24	15	5	2

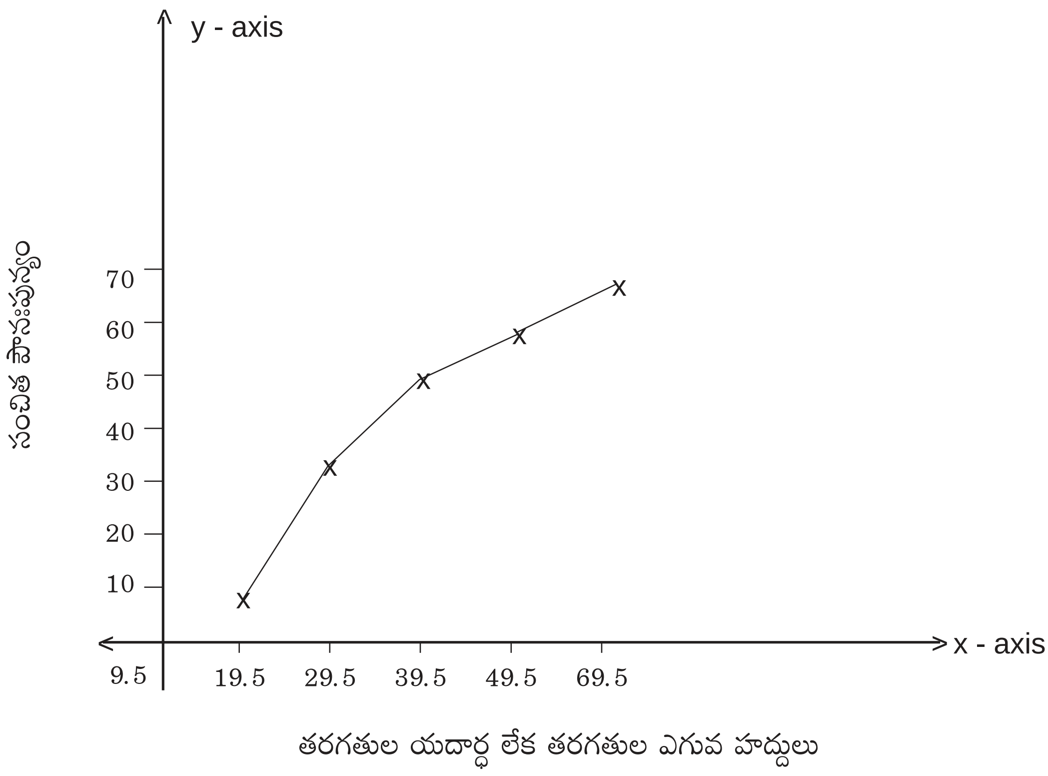
ఆరోహణ సంచిత పౌనఃపున్య విభాజన పట్టిక
(Lessthan Cumulative Frequency Distribution Table)

తరగతి ఎగువ హద్దు	సంచిత పౌనఃపున్యం
19.5	20
29.5	44 (20+24)
39.5	59 (20+24+15)
49.5	64 (20+24+15+5)
59.5	66 (20+24+15+5+2)

స్కేలు

x – అక్షంపై 1 సెం.మీ. = 10 యూనిట్లు

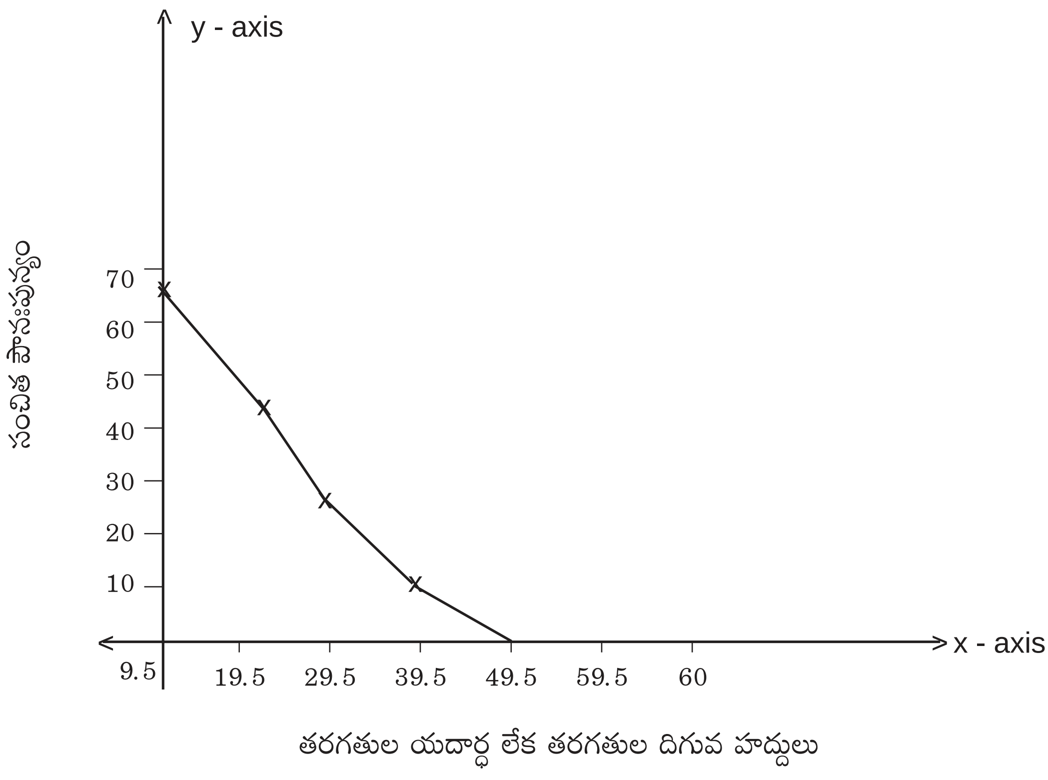
y – అక్షంపై 1 సెం.మీ. = 10 యూనిట్లు



ఆవరోహణ సంచిత పౌనఃపున్య విభాజన పట్టిక
(Gretertha Cumulative Frequency Distribution Table) :

తరగతి ఎగువ హద్దు	సంచిత పౌనఃపున్యం
9.5	66 (2+5+15+24+20)
19.5	46 (2+5+15+24)
29.5	22 (2+5+15)
39.5	7 (2+5)
49.5	2

స్కేలు
x – అక్షంపై 1 సెం.మీ. = 10 యూనిట్లు
y – అక్షంపై 1 సెం.మీ. = 10 యూనిట్లు



2.3.8. సంభావ్యత (Probability) :

"సాధారణ విచక్షణను గణనంలోకి మార్చడమే సంభావ్యత".

– పియరి సైమన్ లాప్లాస్ (1749–1827)

నిత్యజీవితంలో మనం ఏదైన ఒక విషయం జరిగే అవకాశాలను వ్యక్తీకరించుటకు, అధిక సంభవం, అసంభవం, అల్పసంభవం అంటి పదాలు ఉపయోగిస్తాము.

చాలా సందర్భాలలో మనం నిర్ణయాలు తసుకొనవలసి వచ్చినపుడు గత అనుభవాలను, స్వీయ విచక్షణను ఉపయోగిస్తాము. భవిష్యత్తులో జరగబోయే విషయాలు మనం తీసుకునే నిర్ణయాలకు అనుగుణంగా జరగవచ్చు లేదా కొన్ని సార్లు జరగకపోవచ్చు.

ఉదా : ఎన్నికల ఓటింగ్ తర్వాత ఎగ్జిట్ పోల్‌ని నిర్వహిస్తారు. దీనిని ఒక పద్ధతి ప్రకారం ప్రతిచయనాలను ఎంపిక చేసుకొని ఓట్లేసిన ప్రజలను దేనికి ఓటేసినారో తెలుసుకొని ఆ సమాచారాన్ని క్రోడీకరించి విశ్లేషిస్తారు. దీనిని ఉపయోగించి ఏ అభ్యర్థికి ఎన్నికలలో గెలుపొందే అవకాశం ఉందో ఫలితాలు కంటే ముందే ఊహిస్తారు.

మనం నిత్య జీవితంలో పొడవు, ద్రవ్యరాశి లాంటి వాటిని ఏవిధంగా కొలుస్తామో, భవిష్యత్తులో సంభవించే సంఘటనలు, అవి జరిగే అవకాశం లేదా జరగకపోయే అవకాశాన్ని కూడా మాపనం చేయడానికి ప్రయత్నిస్తాము. ఈ మాపనం మనం క్రమబద్ధంగా నిర్ణయాలు తీసుకోవడానికి ఉపయోగపడుతుంది.

కాబట్టి ఒక విషయం ఏర్పడడానికి ఎన్ని రకాల అవకాశాలు ఉన్నాయో గుర్తించడానికి మనం "సంభావ్యతను" అధ్యయనం చేస్తాము.

ఉదా :–

ఒక ఆట ఆడే ముందు మనం ఒక నాణేన్ని ఎగురవేయడం జరుగుతుంది. ఆ టాస్ ఫలితం మన ఆధీనంలో ఉండదు. ఒక్కడ బొమ్మ లేక బొరుసు ఏర్పడుటకు సమాన అవకాశం ఉంది. కాని ఖచ్చితంగా ఏది ఏర్పడుతుందో మాత్రం చెప్పలేము.

ఉదాహరణకు ఒక నాణెమును 100 సార్లు ఎగురవేసినపుడు 55 సార్లు బొమ్మ, 45 సార్లు బొరుసు పడితే బొమ్మ పడే సందర్భాలు (సంభవాన్ని) ప్రామాణికంగా చేస్తే 100కి 55 సార్లు అనగా 55/100 =0.55. అదే రీతిలో బొరుసు పడే సంభావ్యం 45/100 = 0.45.

ఇట్లు ప్రయోగపూర్వక ఫలితాలను ఆధారంగా చేసుకొని లెక్కించిన సంభావ్యతను "ప్రయోగిక సంభావ్యత" అంటారు. ఈ ప్రయోగిక సంభావ్యత (Experimental Probabilty) అంచనాకు ఒక ప్రయోగము, దాని ఫలితాల ఆధారము. అనగా ఇదే ప్రయోగాన్ని మరల 100 సార్లు చేసినపుడు ఇదే సంభావ్యత ఏర్పడుతుందని చెప్పలేము. స్వల్ప బేధము ఏర్పడవచ్చును.

A అనే ఒక ఘటన సంభావ్యత

$$P(A) = \frac{\text{A యొక్క అనుకూల పర్యావసానాల సంఖ్య}}{\text{మొత్తం సాధ్యమయ్యే పర్యావసానాల సంఖ్య}}$$

ఒక ఘటన యొక్క సంభావ్యత ఎల్లప్పుడు 0 నుండి 1 మధ్యలో ఉంటుంది. (0 మరియు 1 కలిపి)

ఒక ఘటన యొక్క సంభావ్యత ≤ 1

నిశ్చితమైన ఘటన యొక్క సంభావ్యత = 1

అసంభవం అయిన ఘటన యొక్క సంభావ్యత = 0

2.4. బీజగణితం

ప్రపంచ పరిణాత్మక దృక్పథం సుస్పష్టం చేయడానికి సృష్టించిన బౌద్ధిక ఉపకరణం, బీజగణితం.

– ఆల్‌ఫ్రెడ్ నార్త్ వైట్ హెడ్

విషయక్రమం :

2.4.0 : లక్ష్యాలు
2.4.1 : పరిచయం
2.4.2 : అంకెలకు బదులు అక్షరాల వినియోగం
2.4.3 : అవ్యక్తరాశుల వినియోగం – సందర్భాలు
2.4.4 : బీజీయ సమాసాలు – సమీకరణాలు, సర్వసమీకరణాలు
2.4.5 : రేఖీయ (ఏకఘాత) సమీకరణాల సాధన
2.4.6 : అమరికల భావన
2.4.7 : అమరికల ఫలితాల సార్వత్రీకరనలో అవ్యక్తరాశుల వినియోగం
2.4.8 : ప్రమేయ సంబంధాలు
2.4.9 : గణిత అన్వేషణ
2.4.10 : బీజగణితీయ ఆలచనపై ఆధారపడ్డ ప్రహేళికలు

2.4.0 : లక్ష్యాలు

ఈ అధ్యాయం చదివిన తరువాత ఉపాధ్యాయ విద్యార్థి

- బీజగణిత భావనలు, బీజగణిత అభివృద్ధికి సంబంధించిన చారిత్రక వివరాలు తెలుసుకుంటాడు.
- అంకెలకు బదులు అక్షరాలను వినియోగించే విధానం పట్ల అవగాహన పొందుతాడు.
- అవ్యక్త రాశులను వినియోగించే సందర్భాల గురించి అవగాహన పొందుతాడు.
- రేఖీయ సమీకరణాల సాధన చేయగల్గుతాడు.
- గణిత వినోదాలను అభినందిస్తాడు.
- గణిత అన్వేషణ దిశగా స్ఫూర్తి పొందుతాడు.
- అమరికల భావన, ఫలితాల సార్వత్రీకరణ గురించి అవగాహన పొందుతాడు.

2.4.1 : పరిచయం :

మానవ జీవితానికి వైవిధ్యతను కల్గించు అంశాలలో గణితం ప్రముఖమైనది. విజ్ఞానంతో పాటు తార్కికత, అన్వేషణ, పరిశీలన, అన్వయం, గణితశాస్త్ర అధ్యయన ఫలితాలుగా మనిషికి అందుతాయి. గణితశాస్త్రపు శాఖలైన రేఖాగణితం, అవగణితం, బీజగణితం మొదలైనవి నిత్యజీవితంలోని అనేక సందర్భాలలో ఉపయోగపడతాయి. కాలము–పని, దూరం, లాభనష్టాలు వంటి గణనలకు అంకగణితం, ద్విమితీయ, త్రిమీతయ పరిమాణాల వైశాల్యాలు కనుగొనటానికి రేఖాగణితం ఉపకరిస్తాయి. వాటికి భిన్నంగా నూతన సందర్భాలలో సమస్య సాధనకు బీజగణితం మనిషికి ఆసరాగా నిలుస్తుంది. అజ్ఞాత రాశుల సాధనలో నేర్పును కలిగిస్తుంది. తెలియని రాశులను బీజీయ అక్షరములచే సూచించటం బీజగణితంలో ప్రధాన అంశంగా ఉంటుంది. అయితే ఒక అంకెకు లేదా కొన్ని అంకెల తరగతికి ప్రాతినిధ్యం వహించడానికి ఒక అక్షరాన్ని ఉపయోగించడం కన్నా బీజగణిత భాషకు ఎక్కువ

ప్రమేయం ఉంది. ఈ విషయాల గురించి భారతదేశంతో పాటు వివిధ పాశ్చాత్య దేశాల్లో జరిగిన పరిశోధనల బీజగణిత విస్తృతిని ఎంతగానో పెంచాయి. ఈ అంశాలన్నింటిని సంక్షిప్తంగా ఈ విభాగంలో అధ్యయనం చేద్దాం.

2.4.1.1 బీజగణిత అభివృద్ధి – వికాసం :

నేడు ఆల్జీబ్రాగా భావిస్తున్న గణితశాస్త్ర విభాగాన్ని భారతీయులు బీజగణితం అని పేర్కొన్నారు. బ్రహ్మగుప్త మొదటిసారిగా (వ.శ. 598) అంకగణితం (పాటీగణితం) నుండి దీనిని వేరు చేసి ఒక ప్రత్యేక గణితశాఖగా చూపి, ఆ విభాగాన్ని 'కుట్టక' అనే పేరుతో వ్యవహరించాడు. ప్రాచీనులు దీనిని 'అవ్యక్తగణితం' అనే పేరుతో వ్యవహరించారు. ఈ గణితశాస్త్ర విభాగానికి 'బీజగణితం' అనే పేరుతో వ్యవహారరూపంలోకి తీసుకువచ్చిన మొదటి గణితశాస్త్రవేత్త "పృధూదకస్వామి" (వ.శ.860) భాస్కరాచార్య (వ.శ.1150) బీజగణితాన్ని సాంకేతికాలతో నిర్వహించే సంఖ్యాశాస్త్రంగా భావించారు.

సంక్షిప్తత, సాంకేతికత అనేవి బీజగణితానికి మూలాలుగా భావించవచ్చు. బీజగణితం విశ్లేషణ, వ్యక్తీకరణల్లో మనిషికి శిక్షణ ఇస్తుంది. మానసిక శిక్షణ కంటే అధికమైన ఫలితాన్ని అందిస్తుంది. బీజగణితం లేకుండా వైజ్ఞానిక శాస్త్ర సత్యాలను సాధారణీకరణం చేయటం, సూక్ష్మరూపం, సూత్రరూపాల్లో రాసి మరింత అభివృద్ధి పరచటం సాధ్యంకాదు. గణితశాస్త్ర సాధారణ ఉద్దేశాలకు బీజగణితం మూలాధారంగా నిలుస్తుంది.

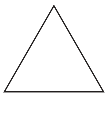
బీజగణితంలో ప్రధానంగా తెలియని రాశులను బీజీయ అక్షరాలచే సూచిస్తాము. కొన్ని గణిత సమస్యలలో తెలియని రాసులను బీజీయ అక్షరాలతో సూచించి ఆ సమస్యలను వివిధ పద్దతులలో సాధించటం జరుగుతుంది. ఈ పద్ధతులు నిత్యజీవితంలోని అనేక గణిత సమస్యలు, ప్రహేళికలను సులభంగా సాధించటంలో ఉపయోగ పడుతుంది.

సంస్కృతంలో అక్షరాలను 'బీజాలు' అంటారు. అంకెలస్థానంలో అక్షరాలు అనగా బీజాలు వాడే గణితశాస్త్ర శాఖను బీజగణితం అంటారు. ఎంతపెద్ద భావన అయినా సులభంగా ఒక సూత్రంలో ఇమిడ్చి చెప్పటం ఈ శాఖ ప్రత్యేకత. బబీజగణితాన్కి ఇంగ్లీఉలో 'ఆల్‌జీబ్రా' అంటాము. 'ఆల్‌ఖోవారిజ్మి' అనే అరబ్ గణిత పండితుడి గౌరవార్థం ఈ శాఖకు అతడు రాసిన పుస్తకం 'ఆల్‌జబర్ అల్‌మఖాబలా' పేరును సూచించే 'ఆల్‌జీబ్రా' అనే పదం పెట్టబడింది. ఈ శాఖలో విస్తృతంగా అక్షరాలు, సంకేతాలు, గుర్తులు, సూత్రాలు, సంబంధాలు వాడతాం. బీజగణితంలో కొన్ని ప్రాధమిక భావనలు చిన్న వయస్సులోని ప్రాధమికస్థాయి విద్యార్థులకు కూడా సులభంగా బోధపడతాయి. అందువల్ల బీజగణితాన్ని పాఠశాలలో ప్రాధమిక స్థాయిలోనే విద్యాప్రణాళికలో ప్రవేశపెట్టడం జరిగింది.

గ్రీకు దేశానికి చెందిన దయాఫాంటస్‌ను బీజగణిత పితామహుడుగా పేర్కొనవచ్చు. అర్థమెటికా పేరుతో ఈయన రాసిన సంకలనాలు ప్రంపచ ప్రసిద్ధి పొందాయి. ఇవి మొత్తం 13 సంకలనాలు కాగా ప్రస్తుతం 6 మాత్రమే వాడుకలో ఉన్నాయి. ప్రపంచ ప్రసిద్ధి పొందిన ఫెర్మా చివరి సిద్ధాంతానికి దయాఫాంటస్ ప్రతిపాదించిన బీజగణిత భావనలు పునాదిగా నిలిచాయి.

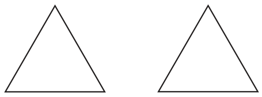
2.4.1.2. అమరిక :

ఒక త్రిభుజం ఏర్పరచిన ఎన్ని అగ్గిపుల్లలు కావాలి?



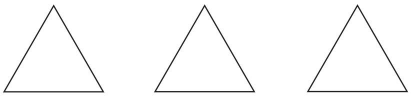
కావలసిన అగ్గిపుల్లలు = 3

అట్టి రెండు త్రిభుజాలు ఏర్పరచడానికి ఎన్ని అగ్గిపుల్లలు కావాలి ?



కావలసిన అగ్గిపుల్లలు = 6

మూడు త్రిభుజాలు ఏర్పరచడానికి ఎన్ని అగ్గిపుల్లలు కావాలి?



కావలసిన అగ్గిపుల్లలు = 9

ఇలా ఎన్ని పటాలకు ఎన్ని అగ్గిపుల్లలు కావాలో పట్టిక ద్వారా చూద్దాం.

అగ్గిపుల్లలు	3	6	9	-----
పటాల సంఖ్య	1	2	3	-----

పటాల సంఖ్య పెరిగినపుడు అగ్గిపుల్లలు సంఖ్య పెరుగుతుంది. పటాలసంఖ్య 'x' అయితే అగ్గిపుల్లలు గా రాయాలి. అంటే అమరికను బట్టి సూత్రాన్ని రూపొందించవచ్చు.

ఉదాహరణలో 'x' అంటే చరరాశి

అయితే 3×1 = 3

అయితే 3×2=6 అవుతుంది.

కు ఇచ్చే విలువను బట్టి ఫలితం వస్తుంది.

2.4.2. అంకెలకు బదులు అక్షరాల వినియోగం :

భారతీయ గణిత శాస్త్రజ్ఞుడైన ఆర్యభట్ట (వ.శ.499) తన ఆర్యభట్టీయ గ్రంథంలో అవ్యక్తరాశులకై అక్షరాలని వాడాలి అని సూచించారు. బ్రహ్మగుప్తుడు కూడా ఇదే సిద్ధాంతాన్ని తన రచనల్లో స్పష్టం చేశాడు. తరువాతి కాలంలో జరిగిన పరిశోధనల్లో కూడా వీరిద్దరి ప్రతిపాదనలే విస్తృతంగా ఉపయోగించబడ్డాయి. ఫలితంగా గణిత సమస్యలలో తెలియని రాశులను బీజీయ అక్షరాలతో సూచించటం, ఆ సమస్యలను వివిధ పద్ధతులలో సాధించటం వాడుకలోనికి వచ్చింది. కొన్ని ఉదాహరణలను ఇప్పుడు పరిశీలిద్దాం.

ఉదాహరణ 1 :

ఒక పుస్తకం ధర రూ. 10 అయితే పుస్తకాల దర ఎంత ?

అంటే రూ. 10 = 10 రూ. అనేది సమాధానం.

పైన తెలిపిన ఉదాహరణలో విలువ ఎంత ఇస్తే అన్ని పుస్తకాల దర తెలుస్తుంది.

అయితే 1×రూ. 10 = రూ. 10

అయితే 5×రూ.10 = రూ. 50

అంటే విలువ ఎంత ఇస్తే అన్ని పుస్తకాల ధర తెలుసుకోవచ్చు. దీనినిబట్టి సూత్రీకరణ చేయవచ్చు. విలువ ను చలరాశి లేదా చరరాశి అంటారు.

జ్యామితీయ ఆకారాల సూత్రాల నిర్మాణంలోనూ బీజగణితాన్ని ఉపయోగిస్తారు.

ఉదాహరణ 2 :

దీర్ఘచతురస్రం పొడవు 5 సెం.మీ., వెడల్పు, 3 సెం.మీ అయితే వైశాల్యం ఎంత ?

గ్రాఫ్‌పేపర్‌ను ఉపయోగించి దీర్ఘచతురస్ర వైశాలం 15 చ.సెం.మీ. అని చెప్పవచ్చు.

అదేవిధంగా

పొడవు	వెడల్పు	వైశాల్యం
10 సెం.మీ	7 సెం.మీ	750 చ.సెం.మీ
4 సెం.మీ	3 సెం.మీ	12 చ.సెం.మీ

పై ఉదాహరణ ఆధారంగా దీర్ఘచతురస్ర వైశాల్యం పొడవు×వెడల్పు అనే సూత్రాన్ని రాబట్టవచ్చు.

పొడవు =

వెడల్పు = అయిన

వైశాల్యం అని రాయవచ్చు.

సూక్ష్మీకరణ, సూత్రీకరణ ద్వారా అని గ్రహిస్తాము.

అదేవిధంగా చతురస్ర చుట్టుకొలత 4× అని అంటే భుజమని విద్యార్థులకు ఉపాధ్యాయ విద్యార్థి [illegible]

బోధించవచ్చు.

ఈవిధంగా జ్యామితీయ ఆకారాలలో సూత్రాలను చెప్పేటపుడు చరరాశులను ఉపయోగించి సూత్రీకరణ చేస్తాము. బీజగణితంలోని సమస్యలను ఫలితాలు రాబట్టడానికి ఈ సూత్రీకరణ లేదా సామాన్యీకరించటం ఎంతగానో ఉపయోగపడుతుంది.

ఉపయోగం :

సూత్రీకరణ లేదా సామాన్యీకరించుటలో అవ్యక్తరాశులకు బదులుగా చరరాశులను ఉపయోగించుట ద్వారా

- సులభంగా సమస్యలను సాధించవచ్చు.
- విద్యార్థుల ఊహ / సందిగ్ధానికి తావు ఉండదు
- తెలియని సంఖ్య తెలిసినట్లుగా అని భావించి సమస్యను సాధిస్తారు.
- సందేహాలు లేకుండా బోధన అభ్యసన సాగుతుంది.
- బోధనాభ్యసన కార్యక్రమం సఫలీకృతమవుతుంది.

2.4.3 అవ్యక్త రాశుల వినియోగం - సందర్భాలు :

అంకగణితము, బీజగణితంగా మారడానికి సంకేతాలు, సంకేతాలతో కూడిన వివేచన ఒక ప్రధాన కారణం. పరిమాణాలను, పరిమాణాత్మక పరిక్రియలను తెలపడానికి బీజగణితం సంకేతాలను, సాంప్రదాయాలను ఉపయోగిస్తుంది. గణితానికి సంబంధించిన ప్రత్యేక గ్రంథాల్లో చెప్పిన విషయాన్ని సామాన్యభాషలో చెప్పాలంటే

పుస్తకం పరిమాణం ఎంతగా పెరుగుతుందో చెప్పలేం.

ఉదా :

$2ab^2 + ab$ అనే ఒక సమాసాన్ని మాటల్లో చెబితే "ఒక అంకెకు రెండు రెట్లు అయిన దానిని, వేరొక అంకెను, దానితోనే హెచ్చవేగా వచ్చు దానితో గుణించగా వచ్చు లభానికి, మొదటి అంకె, రెండవ అంకెల గుణకార లబ్ధము కలుపగా వచ్చునది" – అని చెప్పవలసి వస్తుంది. కాని బీజగణిత భాష చక్కని గ్రహణీయతతో పాటు సంక్షిప్తతను అందిస్తుంది.

బీజగణితంలో అవ్యక్తరాశులు లేక చరరాశులు వాటి వినియోగపు సందర్భాలు కొన్ని పరిశీలిద్దాం.

చరరాశుల వినియోగం :

'సూర్యుడు పద్మములను వికసింపచేసినట్లు ప్రాచీన ఋషులు అనేక గుర్తులు, సాంకేతికాలతో ఉండే విశ్లేషణతో గణితశాస్త్రాన్ని ప్రకాశమానం చేశారు. ఇదే ఇపుడు బీజగణితమనే పేరుపొందింది"

– భాస్కరాచార్య

చరరాశులను ప్రాచీనకాలంలో అంకెలకు బదులు క, ఖ, గ.... తదితర అక్షరాలను ఉపయోగించేవారు. క్రమంగా 16వ శతాబ్దం నాటికి అంకెలకు బదులు $a, b, c, -----x, y, z$ వంటి ఆంగ్ల అక్షరాలను ప్రయోగించడం మొదలైంది.

చతుర్విధ ప్రక్రియలకు వచ్చేసరికి ప్రాచీనకాలంలో

కూడికకు – యు

తీసివేతకు – క్ష

హెచ్చవేతకు – గు

భాగహారానికి – భా అనే అక్షరాలు వాడుతారు.

ప్రస్తుతం

కూడికకు – +

తీసివేతకు – -

హెచ్చవేతకు – ×

భాగాహారానికి – ÷ వంటి సాంకేతిక గుర్తులను ఉపయోగిస్తున్నారు.

బీజగణితంలో సమీకరణాలు రాయటానికి, సమాసంలో ఒక పదం రూపొందించటానికి చరరాశులను ఉపయోగిస్తారు. బీజగణితంలో చరరాశుల వినియోగం ఎక్కడ, ఎప్పుడు ఎలా వినియోగిస్తారో పరిశీలిదా&ం.

గుణకాన్ని బట్టి చరరాశి విలువ మారుతూ ఉంటుంది. చరరాశి ద్వారానే బీజీయ సమాసం యొక్క పరిమాణాన్ని చెప్పలగము. సంఖ్యా ప్రక్రియలైన సంకలనం, వ్యవకలనం, గుణకారం, భాగహారం, వీటికి కూడా వర్తిస్తాయి. అమరికలలోని పటాల మధ్య గల సంబంధాన్ని తెలిపేందుకు 1,2, 3..... మొదలగు విలువలు ఇచ్చినపుడు ఒక అక్షరాన్ని సూచిస్తాము. ఆ అక్షరమే 'చరరాశి'.

చరరాశి :

అంకెలకు వాడబడు అక్షరములకు నిర్ణీత విలువలుండవు. సందర్భమును బట్టి ఏ విలువైనా ఇవ్వవచ్చు లేక పొందవచ్చు కాని ఒక సదర్భంలో ఇచ్చిన విలువలు ఆ సందర్భం తుదివరకు మారవు. అందుచే వీటిని

చలరాశులు లేక చర రాశులు అంటాం.

ఉదా :

విలువ $x = 1$ అయిన $3 \times 1 = 3$

అయిన $3 \times 2 = 6$

చరరాశిని గూర్చి కొన్ని ముఖ్యమైన అంశాలు :

- చరరాశికి అనేక విలువలలను ఇవ్వవచ్చు.
- చరరాశిని కలపటానికి మొదలగు అక్షరాలను ఉపయోగించవచ్చు.
- రేఖాగణితం, అంకగణితాలలో కూడా వివిధ సూత్రానలు రూపొందించటానికి చరరాశులను ఉపయోగిస్తారు.

స్థిరరాశి :

అంకెల విలువలు మారవు. కావున వాటిని స్థిరరాశులు అంటాం. అట్లే స్థిరాశులను సూచించు అక్షరాలను కూడా స్థిరరాశులు అంటాం.

ఉదా : 2,5,4.....

బీజగణితం :

గుణకం :

ఒక పదంలోని స్థిరరాశుల లబ్ధాన్ని అందలి చరరాశుల లబ్ధం 9x7y3z యొక్క గుణకము అంటారు.

ఉదా :

3xy అనేది 3x x x y

కావున xy యొక్కగుణకం 3.

ఇక్కడ లను బీజీయగుణకాలు అంటారు.

సమాసం :

సంకలన, వ్యవకలన గుర్తులతో కలిసియున్న పదాల సముదాయానిన సమాసం అంటాం. సమాసంలో ఒకే పదము కూడా ఉండవచ్చు.

ఉదా :

సజాతి పదాలు :

బీజీయ సమాసంలోని పదాలన్నీ ఒకే బీజీయ గుణకాన్ని కలిగి ఉటే వాటిని సజాతి పదాలు అంటారు.

ఉదా :

విజాతి పదాలు :

బీజీయ సమాసంలోని పదాలు వేర్వేరు బీజీయ గుణకం కలిగి ఉంటే వాటిని విజాతి పదాలు అంటారు.

ఉదా : $2x^2, 5y$

4+3, 5−2.... మొదలగు సంఖ్యల సముదాయాన్ని సంఖ్యాసమాసాలు అంటాం. ప్రతిసంఖ్యాసమాసము ఒక సంఖ్యను సూచించును. సంఖ్యలను గూర్చి చేయు వివరణను సంఖ్యావాక్యము అంటాం.

ఉదా :

4+3 = 7 అనేది ఒక సంఖ్యావాక్యము. ఇది సత్యము.

2−5 = 9 అనేది ఒక సంఖ్యావాక్యము. ఇది అసత్యము.

కావున సంఖ్యా వాక్యములు సత్యము లేక అసత్యము కావచ్చు.

$x+3=10$ అను వాక్యములో విలువ తెలియనంతవరకు ఇది సత్యమో, అసత్యమో చెప్పలేము. కాబట్టి వాక్యాలను అనిశ్చిత వాక్యాలు అంటాం.

సమీకరణము :

సమానత్వము గుర్తు (=) కల్గి ఉన్న అనిశ్చిత వాక్యమును సమీకరణము అంటాం.

ఉదా :

అవ్యక్తరాశులను అంకగణితం, జ్యామితీయ అంశాల్లో వినియోగించు సందర్భాలను ఒకటి రెండు పరిశీలిద్దాం.

ఉదాహరణ 1 :

రాశులను సమానం చేయుట అనేది అనుపాతం

అంటే అనే రెండు నిష్పత్తులను

$a:b, c:d$ అని రాసిన a, b, c, d లు అనుపాతంలో ఉన్నాయి అని చెప్పవచ్చు.

ఉదాహరణ 2 :

రామునివద్ద గల ధనంలో 15 రూపాయలు ఖర్చు చేసి మిగిలినది భీమునకు ఇచ్చెను. భీముడు ఆ ధనమునకు 10 రూ. కలిపి సోమునకు ఇచ్చిన ప్రస్తుతం సోముని వద్ద ఎంత ధనము ఉంది ?

రాముని వద్ద ఉన్నది తెలియదు. కావున 'x' అనుకొనిన రాము − రూ.

ఖర్చు చేసినది − రూ. 15

మిగిలినది =

భీముడు రూ. 10 కలుపగా

భీముని వద్ద ఉన్నది =

ఇది సోమునకు ఇచ్చెను.

కావున సోముని వద్ద ఉన్నది = రూ.

ఎంతో ఇచ్చిన సోమునివద్ద సొమ్ము తెలియదు.

సోము వద్ద సొమ్ము ఎంతో ఇచ్చిన విలువ తెలియును.

ఉదాహరణ 3 :

ఒక దీర్ఘ చతురస్రాకార పార్కు పొడవు, వెడల్పు కంటే 10 మీ. ఎక్కువ. అయిన దాని వైశాల్యము ఎంత?

పొడవు = అవుతుంది

వైశాల్యం = పొడవు × వెడల్పు

=

= ච.మీ.

x విలువ ఇచ్చిన వైశాల్యం వస్తుంది.

వైశాల్యం ఇస్తే విలువ కనుక్కోవచ్చు.

అంకగణితంలో లేక జ్యామితిలో కూడా సూత్రాలను ఉపయోగించి విలువలను కనుగొనటానికి బీజగణితం ఉపయోగపడుతుంది. అందుకే అంకగణితం యొక్క ఉత్తమమైన సమీక్ష బీజగణితంలోనే ఉంది అని కెజోరి ప్రతిపాదించారు.

సంకలనం, వ్యవకలనం, గుణకారం మరియు భాగాహారం లాంటి అంశాలో కూడా బీజగణితాన్ని ఉపయోగిస్తారు. సంకలన తత్సమాంశం గుణకార తత్సమాంశం లాంటి అంశాలలోనూ బీజగణితమే ఉపయోగ పడుతుంది.

2.4.4 బీజియ సమాసాలు – సమీకరణాలు , సర్వ సమీకరణాలు

సమీకరణం :

అసమీకరణం :

ఎక్కువ లుక తక్కువ గుర్తు కలిగిన సత్య ప్రవచనాన్ని అసమీకరణం అంటారు.

సర్వ సమీకరణం : ఒక సమీకరణం యొక్క రెండు వైపులు ఉండే సమాసములందు గల చరరాశుల యొక్క అన్ని విలువలకు ఆ సమాసములకు సమానం అయితే ఆ సమీకరణాన్ని సర్వసమీకరణం అంటారు.

[illegible] $+ (2)^2$

ఉదాహరణ :

a, b విలువలు ఏ విలువ తీసుకున్నా ఈ సర్వ సమీకరణంలో రెండువైపులా సమానమైన విలువలు వస్తాయి.

$a = 3, b = 2$ అయినపుడు

$$(5)^2 = 9 + 12 + 4$$

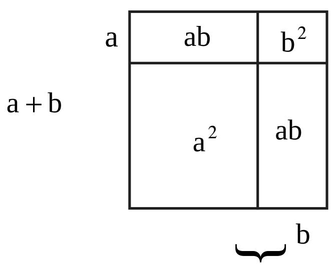
$$25 = 9 + 16$$

అనేది ఒక సర్వసమీకరణం అనే సూత్రాన్ని జ్యామితీయ పరంగా చూపవచ్చు.

$(a+b)$ అనే భుజం గల చతురస్రం ఉంది అని అనుకుందాం

దాని వైశాల్యం = భు × భు

=



చతురస్రాన్ని నాలుగు భాగాలుగా చేద్దాం

అందులో రెండు చతురస్రాలు రెండు దీర్ఘ చతురస్రాలు ఉంటాయి. చతురస్రాల వైశాల్యం పటంలో చూపినట్లుగా

a^2, b^2 అయితే దీర్ఘ చతురస్రాల వైశాల్యం ab, ab అవుతుంది.

$(a+b)$ అనే చతురస్ర వైశాల్యం

= మొదటి దీర్ఘ చతురస్ర వైశాల్యం + రెండవ చతురస్ర వైశాల్యం

+ మూడవ చతురస్ర వైశాల్యం + నాల్గవ దీర్ఘచతురస్ర వైశాల్యం

$= ab + b^2 + a^2 + ab$

$= a^2 + 2ab + b^2$

$\therefore (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

ఈ విధంగా అంకగణితలోని సర్వసమానమైన విలువలు తెలియజేయడానికి కూడా బీజగణితం ఉపయోగపడుతుంది.

ఉపాధ్యాయ విద్యార్థి సమీకరణాలను బోధించేటపుడు తగిన నమూనాలను ఉపయోగించి సూత్రాల భావన స్థిరమయ్యేలా చూడాలి. అందుకు అభ్యసన మరిన్ని ఉదాహరణలు చేయించడం ద్వారా విద్యార్థులలో ఈ సమీకరణాల జ్ఞానం వినియోగం జరుగుతుంది.

గణితంలో మరియొక ప్రధానమైన అంశం సమీకరణాలను రాయడం . ఉదాహరణకు రెండు వరుస సంఖ్యల లబ్ధం 42 అయిన వాటి మొత్తం ఎంత? అనే ప్రశ్నలో సమీకరణం ఏవిధంగా రాయవచ్చు.

$$p = \frac{1}{6}$$

సరిచూచుట :

$(a+b)^2$

$30p + 5 = 10$

$30x\frac{1}{6} + 5 = 10$

$5 + 5 = 10$

$10 = 10$

అంటే సాధించిన విలువ సరియైనది

ఉదాహరణ 2 :

$\frac{x+7}{3x+16} = \frac{4}{7}$ సూక్ష్మీకరించుము.

$$\frac{x+7}{3x+16} = \frac{4}{7}$$

$7(x+7) = 4(3x+16)$

$7x + 49 = 12x + 64$

$49 - 64 = 12x - 7x$

$-15 = 5x$

$\frac{-15}{5} = 6$

$x = -3$

ఉదాహరణ (1), (2) సందర్భాలలో విలువను ఏవిధంగా సాధించవచ్చును అనే విషయాన్ని తెలుసుకున్నాము.

సూక్ష్మీకరించుట :

సజాతి పదాలను సంకలన వ్యవకలన, గుణకార మరియు భాగాహార పద్ధతుల ద్వారా ఏకపదంగా మార్చుటకు సూక్ష్మీకరించుట అంటారు.

ఉదా :

అడ్డ గుణకారము చేయగా

ఈ విధంగా సూక్ష్మీకరించుట ద్వారా అవ్యక్తరాశుల విలువలను కనుగొనవచ్చు. ఎలిమెంటరీ స్థాయి నుండీ విద్యార్థి సెకండరీ స్థాయికి చేరుకొనేటప్పుడు రెండు చరరాశులతో కలిగిన ఏకఘాత సమీకరణాల గురించి తెలుసుకుంటాడు.

[illegible]

$$77y - 22 = 18y + 21$$

$$77y - 18y = 21 + 22$$

$$59y = 43$$

$$y = \frac{43}{59}$$

2.4.5 రేఖీయ(ఏకఘూత) సమీకరణాలను సాధన

సమీకరణం : సమ – కరణ, సమీకరణ, సమ, సామ్య, సదృశకరణ, సమత్వ అనే పదాలు సమీకరణానికి ఉపయోగించబడ్డాయి. సమీకరణానికి ఇరువైపులాను పక్ష అంటారు.

సమానత్వపు గుర్తును (=) కలిగి అనిశ్చిత వాక్యామును సమీకరణం అంటారు.

ఏకఘాత సమీకరణం : సామాన్య సమీకరణంలో చరరాశి / చరరాశులు ఉండి గరిష్ఠఘాతం ఒకటి అయితే దానిని ఏక ఘాత సమీకరణం అంటారు.

ఉదాహరణకు :

అనేది ఏకఘూత సమీకరణం ఒక చరరాశిలో మాత్రమే ఏర్పడినది.

అనేది ఏకఘూత సమీకరణం రెండు చరరాశులలో ఏర్పడినది.

ఈ సమీకరణాలను సాధించుటకు తగిన పద్ధతులు ప్రతిక్షేపించుట,సూక్ష్మరూపంలో రాయుట మొదలగునవి. ప్రస్తుతం ఎలిమెంటరీ స్థాయి గణితంలో ఏకఘూత సమీకరణాలు ఒక చరరాశిలో మాత్రమే చర్చించడం జరిగింది.

ఉదా1 :

అయిన విలువ ఎంత?

రెండు వరుస సంఖ్యలు అని అనుకుంటే

వాటి లబ్ధం 42 కు సమానం (దత్తాంశం అనుసారం)

అంటే అన్నమాట

అంటే అవ్యక్త రాశులను తెలియజేయడానికి బీజీయ అక్షరాలను ఉపయోగిస్తారు. అలాగే ఇక్కడ వరుస సంక్యలను కనుగొనడానికి ని అనుకున్నాము. బీజగణితమంలోని సమస్యలను సాధించడానికి , సమీకరణాల రూపంలో సమస్యను ప్రతిపాదించడానికి చరరాశులను ఉపయోగిస్తారు.

ఉపాధ్యాయ విద్యార్థులు ఈ అంశాలను బోధించేటప్పుడు నిత్య జీవిత సంఘటనలను ఉపయోగించి క్రియాత్మకంగా బోధించాలి. త ద్వారా సమీకరణాలు వ్రాయడంలో ఉన్న సులభత్వాన్ని విద్యార్థి తెలుసుకుంటారు. ఆ పరిజ్ఞానాన్ని బీజీగణిత సమస్యల సాధనలో వినియోగిస్తారు.

$x^2+3x+2=42$

$x^2+3x=42-2$

$x^2+3x-40=0$

$p=\frac{5}{30}-\frac{1}{6}$

2.4.6 అమరికలు - భావన

“ఒక కవి లేక చిత్ర కారుని నమూనాలవలే గణజత శాస్త్రవేత్త నమూనాలు అందంగా ఉండాలి - జి. హెచ్. హార్డీ

గణిత శాస్త్ర స్వభూవ లక్షణాలలో సౌందర్యాత్మకత ఉన్నట్లు గణిత నిర్మాణాలలో సౌష్టవత, క్రమాశ్రీనుసరణ ఉంటాయి. గణితం మానవ సమాజ నిర్మాణానికి అద్దంలాంటిది. అంటే గణితం ఎంతలా అభివృద్ధి చెందితే ఆ సమా.ం అంతలా అభివృద్ధి పదంలో నడుస్తుంది. గణితంలో నిర్మాణాత్మకతకు ఆధారం,సౌష్టవం, క్రమం ఆ సౌష్టవం, క్రమం భావనల కలయికనే అమరిక / నమూనా అంటారు.

ఉదాహరణ :

$$1+2=\frac{2x3}{2}$$

$$1+2+3=\frac{3x4}{2}$$

$$1+2+3+4=\frac{4x5}{2}$$

$$1+2+3-----+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

ఉదాహరణ ద్వారా తార్కికక ఆలోచనలలో ఒక క్రమ విధానాన్ని అనుసరించి వరుస క్రమంలో వ్రాయబడిన విధానాన్ని అమరిక / నమూనా అంటారు అని గణిత పరంగా చెప్పవచ్చు.

గణితంలో అమరికలు ప్రముఖపాత్రను వహిస్తాయి. విద్యార్థులలో తార్కిక భావన, హేతువాదం అభివృద్ధి చేయడానికి ,సౌష్టవం, క్రమం మరియు అమరికలాంటివి అవసరం. నిత్యం ఇంటి ముందు వేసుకునే ముగ్గు దగ్గర నుండి కట్టడాల వరకు కూడా సౌష్టవత అమరికను పరిశీలించవచ్చు. ఈ సౌష్టవత క్రమము ఈ కాలంనాటివి కావు క్రీస్తు పూర్వం ఈజిప్టియన్లు, భారతీయులు వారు తయారు చేసుకునే పాత్రలు, నిత్యం వాడే పాత్రలపై కూడా జ్యామితి ఆధారిత పటాలను ఉపయోగించేవారు. ఆర్యులు, ద్రావిడులు వారు నివశించే గృహాలు, కట్టడాల నిర్మాణాలలో కూడా జ్యామితి,సౌష్టవ ఆధారిత అంశాలు ఉండేవి. చెప్పాలంటే ప్రపంచంలో ప్రతీవ్యక్తికీ గణిత సౌష్ఠవం ఉంది. సౌష్ఠవ వస్తువులు ఆకారాలు చూసినపుడు మనిషి మనసుకు ఆనందాన్ని కలుగజేస్తాయి. అందుకే గణితానికి, సౌందర్యాత్మకతకు అవినాభావ సంబంధం ఉంది. అని చెప్పవచ్చు. ఈజిప్షియన్లు వారు నిత్యం చేసుకునే అలంకరణలో సుమారు (4 రకాల) సౌష్ఠవ నిర్మాణాలు ఉండేవి. గణితానికి ,సౌందర్యానికి ఉన్న అవినాభావ సంబంధం వలన ప్రతి గణిత శాస్త్రవేత్త ఒక కళాకారుడుగా చెప్పవచ్చు. ప్రతీకళలోనూ , విషములలోనూ గణితం, గణిత సౌందర్యం దాగి ఉంది. వడ్రంగి వాని దగ్గర నుంచీ చేనేత కార్మికుడి వరకు కూడా గణిత నమూనాలను ఉపయోగించే రమణీయమైన వస్తువులను తయారు చేస్తున్నారు.కాబట్టి గణిత శాస్త్ర నమూనాలకు, ఇతర శాస్త్ర విషయాలకు సన్నిహిత సంబంధం ఉంది. అటువంటి అమరికలు అవ్యక్తరాశులను ప్రతిపాదించడంలో మరియు సాధారణీకరించుటలో ఏ విధంగా సహాయపడతాయో చూద్దాం.

2. 4. 7 అమరికల పలితంగాల సార్వత్రికరణలో అవ్యక్త రాశుల వినియోగం

గణితం నమూనాల శాస్త్రము.నమూనా అనేది కొలత, క్రమత్వాన్ని కలిగి ఉంటుంది. మానవ మేధస్సులో కలిగే కోరికల ఫలితం అమరిక నమూనాగా చెప్పవచ్చు. ఏదైనా వస్తువులో దాగి ఉన్న సౌష్ఠవతను బట్టి అందులో అందం కనపడుతుంది. ఆ సౌష్ఠవం అమరిక వల్లనే కలుగుతుంది. అందుకే గణితానికి , సౌందర్యానికి సన్నిహిత సంబంధం ఉంది.

ఇపుడు మనం సంఖ్య నమూనాలు / అమరికలు పరిశీలిద్దాం. వీటిని పరిశీలించి చూపిన తరువాత వానికి సంబంధించిన సాధారణీకరణాలను చెయ్యడానికి వీలవుతుంది. అలాంటి ఉదాహరణ ఒకటి పరిశీలిద్దాం.

$$1^3 = 1^2$$
$$1^3 + 1^2 = (1+2)^2$$
$$1^2 + 2^3 + 3^3 = (1+2+3)^2$$

ఈ మూడింటిని చూడగానే ఒక విధమైన సౌందర్యానుభూతికి లోనవుతాము. తార్కిక సంబంధమైన అంశం కంటే రమణీయత ప్రభ్యావశాలి అని పోయిన్‌కేర్ చెప్పియున్నాడని తెలుసుకుని ఉన్నాము. అంటే తర్కము, రమణీయత రెండు ఉన్నాయి. రమణీయానుభూతిని పొందిన పిదప పోయిన్‌కేర్ మంటల ప్రకారం తార్కిక సంబంధంగా ఆలోచిస్తాము. అనగా అనుభూతి, ఆలోచన ఒక వరుసలో ఉంటాయని భావించాలి. ఇపుడు

$$1^2 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = (1+2+3+4)^2$$

వీటి నుంచి చేయగల్గిన సాధారణీకరణం

$$[n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3 + (n+3)^3 + ------] = [n + (n+1) + 3(n+2) + (n+3) + ----]^2$$

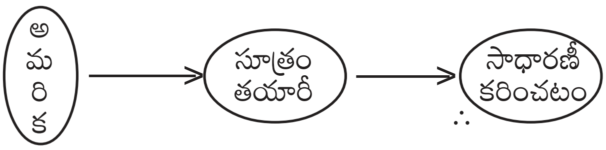
when $n = 1$

ఉదాహరణ2 : కొన్ని సంఖ్యలను బిందువుల రూపంలో చూపితే వాటిలో త్రిభుజం,చతురస్రం,దీర్ఘచతురస్రం ఇలా ఆకారాలు ఏర్పరచవచ్చు ఉదాహరణకు 1,3,6,10... ఈ సంఖ్యలను అమరిస్తే త్రిభుజాలు వస్తాయి.

1=· (ప్రత్యేకం) 3 = , 6 = ⋰ 10 = ...

ఈ సంఖ్యలను బిందువులుగా గుర్తించినపుడు ఇవి త్రిభుజాకార నమూనాలు/ అమరికలు ఏర్పరుస్తాయి. అందువల్ల వీటిని త్రిభుజాకార నమూనాలు / అమరికలు ఏర్పరుస్తాయి. అందువల్ల వీటిని త్రిభుజ సంఖ్యలు అని పిలుస్తారు. ఈ అమరికను బట్టి తరువాత త్రిభుజ సంఖ్యను నిర్ణయించవచ్చు.

పై ఉదాహరణ (1) లో తెలియని సంక్యకు బదులుగా మనము చరరాశిని ఉపయోగించుము తద్వారా సూత్రాన్ని ప్రతిపాదించి సాధారణీకరణం చేశాము. అమరిక తెలిస్తేనే సూత్రాన్ని సాధారణీకరించడం సులభం అవుతుంది.



పై పటం ద్వారా సాధారణీకరణకు అమరిక సూత్రం అనేవి సోపానాలుగా చెప్పవచ్చు.

సాధారణీకరణలో అమరిక పాత్ర :

- సూత్రాన్ని పాధారణీకరించటానికి అమరిక అనేది తొలిమెట్టు
- అమరిక ఆధారం విషయ అవగాహనను సులభం చేస్తుంది.
- బీజగణితానికి సంబంధించిన కొన్ని సూత్రాలను అమరిక ద్వారా రాబట్టవచ్చు
- అవ్యక్తరాశులను రూపొందించడానికి అమరిక ఆధారంగా పనిచేస్తుంది.
- అమరికల ద్వారా కొన్ని సమీకరణాలను రూపొందించవచ్చు.
- అమరికల ద్వారా చరరాశుల ఉపయోగం, ప్రతిక్షేపించటం చేయవచ్చు.
- దత్తాంశ,సారాంశాలను అమరికల ద్వారా కనుగొనవచ్చు
- విషయ విశదీకరణ అమరికల ద్వారా సులభం అవుతుంది.

2.4.10. బీజ గణితీయ ఆలోచనపై ఆధారపడ్డ ప్రహేళికలు

ప్రహేళిక అంటే సాధారణంగా చిక్కు ప్రశ్నలలోని స్వల్ప వ్యత్యాసం మన: పూర్వకంగా ఆలోచింపజజేసే విధంగా తయారు చేయబడిన ప్రశ్న ప్రహేళిక.............ఆక్స్‌ఫర్డ్ డిక్షనరీ విద్యార్థుల తీరిక సమయాన్ని మనోరంజకంగా తార్కిక ఆలోచనలు కలిగే విధంగా ఉపాధ్యాయుడు కొన్ని ప్రహేళికలను తయారు చేసుకుంటాడు. ఈ ప్రశ్నల వలన వారి తీరిక సమయం వృదా కాదు. అర్థవంతంగా ప్రయోజనం చేకూరుతుంది. విద్యార్థుల వ్యక్తి గత స్థాయిని బట్టీ , సామర్థ్యాల బట్టీ అభిరుచులను బట్టీ ప్రశ్నలు తయారు చేసుకోవాలి.

ఉదాహరణకు :

మంత్రాల మరిడయ్య దగ్గర మహిమ గల సంచి ఒకటి ఉంది. దానిలో ప్రతి నిమిషానికి గ్రుడ్డు రెట్టింపు అవుతున్నాయి. సరిగా అరవై నిమిషాలకి సంచి పూర్తిగా గ్రుడ్లతో నిండిపోతుంది. అయితే సంచి పూర్తిగా గ్రుడ్లతో నిండిపొయింది. అయితే సగం వరకు నిండే సరికి ఎంత సమయం పడుతుంది.

జవాబు (59ని॥)

ఇలాంటి ప్రశ్నలు విద్యార్థులకు ఆసక్తికరంగా ఉంటాయి. ప్రతీ అధ్యాయాన్ని తరగతి గదిలో బోధించే సమయంలో ఉపాధ్యాయుడు ప్రహేశికలను ఉపయోగించుట వలన బోధనాభ్యసన కార్యక్రమం అర్థవంతంగా ఆసక్తికరంగా సాగుతుంది. బీజగణితంలో కూడా ఇలాంటి ప్రహేళికలను అడగవచ్చు.

బీజగణితంలోని ఒక ప్రహేళిక :

రాము వద్ద పుస్తకాల కన్నా శ్యాయమ్ వద్ద 3 ఉస్తకాలు ఎక్కువగా ఉన్నాయి. ఇద్దరివీ కలిపితే 11 అయితే శ్యామ్ వద్ద పుస్తకాలు ఎన్ని?

మొదటిగా రాము వద్ద ఉన్న పుస్తకాల సంఖ్య x అనుకొనుము

శ్యామ్ వద్ద పుస్తకాల సంఖ్య = x +3

ఇద్దరి కలిపితే 11 అయితే

$$x + x + 3 = 11$$

$$2x + 3 = 11$$

$$x = \frac{11-3}{2} = 4$$

అంటే రాము వద్ద నాలుగు,శ్యామ్ వద్ద ఏడు పుస్తకాలు ఉన్నాయి.

మరియొక ఉదాహరణ :

కొందరు మిత్రులు ఒక తోటలోకి వెళ్ళి కొన్ని మామిడి, జామ ,నారింజకాయలు కోసారు. ఒక్కొక్క జామకాయను ఒక్కొక్కరూ ఒక్కొక్క మామిడి కాయను ఇద్దరూ,ఒక్కొక్క నారింజకాయను ముగ్గురూ చొప్పున తిన్నారు. ఇలా వాళ్ళకు తిన్న మొత్తం కాయల సంఖ్య 88 అయితే తోటలోకి వెళ్ళిన మిత్రులు ఎంతమంది? వారు తిన్న ఏయే పళ్ళు ఎన్నెన్ని?

(జవాబు మిత్రబృందం 48 మంది , వారు తిన్న మామిడి పళ్ళు 24 జామ 48,నారింజ16)
బీజగణితంలోని ప్రహేళికలకు సమాధానాలు రూపొందించినపుడు చరరాశులను ఉపయోగిస్తాము.

ఎందుకు ఉపయోగిస్తాము

ప్రహేళికలో చరరాశులను వినియోగించుట ద్వారా

- సమాధానాన్ని త్వరగా అంచనా వేయవచ్చు
- సోపానాలను సులభంగా త్వరగా అంచనా వేయవచ్చు
- అమూర్త ఆలోచనలల్ని ఆచరణలో పెట్టవచ్చు.

వివిధరకాల పరిష్కార మార్గాలు తెలుసుకోవచ్చు.

3. 6 నుంచి 8 తరగతులకు గణిత బోధన

(Teaching of Mathematics for classes 6 to 8)

గణిత పరిజ్ఞానం మానవ మేథస్సుకు శక్తి, పట్టుదల కలగజేయటంతో పాటు అతనిలోని మూఢనమ్మకాలు, దురభిప్రాయాలు, ప్రతి విషయాన్నీ తేలికగా నమ్మే లక్షణాన్ని తొలగిస్తుంది. - జాన్ ఆర్బట్

3.0 లక్ష్యాలు

3.1 పరిచయం

3.2 మంచి గణిత తరగతి

3.3 ప్రాథమికోన్నత పాఠశాలలో గణిత ఉపాధ్యాయుని పాత్ర

3.4 గణితాంశాల బోధనలో భావగాహన – వివిధ ఉపగమాలు, వ్యూహాలు, పద్ధతులు

3.5 గణితీకరణ ప్రక్రియ – అభివృద్ధి

3.6 గణిత భయాలు – అధిగమించుట, చర్యాత్మక పరిశోధన

3.0 లక్ష్యాలు

ఈ అధ్యాయాన్ని అభ్యసించటం పూర్తయ్యేసరికి ఉపాధ్యాయ విద్యార్థి ఈ కింది నైపుణ్యాలను సాధిస్తాడు.

1. మంచి గణిత తరగతి గది అంటే ఏమిటో, దానిని ఎలా తీర్చిదిద్దాలో తెలుసుకుంటాడు.
2. మంచి గణిత తరగతి గదిని నిర్వహించే విధానం తెలుసుకుంటాడు.
3. మంచి గణిత తరగతి గదికి ఉండాల్సిన లక్షణాలను రూపొందించటంలో ఉపాధ్యాయుని పాత్రను అవగాహన చేసుకుంటాడు.
4. ప్రాథమికోన్నత పాఠశాలలో గణిత ఉపాధ్యాయుని పాత్ర, నిర్వహించాల్సిన విధులు తెలుసుకుంటాడు.
5. విద్యార్థుల్లో గణిత భావాలు పెంపొందించటానికి తగిన వ్యూహాలు / పద్ధతులను ఎలా ఎంపిక చేసుకోవాలో నేర్చుకుంటాడు.
6. గణితీకరణ ప్రక్రియల పట్ల అవగాహన పెంచుకుంటాడు.
7. విద్యార్థులకు గణిత అధ్యయనం పట్ల కలిగే అపోహలు / భయాన్ని ఎలా తొలగించాలో తెలుసుకుంటాడు.
8. గణిత అభ్యసనలో ఎదురయ్యే సమస్యలను చర్యాత్మక పరిశోధన ద్వారా ఎలా అధిగమించవచ్చో నేర్చుకుంటాడు.

3.1 పరిచయం

'గణితం నిజానికి కష్టమైన అంశమేమీ కాదు... ఇది కష్టమైన అంశంగా చేయబడింది' అనే నానుడి విద్యాలోకంలో వ్యాప్తిలో ఉన్న విషయం మనకు తెలిసిందే. పాఠశాలలో చేరే సమయానికే గణితం పట్ల విద్యార్థులకు ఒక రకమైన భయాన్ని తల్లిదండ్రులు కల్పిస్తారు. గణితం చాలా కష్టంగా ఉంటుంది. తొందరగా అర్థం కాదు. కాబట్టి, తరగతిలో గణిత ఉపాధ్యాయుడు చెప్పింది జాగ్రత్తగా వినాలి అనే సూచనలతో మొదలు పెట్టి, పాఠశాల నుంచి తిరిగి రాగానే ముందుగా గణితానికి సంబంధించిన ఇంటిపని (హోంవర్క్) చేయాలని తొందరపెట్టటం, ఏదైనా ఒక లెక్క తప్పుగా చేస్తే విద్యార్థిని బాగా మందలించటం, లెక్కలు రాకపోతే జీవితం వృథా అనే ఒత్తిడి

కలిగించటం... ఇలా బడిలో చేరకమునుపే ప్రారంభమై, బడి నుంచి తిరిగి వచ్చాక కూడా పిల్లల పట్ల సాగే తల్లిదండ్రుల విపరీత వైఖరి వారిలో గణితం పట్ల తెలియని భయాన్ని రేకెత్తిస్తుంది.

ఉపాధ్యాయుడు తరగతిలో పెట్టే భయం దీనికి అదనం. 'లెక్కలంటే ఆషామాషీ కాదు. ఏమనుకుంటున్నావ్?' అంటూ ఉపాధ్యాయుడు చేసే మందలింపులు కూడా విద్యార్థిలో గణితం పట్ల తీవ్రమైన భయం, గణిత అభ్యాసం పట్ల తీవ్రమైన ఆందోళన కలిగిస్తున్నాయి.

మొత్తంగా బడిలోను, ఇంట్లోను జరిగే అనాలోచిత చర్యల వల్ల చాలామంది విద్యార్థుల్లో గణితం పట్ల అనవసర భయాందోళనలు కలుగుతున్నాయి. ఈ తరహా **భయాన్ని విద్యార్థుల్లో పారద్రోలి, వారిలో గణితం పట్ల ఆసక్తి రేకెత్తించటానికి అనుసరించాల్సిన పద్ధతుల్లో 'ఆకర్షణీయమైన / మంచి గణిత తరగతి గది'ని రూపొందించటం అతి ప్రభావవంతమైన మార్గం.**

గణితం పట్ల సహజంగానే ఉండే భయాన్ని పారద్రోలేదిగా గణిత తరగతి గది ఉండాలి. ఇందుకోసం ఉపాధ్యాయుడు తన తరగతిని ఆకర్షణీయంగా తీర్చిదిద్దటంతో పాటు గణిత అభ్యాసం పట్ల విద్యార్థిలో ఉత్సాహాన్ని కలిగించి, అతడికి ప్రేరణ కలిగించేలా తగిన ఏర్పాట్లు చేయాలి. ఇదంతా జరగాలంటే ముందుగా ఉపాధ్యాయుడు సన్నద్ధంగా ఉండాలి. మంచి గణిత తరగతి గదిని ఎలా తీర్చిదిద్దాలి? ఇందుకోసం ఉపాధ్యాయుడు నిర్వహించాల్సిన బాధ్యతలేవి? మొదలైన అంశాల గురించి ఈ అధ్యాయంలో వివరంగా తెలుసుకుందాం.

3.2 మంచి గణిత తరగతి *(Good Maths Classroom)*

విద్యార్థుల్లో గణితం పట్ల ఆసక్తి పెంపొందించటంతో పాటు జ్ఞాననిర్మాణాన్ని ఆశించిన లక్ష్యాలకు అనుగుణంగా సాధించటానికి ఉపయోగించే అంశాల్లో గణిత తరగతి ప్రధాన పాత్ర పోషిస్తుంది. సర్వసాధారణంగా గణిత తరగతి అనగానే విద్యార్థులు సహజంగా కొంత భయాందోళనలకు గురవుతారు. గణితం పట్ల వారికి ఏర్పడిన సహజ భయం ఇందుకు ఒక కారణమైతే; అనాసక్తంగా, ప్రేరణ రహితంగా ఉండే తరగతి గది వాతావరణం మరొక కారణమవుతుంది.

కొఠారి కమీషన్ (1964), జాతీయ విద్యావిధానం (1986), జాతీయ విద్యాప్రణాళికా చట్రం (2005) సూచించినట్లు ఆహ్లాదకరమైన తరగతి విద్యార్థుల్లో ఆసక్తులను పెంపొందిస్తుంది. అభ్యసన పట్ల వారిలో ఉత్సాహాన్ని పెంచి, గణిత అభ్యసన పట్ల వారు మొగ్గుచూపేలా చేస్తుంది.

భారత ప్రభుత్వ మానవ వనరుల అభివృద్ధి మంత్రిత్వశాఖ, పాఠశాల విద్యావిభాగం 28.05.2015 తేదీన విడుదల చేసిన ఉత్తర్వులో 'రాష్ట్రీయ ఆవిష్కార్ అభియాన్' పథకంలో భాగంగా గణిత తరగతులు ఎలా ఉండాలో / వాటిని ఎలా తీర్చిదిద్దాలో పేర్కొంది. **'గణిత అధ్యయనం కేవలం నాలుగు గోడలకు మాత్రమే పరిమితమైన విషయం కాదు. తరగతి లోపల, బయట కూడా విద్యార్థిని గణిత అధ్యయనం పట్ల అనురక్తుడిని చేసేలా విద్యావిధానం ఉండాలి. విద్యార్థుల్లో గణితం పట్ల ఉత్సాహం కలిగించేలా తరగతి లోపల, బయట కూడా వాతావరణాన్ని తీర్చిదిద్దాలి'** అని ఆ ఉత్తర్వులో పేర్కొనటం జరిగింది.

పాఠశాలల్లో గణిత ప్రయోగశాలలు ఏర్పాటు చేయటం, గణిత ఉపాధ్యాయులకు వృత్యంతర శిక్షణ ఇవ్వటం, ఆధునిక సాంకేతిక పరిజ్ఞానాన్ని గణిత బోధనలో ఉపయోగించేలా ఉపాధ్యాయులకు తగిన తర్ఫీదు ఇవ్వటం, గణిత బోధనోపకరణాలు సరఫరా చేయటం మొదలైనవి ఈ పథకంలో భాగంగా భారత ప్రభుత్వం చేపట్టింది.

నేషనల్ ఫోకస్ గ్రూప్ ఆన్ టీచింగ్ మ్యాథమెటిక్స్ విడుదల చేసిన పొజిషన్ పేపర్ (2006)లో **'గణితాన్ని ఒకరితో ఒకరు / తోటి విద్యార్థులతో మాట్లాడాల్సిన అవసరంగా, వారిలో వారు చర్చించాల్సిన అంశంగా, సమాచారాన్ని అందరికీ పంచాల్సిన విషయంగా, ఇతరులతో కలిసి పనిచేయాల్సిన అంశంగా విద్యార్థులు భావిస్తారు. కాబట్టి,**

గణితాన్ని విద్యార్థుల జీవితానుభవంలో ఒక భాగంగా తీర్చిదిద్దాల్సిన అవసరం ఎంతైనా ఉంది. అప్పుడే, గణితాన్ని నిజంగా విద్యార్థులకు బోధించినట్లవుతుందని' పేర్కొనటం జరిగింది.

3.2.1 మంచి గణిత తరగతిగది లక్షణాలు *(Characteristics of a good Mathematics Classroom)*

మంచి గణిత తరగతి గది తయారుకావాలంటే అందుకు భౌతిక లక్షణాలు / ఏర్పాట్లతో పాటు ఉపాధ్యాయుడు కూడా వనరుల కేంద్రంగా ఉండాలి. అప్పుడే ఆ తరగతి మంచి గణిత తరగతి గదిగా మారుతుంది. ముందుగా మంచి గణిత తరగతికి ఉండాల్సిన భౌతిక లక్షణాలేమిటో చూద్దాం.

– గాలి, వెలుతురు చక్కగా ప్రసరించే ఏర్పాట్లు ఉండాలి.
– నిరంతరంగా పనిచేసే విద్యుత్ వ్యవస్థ ఉండాలి.
– గణిత పరికరాలను దాచుకునేందుకు బీరువా లేదా అల్మరా వంటి ఏర్పాట్లు ఉండాలి.
– పవర్‌పాయింట్ ప్రజెంటేషన్ ఇవ్వటానికి వీలుగా విద్యుత్తు, ఎల్ఇడి తెర వంటి సౌకర్యాలు ఉండాలి.
– బోధనాభ్యసన పరికరాలను ప్రదర్శించే ఏర్పాట్లు ఉండాలి.
– గణితశాస్త్రవేత్తల సంక్షిప్త పరిచయాలతో కూడిన చిత్రపటాలు ఉండాలి.
– బోధిస్తున్న తరగతి / అధ్యాయానికి అనుగుణమైన చార్టులు, నమూనాలు తదితర సామగ్రి అందుబాటులో ఉండాలి.
– చాక్‌పీస్, డస్టర్, రోలర్‌బోర్డు / నల్లబల్ల, పాయింటర్ వంటి ప్రాథమిక సౌకర్యాలు ఉండాలి.
– తరగతి గ్రంథాలయంలో భాగంగా గణిత పుస్తకాల కోసం ప్రత్యేక అల్మరా కేటాయించాలి.
– విరామ సమయాన్ని సద్వినియోగం చేసుకునేందుకు వీలుగా ప్రహేళికలు, వింతచదరాలు వంటి ఆసక్తికర కృత్యాలతో కూడిన పుస్తకాలు విద్యార్థులకు అందుబాటులో ఉండాలి.
– దిన / వార / పక్ష / మాస తదితర పత్రికల్లో వచ్చే గణిత సంబంధ వ్యాసాలను సేకరించి, భద్రపరచే ఏర్పాట్లు ఉండాలి.
– గణిత విశేషాలతో కూడా గోడపత్రిక తప్పనిసరిగా ఉండాలి.
– కృత్యాధార బోధన చేయించటానికి వీలుగా తగిన వస్తువులతో కూడిన కృత్యపేటికలు అందుబాటులో ఉండాలి.
– గణిత సూక్తులు, నినాదాలు వంటి వాటిని చార్టుల మీద రాసి, తరగతిలో ప్రదర్శించాలి.
– గణితశాస్త్రవేత్తల చిత్రాలు, వారు చేసిన కృషి, ప్రాథమికస్థాయికి సంబంధించి గణితరంగంలో జరుగుతున్న కృషి, ప్రతిభావంతులైన గణితవిద్యార్థుల వివరాలు మొదలైన విషయాలను బులిటెన్ బోర్డులో ప్రదర్శించాలి.

3.2.2 మంచి గణిత తరగతి గది ఏర్పాటులో ఉపాధ్యాయుడి పాత్ర
(Role of Teacher in preparing a good Mathematics classroom)

కేవలం భౌతిక ఏర్పాట్లు / లక్షణాలు ఉన్నంతమాత్రాన తరగతి గది ఉత్తమ / మంచి గణిత తరగతి గది అనిపించుకోదు. ఈ ఏర్పాట్లన్నీ ప్రభావవంతం కావాలంటే, అందుకు ఉపాధ్యాయుడు ప్రత్యేక బాధ్యత తీసుకోవాల్సి ఉంటుంది. అప్పుడే మంచి గణిత తరగతి గది తయారవుతుంది. ఇందుకోసం ఉపాధ్యాయుడు నిర్వహించవలసిన పాత్ర ఏమిటంటే...

– గణితాన్ని తమ జీవితావసరంగా విద్యార్థులు గుర్తించేలా వారికి ప్రేరణ కల్పించాలి.

– నేరుగా పాఠాన్ని చెప్పటం కన్నా, అందులోని విషయ ప్రాధాన్యతను విద్యార్థులకు వివరించాలి. ఆ పాఠం / విషయం నేర్చుకోవటం వల్ల కలిగే ప్రయోజనాన్ని విద్యార్థుల చేత గుర్తింపజేయాలి.

– విద్యార్థులను గణిత అభ్యాసం పట్ల సుముఖులను చేసేలా, వారిలోని అనవసర భయాందోళలను తొలగించాలి. ఇందుకోసం వారితో స్నేహపూరితంగా ప్రవర్తిస్తూ, వారు గణితంలోని ఏ అంశం పట్ల భయపడుతున్నారో కనుగొని, అందుకు పరిష్కారం సూచించాలి / ఆచరణలోకి తీసుకురావాలి.

– తరగతిలో నిర్వహించేలా తేలికపాటి సహపాఠ్య కార్యక్రమాలు నిర్వహించి, గణితం పట్ల విద్యార్థుల్లో ఆసక్తి పెంచాలి.

– చిక్కుప్రశ్నలు, ప్రహేళికలు ఇస్తూ గణితం పట్ల ఇష్టాన్ని, ప్రేమను పెంచాలి.

– గణితాత్మకంగా పలకరించుకోవటం, శుభాకాంక్షలు తెలుపుకోవటం వంటి వినూత్న పద్ధతులు ప్రవేశపెట్టాలి.

– ప్రతిభావంతులతో పాటు మంద అభ్యాసకులను గుర్తిస్తూ, వారిని మరింత ఎక్కువగా ప్రోత్సహించాలి.

– గణితాన్ని భూతంగా కాకుండా, గణితం మన సహచరుడే అన్న భావన విద్యార్థుల్లో కలిగించాలి.

– గణితశాస్త్ర చరిత్ర, గణిత శాస్త్రజ్ఞుల జీవిత చరిత్రలను సందర్భానుగుణంగా వివరించి, గణితం పట్ల విద్యార్థుల్లో అభిరుచి పెంచాలి.

– గణితం నేర్చుకోవటం ద్వారా జీవితంలో అనేక అంశాలు నేర్చుకోవటం సులభమవుతుందనే విషయాన్ని విద్యార్థుల చేత గ్రహింపజేయాలి.

కృత్యం : 1. మీ సమీపంలోని పాఠశాలను సందర్శించి, పాఠ్యపుస్తకంలో చెప్పిన లక్షణాలతో పోలుస్తూ అక్కడి గణిత తరగతి ఎలా ఉందో పరిశీలించండి. మీ పరిశీలనల ఆధారంగా నివేదిక తయారు చేయండి.
2. మీ ఉపాధ్యాయ శిక్షణ కళాశాలలోని గణిత తరగతి లక్షణాలను గమనించి, పైన వివరించిన మంచి గణిత తరగతి గది లక్షణాలతో పోల్చండి.

3.3 ప్రాథమికోన్నత పాఠశాలలో గణిత ఉపాధ్యాయుని పాత్ర
(Role of Upper primary school Mathematics teacher)

పాఠశాలలో బోధించే అన్ని ఇతర విషయాలకన్నా గణితం భిన్నంగా ఉంటుంది. గణితశాస్త్రంలో భావనలు ఎక్కువగా ఉంటాయి. భావన పూర్తిగా అర్థం కాకపోతే, గణిత అభ్యసన సజావుగా జరగదు. ఉపాధ్యాయుడు విద్యార్థులకు భావనల పట్ల సమగ్ర సమాచారం ఇస్తూ, ఆయా భావనలను నిత్యజీవితంలో ఏవిధంగా ఉపయోగించుకోవాలో చెప్పాలి. తరగతి గదిలో ఉన్న వివిధ సామర్థ్యాలు కల విద్యార్థులను గుర్తించి, వైయుక్తిక బోధన చేయాలి. వీటితోపాటు మరికొన్ని అదనపు బాధ్యతల్ని గణిత ఉపాధ్యాయుడు నిర్వహించాల్సి ఉంటుంది. మొత్తంగా ప్రాథమికోన్నత స్థాయిలో గణిత ఉపాధ్యాయుడు పోషించాల్సిన పాత్ర / నిర్వహించాల్సిన విధులు ఏమిటంటే...

– తాను బోధిస్తున్న విషయం పట్ల పూర్తి అవగాహన, సాధికారత కలిగి ఉండాలి.

– తన విజ్ఞానాన్ని ఎప్పటికప్పుడు సుసంపన్నం చేసుకుంటూ ఉండాలి.

– గణిత అభ్యసన పట్ల విద్యార్థుల్లో ఆసక్తి కలుగజేసే కార్యక్రమాలను రూపొందించాలి.

– గణిత ప్రక్రియలను సునాయాసంగా చేస్తూ, గణిత పటాలను స్పష్టంగా గీయగలిగే సామర్థ్యం కలిగి ఉండాలి.

– గణితాన్ని తన జీవితంలో ఒక భాగంగా భావించాలి.

– ఏవిషయాన్నయినా తార్కికంగా, వైజ్ఞానికంగా ఆలోచించి, గణిత సమస్యలకు తగిన సాధనలు కనుగొనాలి.

– గణితబోధనలో తనదైన ప్రత్యేక శైలి ఏర్పరచుకోవాలి.

– సొంతంగా సమస్యలు తయారుచేస్తూ, వాటికి సాధనలు కనుగొనేలా విద్యార్థులను ప్రోత్సహించాలి.

– పాఠశాలలో గణిత ప్రదర్శనలు, గణిత సంఘం నిర్వహించాలి.

– ప్రభుత్వం నిర్వహించే వృత్యంతర శిక్షణ కార్యక్రమాల్లో తప్పనిసరిగా పాల్గొనాలి. గణిత సదస్సులు, కార్యశాలలతో సహా గణిత సంబంధమైన కార్యక్రమాలకు హాజరవుతూ, గణితంలో వస్తున్న నూతన / సమకాలీన అంశాల పట్ల అవగాహన కలిగి ఉండాలి.

– గణిత పత్రికల్లో వ్యాసాలు, గణిత పుస్తకాలు రచిస్తూ ఉండాలి.

– సందర్భానుసారంగా విద్యార్థులకు మార్గదర్శనం, మంత్రణం చేయగలిగి ఉండాలి.

కృత్యం : ఉపాధ్యాయ శిక్షణలో భాగంగా మీరు సందర్శించిన పాఠశాలలోని గణిత ఉపాధ్యాయుడు ఆ పాఠశాలలో నిర్వహిస్తున్న పాత్ర ఏమిటో పరిశీలించండి. మీ పరిశీలనలను నమోదు చేయండి. బ్లాక్ టీచింగ్‌లో భాగంగా మీరు నిర్వహించిన పాత్రను స్వీయ పరిశీలన ద్వారా అంచనా వేసి, రెండు పరిశీలనలను పోల్చండి.

3.4 గణితాంశాల బోధనలో భావనల అవగాహన – వివిధ ఉపగమాలు, పద్ధతులు, వ్యూహాలు
(Conceptual understanding in teaching Mathematics - Different approches / strategies / methods)

సర్వసాధారణంగా విద్యార్థులు బడిలో చేరటానికి ముందే అభ్యసించే సమర్థత కలిగి ఉంటారు. బడిలో చేరిన తర్వాత, ఉపాధ్యాయుడు అనుసరించే వివిధ బోధన పద్ధతులు, వ్యూహాలు, ఉపగమాల వల్ల అతడిలో అభ్యసించే స్వభావం మరింత పెరుగుతుంది. అభ్యసన కూడా వేగంగా, ఫలవంతంగా జరుగుతుంది.

విద్యార్థుల అభ్యసన అభిరుచిని బట్టి ఉపాధ్యాయుడు కూడా తన బోధన విధానాన్ని ఎప్పటికప్పుడు మార్చుకోవాలి. ఒకే ఉపాధ్యాయుడు ఒకే భావనను ఆయా సందర్భాలకు అనుగుణంగా అనేక రకాల ఉపగమాలు, వ్యూహాలు ఉపయోగించి బోధించాల్సి ఉంటుంది. ఒక ఉపాధ్యాయుడు తన బోధనాభ్యసనంలో ఉపయోగించే ఉపగమాలు / వ్యూహాలకు, మరొక ఉపాధ్యాయుడు ఉపయోగించే ఉపగమాలకు కచ్చితంగా వ్యత్యాసం ఉంటుంది.

విద్యార్థుల పూర్వజ్ఞానం, వారి అవసరాలు, సందర్భం, పాఠ్యాంశం, విద్యార్థుల సమర్థత తదితర విషయాలను దృష్టిలో ఉంచుకుని, ఉపాధ్యాయుడు తన బోధన ఉపగమాలు, వ్యూహాలను ఎన్నుకోవటం లేదా మార్చుకోవటం జరుగుతుంది. అన్ని సందర్భాల్లో ఏ ఒక్క ఉపగమం, వ్యూహం మంచిదని, పూర్తిగా సరిపోతుందని కూడా కచ్చితంగా నిర్ణయించలేం.

ఉపాధ్యాయుడు తాను బోధించు విషయాల గురించి అభ్యాసకులతో చర్చించి, వారి అభిప్రాయాలు సేకరించి, వారి ప్రస్తుత జ్ఞానాన్ని గుర్తించి, వారు ఇంకా తెలుసుకోవలసిన విషయాలు, నిర్మించుకోవాల్సిన జ్ఞానం పట్ల అవగాహన పొందాలి. ఇలా చేయటం వల్ల ఉపాధ్యాయులకు అభ్యాసకుల స్థాయి ఏమిటో తెలుస్తుంది. తద్వారా పాఠ్యాంశానికి తగిన ఉపగమం / వ్యూహం / పద్ధతిని ఎంపిక చేసుకునే వీలు కలుగుతుంది.

ఉపగమానికి, వ్యూహానికి మధ్య భేదం

సామాన్యంగా 'ఉపగమం' అనే పదాన్ని విస్తృతార్థంలో ఉపయోగిస్తాం. ఉపగమం అంటే నిర్ణయించుకున్న గమ్యాలు సాధించటానికి లేదా పూర్తిచేయటానికి మార్గనిర్దేశనం చేసే ఆలోచనా రీతి లేదా క్రియారూపం. ఉపాధ్యాయుడు తన బోధనలో నిర్మాణాత్మక ఉపగమాన్ని ఉపయోగిస్తాడు. అంటే, తన బోధనాభ్యసన ప్రణాళికలో నిర్మాణాత్మక

ఉపగమంలోని వ్యూహాలను ఉపయోగిస్తాడు.

సాధారణంగా లక్ష్యం సాధించేందుకు ఉద్దేశింపబడి, ఆ క్రమంలో అనుసరించే ప్రణాళికను వ్యూహం అంటారు. ఇంకా చెప్పాలంటే, ఉపాధ్యాయుడు తాను అనుసరించటానికి నిర్ణయించుకున్న ఉపగమంలోని సాంకేతికాలను ఉపయోగించే బోధనాభ్యసన ప్రక్రియలను వ్యూహం అంటాం. నిత్యం ఉపాధ్యాయుడు కొనసాగించే బోధనాభ్యసన విధానంలోని క్రియాచర్యల సమాహారాన్ని బోధన పద్ధతి అంటాం.

3.4.1 బోధనకు ఉపయోగించే వివిధ ఉపగమాలు, వ్యూహాలు, పద్ధతులు

ఏ ఉపగమమైనా, వ్యూహమైనా పరిపూర్ణమని కచ్చితంగా చెప్పలేం. ఒక పరిస్థితిలో విజయవంతమైన ఉపగమం మరొక పరిస్థితిలో విఫలం కావచ్చు. ఇందుకు ఉపాధ్యాయుడి అనుభవంతో పాటు అనేక పరిస్థితులు కారణాలు కావచ్చు. ఏదిఏమైనప్పటికీ వివిధ బోధన ఉపగమాలు, వ్యూహాలు, పద్ధతుల పట్ల ఉపాధ్యాయుడికి అవగాహన తప్పనిసరిగా ఉండాలి. వివిధ బోధన ఉపగమాలు, వ్యూహాలు, పద్ధతుల గురించి ఇప్పుడు తెలుసుకుందాం. (మొదటి సంవత్సరంలో బోధన పద్ధతులు, వ్యూహాలు, ఉపగమాల గురించి విస్తృతంగా చర్చించటం జరిగింది. అందువల్ల ఈ అధ్యాయంలో సంక్షిప్తంగానే వాటిని వివరించటం జరుగుతుంది)

3.4.1.1 ఆగమన ఉపగమము *(Inductive Approach)*

తగినన్ని మూర్త ఉదాహరణల సహాయంతో ఒక సూత్రాన్ని రాబట్టటం, లేదా ఒక విషయాన్ని సాధారణీకరణం చేయటాన్ని 'ఆగమన ఉపగమము' అంటారు. ఈ పద్ధతికి సూత్రీకరణ పద్ధతి, ప్రతిస్థాపన పద్ధతి, అనుగమన పద్ధతి, అనుమానోపపత్తి అనే పేర్లు కూడా వాడుకలో ఉన్నాయి.

ఈ పద్ధతి హేతువాదం మీద ఆధారపడి ఉంటుంది. ఆగమనం అంటే ఒక సార్వత్రిక సత్యాన్ని ఋజువు చేయటం. అంటే, ఒక విషయాన్ని అనేకసార్లు పరిశీలించినప్పుడు ఒకే ఫలితాన్ని పొందినట్లయితే, మిగతా అన్ని సందర్భాల్లో కూడా అదే ఫలితం వస్తుందని నమ్మి, నిర్ధారణ చేయటం ఆగమన హేతువాదం అవుతుంది. గణితం నేర్చుకోవటానికి ఆగమన పద్ధతి ఎంతో సహజమైన పద్ధతి. అత్యంత అనుకూలమైంది కూడా. ఈ పద్ధతి ద్వారా బోధించిన విషయాలు ఎక్కువ కాలం జ్ఞాపకం ఉంటాయి.

సర్వసాధారణంగా గణిత బోధనలో సూత్రీకరణలు చేయటానికి, సిద్ధాంతీకరించటానికి, నిర్వచనాలు ఇవ్వటానికి, పరిశీలనాంశాల ఆధారంగా 'అనుమితి' చేయటానికి, నియమాలు రూపొందించటానికి ఆగమన ఉపగమాన్ని ఉపయోగిస్తారు.

ఆగమన ఉపగమం – సూత్రాలు / లక్షణాలు

- ఉదాహరణల నుంచి సూత్రీకరణ చేయటం జరుగుతుంది.
- మూర్త విషయాల నుంచి అమూర్త విషయాలకు సాగుతుంది.
- ప్రత్యేకాంశం నుంచి సాధారణీకరణం దిశగా బోధన సాగుతుంది.
- ప్రయోగాలు లేదా పరిశీలనలు చేయటం ద్వారా సాధారణీకరించటం జరుగుతుంది.

ఆగమన ఉపగమం – బోధన విధానం

తరగతి : 6

అంశం : చుట్టుకొలతలు మరియు వైశాల్యాలు

ఉపాంశం : దీర్ఘచతురస్ర వైశాల్యం

ఉపాధ్యాయుడు : నల్లబల్లపై ఒక పుస్తకాన్ని ఉంచి, చుట్టూ ఒక గీత గీచి, ఉపాధ్యాయుడు ఈ విధంగా ప్రశ్నిస్తాడు.
ఈ పుస్తకం బల్లపై ఎంత ప్రదేశాన్ని ఆక్రమించింది?

విద్యార్థి : పుస్తకం చుట్టూ గీచిన గీత ఎంత ప్రదేశాన్ని ఆక్రమించిందో, అంతటి ప్రదేశాన్ని పుస్తకం ఆక్రమించింది.

ఉపాధ్యాయుడు :ఈవిధంగా పుస్తకం ఆక్రమించిన ప్రదేశాన్ని ఏమని పిలుస్తారు?

విద్యార్థి : వైశాల్యం

ఉపాధ్యాయుడు : పుస్తకం ఏ ఆకారంలో ఉంది?

విద్యార్థి : దీర్ఘచతురస్రం

ఉపాధ్యాయుడు : పుస్తకం ఆక్రమించిన ప్రదేశం ఏ ఆకారంలో ఉంది?

విద్యార్థి : దీర్ఘచతురస్రం

ఉపాధ్యాయుడు : గ్రాఫు కాగితంపై దీర్ఘచతురస్రాకారాన్ని చిత్రించి, ఆ పటం ఆక్రమించిన గడుల సంఖ్య ఎంత అని ప్రశ్నిస్తాను? / గడులను లెక్కించమని అడుగుతాను.

విద్యార్థి : గ్రాఫు కాగితంపై గీచిన పటం ఆక్రమించిన గడుల సంఖ్య 15

ఉపాధ్యాయుడు : ఇందాక చెప్పుకున్న పుస్తకం ఉదాహరణ ఆధారంగా, దీర్ఘచతురస్ర వైశాల్యం ఎంత అవుతుంది?

విద్యార్థి : 15 చదరపు సెం.మీ

ఉపాధ్యాయుడు : ఒక్కొక్క గడిని ఒక సెం.మీగా తీసుకుంటే, పటం పొడవు, వెడల్పులు ఎంత?

విద్యార్థి : పొడవు 5 సెం.మీ, వెడల్పు 3 సెం.మీ

ఉపాధ్యాయుడు : దీర్ఘచతురస్రం పొడవు, వెడల్పులకు, వైశాల్యానికి ఏమైనా సంబంధం ఉందా?

విద్యార్థి : పొడవు, వెడల్పులను గుణిస్తే, వైశాల్యం వచ్చింది.

ఉపాధ్యాయుడు : మరొక కొలతతో దీర్ఘచతురస్రాన్ని గీచి, పైవిధంగా ప్రశ్నిస్తాను. పటం ఆక్రమించిన గడుల సంఖ్య ఎంత?

విద్యార్థి : రెండవ పటం ఆక్రమించిన గడుల సంఖ్య 8

ఉపాధ్యాయుడు : రెండవ దీర్ఘచతురస్ర వైశాల్యం ఎంత అవుతుంది?

విద్యార్థి : 8 చదరపు సెం.మీ.

ఉపాధ్యాయుడు : ఒక గడి కొలత ఒక సెం.మీగా తీసుకుంటే, రెండవ పటం పొడవు, వెడల్పులు ఎంత?

విద్యార్థి : పొడవు 4 సెం.మీ, వెడల్పు 2 సెం.మీ

ఉపాధ్యాయుడు : రెండవ పటంలో కూడా, దీర్ఘచతురస్రం పొడవు, వెడల్పులకు, వైశాల్యానికి ఏమైనా సంబంధం ఉందా?

విద్యార్థి : ఈ ఉదాహరణలో కూడా దీర్ఘ చతురస్రం పొడవు, వెడల్పులను గుణిస్తే వైశాల్యం వచ్చింది.

ఉపాధ్యాయుడు : ఈ రెండు ఉదాహరణలను పరిశీలించి, ఏమని సాధారణీకరణం చేయవచ్చు?

విద్యార్థి : దీర్ఘచతురస్త్ర వైశాల్యం, దాని పొడవు, వెడల్పుల లబ్ధానికి సమానం.

ఉపాధ్యాయుడు : కాబట్టి, దీర్ఘచతురస్ర వైశాల్యం కనుగొనాలంటే, సూత్రం ఏమని చెప్పవచ్చు?

విద్యార్థి : దీర్ఘచతురస్ర వైశాల్యం = పొడవు × వెడల్పు

ఆగమన ఉపగమం – గుణాలు

– గణిత అభ్యసనకు ఇది అత్యంత అనుకూలమైన పద్ధతి. సహజమైనది కూడా.

– విషయశోధనకు, అన్వేషణకు అవకాశం ఇస్తుంది.

– తార్కికమైన పద్ధతి. శాస్త్రీయమైనది.

- మనోవైజ్ఞానిక పద్ధతులకు అనుగుణంగా సాగుతుంది.
- అభ్యాసకుల్లో విమర్శనాత్మక ఆలోచనను అభివృద్ధిపరుస్తుంది.
- శిశుకేంద్రీకృత పద్ధతి కావటంతో విద్యార్థులు క్రియాత్మకంగా పాల్గొంటారు.
- ఈ విధానంలో అభ్యసన ప్రత్యక్ష అనుభవాల ద్వారా జరుగుతుంది. కాబట్టి, విద్యార్థుల్లో విషయావగాహన ఎక్కువ స్థాయిలో జరుగుతుంది.

ఆగమన ఉపగమం - పరిమితులు

- ఇది సుదీర్ఘమైన ప్రక్రియ. ఎక్కువ సమయం, శ్రమ అవసరమవుతాయి. దీని వలన సిలబస్‌ను సకాలంలో పూర్తిచేయటం సాధ్యం కాదు.
- ప్రతి గణిత భావననూ ఈ పద్ధతిలో బోధించటం సాధ్యం కాదు.
- ప్రతిభావంతులైన విద్యార్థులకు ఈ పద్ధతి అనుకూలమైన పద్ధతి కాదు.
- అనువైన సందర్భాలను ఎన్నుకోకపోతే, ఈ పద్ధతి అన్ని సందర్భాల్లో సత్యం కాకపోవచ్చు.
- సమస్య సాధనకు అవకాశం లేకపోవటంతో ఈ పద్ధతి పరిపూర్ణ పద్ధతి కాదని విమర్శకుల వాదన.
- కేవలం ప్రాథమిక, ప్రాథమికోన్నత స్థాయిలకు మాత్రమే అనుకూలంగా ఉంటుంది. ఉన్నతస్థాయి విద్యకు ఏమాత్రం అనుకూలం కాదు.

ఇవి చేయండి: ఎనిమిదో తరగతి విద్యార్థుల చేత వారి గణిత పాఠ్యపుస్తకం నుంచి ఏదైనా సూత్రాన్ని ఆగమన ఉపగమం ద్వారా రాబట్టే ప్రయత్నం చేయించండి. విద్యార్థుల ప్రతిస్పందనలను నమోదు చేయండి.

3.4.1.2 నిగమన ఉపగమం *(Deductive Approach)*

ఆగమన ఉపగమానికి విపర్యయంగా నిగమన ఉపగమం సాగుతుంది. ఇది నిగమన హేతువాదం మీద ఆధారపడిన బోధన ఉపగమం. శాస్త్రీయ సత్యాలు, సిద్ధాంతాలు, సూత్రాలు, సాధారణీకరణాలను ప్రత్యేక సందర్భాలకు అన్వయించి, వాటి యథార్థతను తెలుసుకునే ఉపగమాన్ని నిగమన ఉపగమం అంటారు. దీన్నే సూత్ర ప్రయోగ పద్ధతి అని కూడా అంటారు.

విద్యార్థులు స్వయంగా సూత్రాన్ని ఆవిష్కరించటం కష్టతరంగా భావిస్తున్న సందర్భానికి ఈ ఉపగమం చాలా తగినదిగా ఉంటుంది. సూత్రం ఏవిధంగా ఉత్పన్నమైందనే విషయానికి అంతగా ప్రాధాన్యత లేని సందర్భంలో కూడా నిగమన ఉపగమం చక్కగా ఉపయోగిస్తుంది. సమస్య సాధనలో సూత్రానికి అధిక ప్రాధాన్యత ఉన్న సందర్భాల్లో కూడా నిగమన ఉపగమాన్ని ఉపయోగించటం వల్ల అభ్యసన వేగంగా సాగుతుంది.

బోధించిన విషయాన్ని పునర్విమర్శ చేసుకోవటానికి, ఒక సూత్రం నుంచి మరొక సూత్రాన్ని ఉత్పన్నం చేయటానికి ఈ పద్ధతి సరైన ఎంపిక.

నిగమన ఉపగమం - సూత్రాలు / లక్షణాలు

- సూత్రం నుంచి ఉదాహరణకు సాగుతుంది.
- అమూర్త విషయాల నుంచి మూర్త విషయాలకు సాగుతుంది.
- సాధారణీకరణం నుంచి ప్రత్యేక అంశం దిశగా బోధన జరుగుతుంది.
- సూత్రీకరణలు / సాధరణీకరణాలు / నియమాలను పరీక్షించేదిగా ఉంటుంది.

నిగమన ఉపగమం - బోధన విధానం

శీర్షికా ప్రకటన పూర్తవగానే ఉపాధ్యాయుడు సూత్రాన్ని తెలియజేస్తాడు. ముందుగానే స్థాపించిన సత్యంగా

సూత్రాన్ని విద్యార్థులు భావన చేస్తారు. సూత్రాన్ని కంఠస్తం చేయటం, సూత్రాన్ని ఉపయోగించి సమస్యను సాధించటం జరుగుతుంది.

తరగతి : 6

అంశం : చుట్టుకొలతలు మరియు వైశాల్యాలు

ఉప అంశం : చతురస్రం చుట్టుకొలత కనుగొనటం

సమస్య : ఒక చతురస్రాకార పటం యొక్క భుజం 26 మీ అయిన వైశాల్యాన్ని కనుగొనండి.

సాధన:

ఉపాధ్యాయుడు : నల్లబల్లపై సమస్యను రాసి, విద్యార్థి చేత చదివిస్తాను.

విద్యార్థి : సమస్యను చదువుతాడు.

ఉపాధ్యాయుడు : ఇచ్చిన సమస్యలో ఏమి కనుక్కోవాలి?

విద్యార్థి : చతురస్ర వైశాల్యాన్ని కనుక్కోవాలి.

ఉపాధ్యాయుడు : చతురస్ర వైశాల్యానికి సూత్రం ఏమిటి?

విద్యార్థి : చతురస్ర వైశాల్యం = భుజం × భుజం

ఉపాధ్యాయుడు : ఇచ్చిన సమస్యలో చతురస్ర భుజం పొడవు ఎంత?

విద్యార్థి : భుజం పొడవు 26 మీ

ఉపాధ్యాయుడు : ఈ విలువను ఎందులో ప్రతిక్షేపించాలి?

విద్యార్థి : చతురస్ర వైశాల్య సూత్రంలో ప్రతిక్షేపించాలి.

ఉపాధ్యాయుడు : భుజం పొడవును వైశాల్యం సూత్రంలో ప్రతిక్షేపిస్తే ఎంత విలువ వస్తుంది?

విద్యార్థి : చతురస్ర వైశాల్యం = 26 × 26 = 676 చ.మీ

ఉపాధ్యాయుడు : కాబట్టి, ఇచ్చిన చతురస్ర వైశాల్యం ఎంత అవుతుంది?

విద్యార్థి : 676 చ.మీ

నిగమన ఉపగమం – గుణాలు

- ఈ పద్ధతి చాలా సంక్షిప్తంగా ఉంటుంది. సులభంగా సాగుతుంది.
- ఉపాధ్యాయులు, అభ్యాసకులు ఇద్దరికీ కాలాన్ని, శ్రమను ఆదా చేస్తుంది.
- విద్యార్థుల్లో జ్ఞాపకశక్తిని పెంపొందిస్తుంది.
- అభ్యాసం, ఆవర్తనం, అనుబంధ కార్యక్రమాలకు ఈ పద్ధతిలో అవకాశం ఉంటుంది.
- ఉన్నతస్థాయి బోధనకు ఇది తగిన పద్ధతి.
- సమస్యాసాధనలో వేగం, కచ్చితత్వం, నైపుణ్యం, సమర్థతలను పెంపొందింపజేస్తుంది.

నిగమన ఉపగమం – పరిమితులు

- బోధన, అభ్యసన ప్రక్రియలో విద్యార్థులు క్రియాత్మక భాగస్వాములు కాలేరు.
- విద్యార్థుల్లో ఆలోచన, వివేచన, అన్వేషణకు తావుండదు.
- ప్రజ్ఞ, అవగాహనల కన్నా స్మృతికి ఎక్కువ ప్రాధాన్యత ఇవ్వటం వల్ల విద్యావిషయకంగా అంతగా తగినది కాదు.
- సూత్ర ఆవిష్కరణకు సంబంధించిన సందేహాలను ఈ పద్ధతి నివృత్తి చేయలేదు.

– ప్రారంభ అభ్యాసకులకు సూత్రాలను గుర్తుపెట్టుకోవటం కష్టమైన పని. అందువల్ల, ప్రారంభ అభ్యాసకులకు ఈ పద్ధతి తగినది కాదు.
– సూత్రాలను కంఠస్తం చేయటానికి ప్రాధాన్యత ఎక్కువగా ఉండటం వల్ల, మరిచిపోయిన సూత్రాలను తిరిగి జ్ఞప్తికి తెచ్చుకోవటం కష్టమవుతుంది.

ఆగమన , నిగమన ఉపగమాలను రెండింటినీ విడివిడిగా ఉపయోగించటం వల్ల గణితాభ్యాసం పూర్తిస్థాయిలో జరగదు. ఎందుకంటే, గణితంలో ప్రతి శీర్షికను అధ్యయనం చేయటంలో ఉండే సూత్రీకరణ, అనుప్రయుక్తం అనే రెండు భాగాలను, ఈ రెండు పద్ధతుల్లో ఏ ఒక్క పద్ధతీ సంపూర్ణంగా సాధించలేదు. అందువల్ల ఆగమన, నిగమన పద్ధతులు రెండింటినీ సమ్మిళితం చేసి, బోధనకు ఉపయోగించినట్లయితే చక్కటి ఫలితాలు సాధించవచ్చు.

కృత్యం : బ్లాక్ టీచింగ్‌లో భాగంగా ఆగమన, నిగమన ఉపగమాల సమ్మేళనంతో ఒక పాఠాన్ని బోధించండి. మీ అనుభవాన్ని నమోదు చేయండి.

3.4.1.3 విశ్లేషణ పద్ధతి *(Analytic method)*

విశ్లేషణ పద్ధతిలో సమస్యను సాధించే క్రమంలో ఉపాధ్యాయుడు తన వాదనను సారాంశం నుంచి ప్రారంభిస్తాడు. ఏం కనుక్కోవాలి? ఇందుకోసం దత్తాంశంలోని అంశాలేవి? దత్తాంశంలో ఉన్న వివిధ రాశుల మధ్య ఉన్న సంబంధం ఏమిటి? సారాంశం, దత్తాంశాల మధ్య ఏదైనా సంబంధం ఉందా? సాధన విధానం ఏమిటి? అనే విశ్లేషణలు ఈ పద్ధతిలో ప్రధానంగా ఉంటాయి. సారాంశం నుంచి దత్తాంశానికి సమస్యా సాధన జరుగుతుంది.

విశ్లేషణ పద్ధతిలో బోధన విధానం సారాంశం నుంచి దత్తాంశం దిశగా సాగుతుంది. అభ్యాసకుడు తనకు తెలియని విషయాల నుంచి తెలిసిన విషయానికి తార్కిక సంబంధాలను శోధిస్తాడు. సమస్యాసాధనలో ఉపయోగించిన ప్రతి సోపానానికీ కారణాన్ని ఈ పద్ధతిలో తెలుసుకోవటం వీలవుతుంది. ప్రవచనాలు, సిద్ధాంతాలను ఎలా నిరూపించాలో విశ్లేషణాత్మక వివరణ ఈ పద్ధతి ద్వారా అందుతుంది.

విశ్లేషణ పద్ధతి – బోధన విధానం

సమస్య : సాధించండి $3p+4m=25, 4p+3m=24$

సారాంశం : p, విలువలు కనుక్కోవాలి.

1. ఈ సమస్యలో ఏమి కనుక్కోవాలి?

జ. , అనే రెండు అవ్యక్త రాశుల విలువలు కనుక్కోవాలి.

2. ఆ రెండు అవ్యక్తరాశుల విలువలను ఎట్లా కనుక్కుంటావు?

జ. ఒక అవ్యక్తరాశి విలువలను ముందుగాను, రెండో అవ్యక్తరాశి విలువను తర్వాత కనుక్కుంటాను.

3. వాటిలో ఒక అవ్యక్తరాశి విలువ ఎలా కనుక్కుంటావు?

జ. ఇంకొక అవ్యక్తరాశి విలువను ఇచ్చిన సమీకరణాల్లో ఏదో ఒకదానిలో ప్రతిక్షేపించి, సూక్ష్మీకరిస్తే వస్తుంది.

4. మరొక అవ్యక్తరాశి విలువ ఎలా కనుక్కుంటావు?

జ. దత్త సమీకరణాల నుంచి రెండో రాశిని తొలగించటం ద్వారా సామాన్య సమీకరణం ఏర్పడుతుంది. దాన్ని సాధిస్తే అవ్యక్తరాశి విలువ వస్తుంది.

5. దత్త సమీకరణాల నుంచి రెండో అవ్యక్తరాశిని ఎట్లా తొలగిస్తావు?

జ. రెండు సమీకరణాల్లోను రెండో అవ్యక్తరాశి గుణకాలను సమానం చేసి, సమీకరణాల సంకలనం / వ్యవకలనం వల్ల రెండో అవ్యక్తరాశిని తొలగిస్తాను.

6. రెండు సమీకరణాల్లోను రెండు అవ్యక్తరాశి గుణకాలను ఏవిధంగా సమానం చేస్తావు?

జ. ఒకటవ సమీకరణాన్ని రెండవ సమీకరణంలోని రెండో అవ్యక్తరాశి గుణకంతోను, రెండో సమీకరణాన్ని ఒకటో సమీకరణంలోని రెండో అవ్యక్తరాశి గుణకంతోను హెచ్చిస్తే, రెండు సమీకరణాల్లోనూ రెండో అవ్యక్తరాశి గుణకాలు సమానం అవుతాయి.

7. ఒకటో సమీకరణంలోని రెండవ అవ్యక్తరాశి గుణకాన్ని ఏవిధంగా కనుక్కుంటావు?

జ. సమస్యలో ఇవ్వటం జరిగింది.

8. రెండవ సమీకరణంలోని రెండో అవ్యక్తరాశి గుణకాన్ని ఎట్లా కనుక్కుంటావు?

జ. సమస్యలో ఇవ్వటం జరిగింది.

విశ్లేషణ పద్ధతి – గుణాలు

– ఇది మనోవైజ్ఞానిక పద్ధతి. శాస్త్రీయమైంది కూడా.

– నూతన విషయాలు కనుక్కోవాలనే ఉత్సాహాన్ని అభ్యాసకుల్లో రేకెత్తిస్తుంది.

– కంఠస్తం చేయాల్సిన అవసరం ఉండదు. ఇంటిపని ఉండదు.

– ఇది నిర్మాణాత్మక పద్ధతి. ఆలోచనా ప్రక్రియ కావటంతో విద్యార్థుల్లో అన్వేషణ దృక్పథం పెరుగుతుంది. ఆలోచన, వివేచన శక్తులు వృద్ధి చెందుతాయి.

– అభ్యాసకుల్లో ఆత్మవిశ్వాసం పెంపొందుతుంది.

– విద్యార్థుల్లో సృజనాత్మకత పెరుగుతుంది.

– విషయ అవగాహనలో స్పష్టత ఉంటుంది. అనుమానాలకు చోటు ఉండదు.

– ప్రతి సోపానానికీ తగిన హేతువు ఉంటుంది.

విశ్లేషణ పద్ధతి – పరిమితులు x^0

– సుదీర్ఘమైన ప్రక్రియ కావటంతో, ఎక్కువ శ్రమ, సమయం ఖర్చవుతాయి.

– ఈ పద్ధతిలో వేగం తక్కువ. ఒక్కోసారి విసుగు కలిగిస్తుంది.

– గణితంలోని అన్ని శీర్షికలనూ ఈ పద్ధతిలో బోధించటానికి వీలు పడదు.

– సమస్యా సాధనకు ఇది సంపూర్ణ పద్ధతి కాదు. ఈవిధానంలో సమస్యను సాధించేందుకు అవసరమైన సాధన విధానాన్ని మాత్రమే రాబట్టటం జరుగుతుంది.

3.4.1.4 సంశ్లేషణ పద్ధతి *(Synthetic method)*

విశ్లేషణ పద్ధతికి పూరకంగా ఉండే పద్ధతి ఇది. విడివిడిగా ఉన్న అంశాలను ఏకం చేయటమే సంశ్లేషణ. గతంలో నేర్చుకున్న సూత్రాలు, విషయాలను కలిపి, వాటి ఆధారంగా సమస్యను సాధించటం ఈ పద్ధతిలో ప్రధానాంశం. ఈ పద్ధతి విశ్లేషణ పద్ధతికి వ్యతిరేకంగా సాగుతుంది. బోధన విధానం దత్తాంశం నుంచి సారాంశానికి సాగుతుంది.

సంశ్లేషణ పద్ధతి – బోధన విధానం

సమస్య : ఒక చతుర్భుజంలోని కోణాలు వరుసగా , $(x-10)^0$, $(x+30)^0$ మరియు $2x^0$ అయితే, ఆ కోణాలను కనుగొనండి.

ఉపాధ్యాయుడు : ఇచ్చిన సమస్యలో ఎన్ని కోణాలు ఉన్నాయి?

విద్యార్థి : నాలుగు.

ఉపాధ్యాయుడు : అవి ఏమిటి?

విద్యార్థి : x^0, $(x-10)^0$, $(x+30)^0$ మరియు $2x^0$

ఉపాధ్యాయుడు : చతుర్భుజంలోని నాలుగు కోణాల మొత్తం ఎంత?

విద్యార్థి : 360^0

ఉపాధ్యాయుడు : లెక్కప్రకారం, నాలుగు కోణాల మొత్తం ఎంతకు సమానం కావాలి?

విద్యార్థి : 360^0

ఉపాధ్యాయుడు : ఇచ్చిన లెక్కలోని నాలుగు కోణాల మొత్తం ఎంత?

విద్యార్థి : $x^0 + (x-10)^0 + (x+30)^0 + 2x^0 = (5x+20)^0$

ఉపాధ్యాయుడు : $(5x+20)^0$ ఎంతకు సమానం కావాలి.

విద్యార్థి : 360^0

ఉపాధ్యాయుడు : $(5x+20)^0$ లను 360^0 కి సమానం చేయండి. సూక్ష్మీకరించండి.

విద్యార్థి : $(5x+20)^0 = 360^0$

$$\Rightarrow 5x = 360 - 20 = 340$$

$$\Rightarrow x = \frac{340}{5} = 68^0$$

ఉపాధ్యాయుడు : కనుగొన్న విలువను, లెక్క ప్రకారం ఇచ్చిన కోణాల్లో ప్రతిక్షేపించి, కోణాల విలువలు కనుక్కోండి.

విద్యార్థి : మిగిలిన కోణాల విలువలు వరుసగా 58^0, 98^0, 136^0

ఉపాధ్యాయుడు : చతుర్భుజంలోని అన్ని కోణాలు ఏవి?

విద్యార్థి : 68^0, 58^0, 98^0, 136^0

x

సంశ్లేషణ పద్ధతి– గుణాలు

- ఈ పద్ధతి సంక్షిప్తంగా ఉంటుంది.
- ఈ పద్ధతి సమాచారాత్మకంగా ఉంటుంది.
- సమస్యల సాధన వేగంగా జరుగుతుంది.
- విద్యార్థుల్లో జ్ఞాపకశక్తిని వృద్ధి చేస్తుంది.
- విషయాన్ని సంక్షిప్తంగా, సోపానాల పద్ధతిలో చెప్పే నేర్పు కలుగుతుంది.
- విద్యార్థుల శ్రమ, కాలం పొదుపు అవుతాయి.
- సాధారణంగా పాఠ్యగ్రంథ రచయితలకు అనుకూలంగా ఉంటుంది.

సంశ్లేషణ పద్ధతి – పరిమితులు

- విషయం పట్ల సంపూర్ణ అవగాహన ఈ పద్ధతి ద్వారా లభించదు.
- విద్యార్థుల ఆలోచన, సృజనాత్మకత, ఆవిష్కరణలకు ఇందులో స్థానం లేదు.
- సమస్యా సాధనలోని సోపానాలు మరిచిపోయినట్లయితే తిరిగి జ్ఞప్తి తెచ్చుకోవటం సాధ్యం కాదు.
- సోపానాలను గుడ్డిగా అనుసరించాల్సి వస్తుంది.
- ఇంటిపని ఎక్కువగా ఉంటుంది.
- కంఠస్థం చేయటాన్ని ప్రోత్సహిస్తుంది.

ఆగమన, నిగమన ఉపగమాల తీరులోనే విశ్లేషణ, సంశ్లేషణ పద్ధతుల్ని కూడా ఒకదానితో మరొకటి సమ్మిళితం చేసి ఉపయోగించినట్లయితే, తరగతిబోధనలో చక్కటి ఫలితాలు సాధించవచ్చు.

విశ్లేషణ పద్ధతిలో సమస్యా సాధన విధానాన్ని విద్యార్థుల నుంచి రాబట్టటం జరుగుతుంది. సంశ్లేషణ పద్ధతిలో ఆ విధానాన్ని అనుసరించి, సమస్యను సాధించటం జరుగుతుంది. అయితే, సమస్య సాధనా విధానాన్ని రాబట్టి దానిని అమలు పరచకపోయినా, విధానం తెలియకుండా సాధన చేపట్టినా ఫలితం ఉండదు. కాబట్టి, తరగతి బోధనలో ముందుగా విశ్లేషణ, ఆ తర్వాత సంశ్లేషణ చేపట్టినట్లయితే, ఆశించిన లక్ష్యాన్ని సులువుగా చేరుకోవచ్చు. ఉపాధ్యాయుడు విశ్లేషణలో సహాయకారిగా ఉంటూ, సంశ్లేషణను విద్యార్థులకు వదిలిపెట్టాలి.

కృత్యం 1 : బ్లాక్ టీచింగ్‌లో భాగంగా సంశ్లేషణ, విశ్లేషణ పద్ధతుల సమ్మేళనంతో మీ తోటి ఛాత్రోపాధ్యాయుడు పాఠాన్ని బోధించే విధానాన్ని గమనించండి. పరిశీలనలను నమోదు చేసి, మీ అధ్యాపకునితో చర్చించండి.
2 : బ్లాక్‌టీచింగ్‌లో భాగంగా విశ్లేషణ, సంశ్లేషణ పద్ధతులను మిళితం చేస్తూ ఏదైనా ఒక సమస్యను బోధించి, మీ బోధన విధానాన్ని, విద్యార్థుల ప్రతిస్పందనను నమోదు చేయండి.

3.4.1.5 అన్వేషణ పద్ధతి *(Heuristic method)*

అన్వేషణ అంటే వెతికి కనుక్కోవటం అని అర్థం. ఈ పద్ధతిలో విద్యార్థి అన్వేషకుడిగా మారతాడు. తనంతట తానుగానే విషయాన్ని తెలుసుకుంటాడు. ఈ క్రమంలో ఉపాధ్యాయుడు అతడికి మార్గదర్శిగా ఉంటాడు. ప్రశ్నలు, సూచనల ద్వారా విద్యార్థికి అవసరమైన సలహాలు ఇస్తాడు. చేయవలసిన కృత్యాలను సూచిస్తూ, విద్యార్థి తనంతట తానుగా నిర్వచనాలు, సూత్రాలను రూపొందించేట్లు సహాయపడతాడు. అంతేగానీ, పూర్తిస్థాయి బోధన చేయడు. 'ఆచరణ ద్వారా అభ్యసనం' అనే సూత్రం ఆధారంగా ఈ పద్ధతిలో అభ్యాసం జరగుతుంది. ఇందువల్ల 'నేను కనుక్కున్నాను' అనే ఆనందం విద్యార్థికి కలుగుతుంది.

ఈవిధానం విద్యార్థిని స్వతంత్రుడిగా తీర్చిదిద్దుతుంది. స్వీయ అభ్యసనం, శిక్షణ ఈ పద్ధతిలో ప్రధాన అంతర్భావాలుగా ఉంటాయి. పరిశీలన, ప్రయోగం, శోధన కేంద్రంగా అభ్యసన జరుగుతుంది. విద్యార్థుల్లో శాస్త్రీయ ఆలోచనకు, తార్కిక ఆలోచనకు, హేతువాద దృక్పథానికి ప్రాతిపదికగా నిలుస్తుంది. ఇతర పద్ధతులకు భిన్నంగా ఈ పద్ధతిలో విద్యార్థి క్రియాత్మకంగా వ్యవహరిస్తే, ఉపాధ్యాయుడు తెరవెనుక మార్గదర్శిగా ఉంటాడు. కానీ, విద్యార్థిని అన్ని కోణాల్లోనూ పరిశీలిస్తూ, తగిన సూచనలు చేస్తాడు.

అన్వేషణ పద్ధతి – ఉపాధ్యాయుని పాత్ర

– బోధించదలచుకున్న విషయాన్ని పరిశోధనకు వీలుగా మార్చాలి.
– సమస్య శోధనకు / అన్వేషణకు తగిన పరిస్థితులు కల్పించాలి.
– సమస్యను అధ్యయనం చేయటానికి, సాధించటానికి తగిన సూచనలు చేయాలి.
– పిల్లల్లో ఆలోచన రేకెత్తించే ప్రశ్నలు వేయాలి.
– తరగతి స్థాయి, విద్యార్థుల స్థాయి, సామర్థ్యాలకు అనుగుణంగా సమస్య ఇవ్వాలి.
– అవసరమైనంత వరకే విద్యార్థులకు సహాయం / సూచన ఇవ్వాలే కానీ, అంతా తానై సమస్య సాధనలో పాల్గొనకూడదు.

అన్వేషణ పద్ధతి – గుణాలు

– విద్యార్థులకు అమితమైన ప్రోత్సాహాన్ని ఇస్తుంది.
– స్వయంచాలిత క్రియాశీలత, స్వీయ అభ్యసన పెరుగుతాయి.
– విద్యార్థిలోని క్రియాత్మక, సృజనాత్మక, నిర్మాణాత్మక శక్తులు పూర్తిగా వినియోగంలోకి వస్తాయి

– విద్యార్థుల్లో నిర్మాణాత్మక కౌశలాలు కల్గించవచ్చు.

– జ్ఞానేంద్రియ శిక్షణకు అవకాశం కలుగుతుంది.

అన్వేషణ పద్ధతి – పరిమితులు

– ఉపాధ్యాయుడు ప్రతిభావంతుడై ఉండాలి. మార్గదర్శక నైపుణ్యాలు తప్పనిసరి. లేకపోతే, ఈ పద్ధతి పూర్తిగా నిష్ప్రయోజనం అవుతుంది.

– ఈ పద్ధతి అమలు చేయటానికి ముందే ఉపాధ్యాయుడు తగిన ప్రణాళికలు, సామగ్రి ఏర్పాటు చేసుకోవాలి.

– విద్యార్థుల వ్యక్తిగత సామర్థ్యాలకు అనుగుణంగా సమస్యలు ఇవ్వాల్సి ఉంటుంది.

– ఎక్కువ సమయం తీసుకుంటుంది.

– అధికసంఖ్యలో విద్యార్థులు ఉన్న తరగతులకు అనుకూలం కాదు.

– విద్యార్థులపై నిరంతర పర్యవేక్షణ అవసరం.

– అన్ని శీర్షికలను ఈ విధానం ద్వారా అభ్యాసం చేయటం సాధ్యం కాదు.

– ఉపాధ్యాయుడు సరైన మార్గదర్శనం చేయకపోతే, విద్యార్థి నిరాశ చెందటంతో పాటు అభ్యసనం కుంటుపడుతుంది.

3.4.1.6 ప్రకల్పన పద్ధతి *(Project method)*

విద్యార్థులకు విషయజ్ఞానంతో పాటు అవగాహన, వినియోగం, నైపుణ్యాలకు సంబంధించిన వాస్తవ అనుభవాలు కల్పించి, విద్యార్థి కేంద్రీకృతంగా బోధన సాగాలనేది ప్రస్తుతం అనుసరిస్తున్న విద్యావిధానం యొక్క ప్రధాన ఆశయం. దీనిప్రకారం అభ్యసన సహజ వాతావరణంలో స్వేచ్ఛగా, ఆనందదాయకంగా, ఎటువంటి భారం లేకుండా జరగాలి. నేర్చుకున్న విషయాన్ని వాస్తవ పరిస్థితుల్లో అన్వయించే సామర్థ్యం కూడా విద్యార్థుల్లో పెంపొందింపజేయాలి. ఈవిషయాలన్నిటినీ దృష్టిలో ఉంచుకుని, జాన్‌డ్యూయి ప్రతిపాదించిన వ్యావహారిక సత్తావాదాన్ని విద్యారంగానికి అన్వయం చేస్తూ కిల్‌పాట్రిక్, స్టీవెన్‌సన్, బెలార్డ్, విలియంజేమ్స్ 'ప్రకల్పన పద్ధతి' (ప్రాజెక్ట్ మెథడ్)ని వ్యాప్తిలోకి తీసుకువచ్చారు. వీరిలో కిల్‌పాట్రిక్ తొలిసారిగా ప్రకల్పన పద్ధతిని తరగతిలో మొదటిసారిగా ప్రవేశపెట్టిన ఘనతను అందుకోగా, ఈ పద్ధతికి సమగ్రమైన రూపాన్నిచ్చిన ఖ్యాతి జె.జె.స్టీవెన్‌సన్‌కు దక్కుతుంది.

ఉత్తమ ప్రకల్పన (గుడ్ ప్రాజెక్ట్) – లక్షణాలు

– చక్కటి ఉద్దేశం కలిగి ఉండి, వాస్తవికతకు దగ్గరగా ఉంటుంది.

– మానసిక / శారీరక క్రియాశీలత కలిగి ఉండి, చక్కని అనుభవాన్నిచ్చేదిగా ఉంటుంది.

– ప్రయోజనకారిగా ఉంటూ, విద్యార్థుల సమయం, వ్యయాలను ఆదా చేస్తుంది.

– విద్యార్థి వ్యక్తిగతంగా / జట్టుగా / మొత్తం తరగతి ఒకటిగా చేస్తుంది.

– ఊహాత్మక ఆలోచన, సృజనాత్మకతను పెంపొందింపజేస్తుంది.

– విషయకేంద్రంగా ఉండి, అదనపు అంశాలతో సమన్వయ పరచి, జ్ఞానాన్ని విస్తృతపరచటానికి అవకాశం ఇచ్చేదిగా ఉంటుంది.

– నేర్చుకున్న జ్ఞానం, నైపుణ్యాలను నిజజీవితంలో అన్వయింపజేసేదిగా ఉంటుంది.

– లక్ష్యాధారంగా, ప్రణాళికాబద్ధంగా ఉంటుంది.

ప్రకల్పన పద్ధతి – సోపానాలు

ప్రకల్పన పద్ధతిలో ఉపాధ్యాయుడు కేవలం మార్గదర్శిగా ఉంటూ, విద్యార్థి ఎంచుకున్న ప్రకల్పన సకాలంలో , ఆశించిన లక్ష్యాలు సాధించేలా జరిగేందుకు దోహదం చేస్తాడు. ప్రకల్పన విజయవంతం కావటానికి పాటించవలసిన సోపానాలను విద్యావేత్తలు సూచించారు. అవేమిటంటే...

పరిస్థితులను కల్పించటం : ఉపాధ్యాయుడు విద్యార్థులకు తగిన సన్నివేశాన్ని ప్రేరేపించి, అందులో పాల్గొనేలా

చేయాలి. ఇది సర్వసాధారణంగా ప్రశ్నలు, చర్చలు లేదా సంఘటనల ద్వారా జరుగుతుంది.

ప్రకల్పనను ఎంచుకుని, లక్ష్యాన్ని వివరించటం : విద్యార్థులు ఎంచుకున్న ప్రకల్పన వారి స్థాయికి తగినట్లు ఉండి, వారు తమ శక్తిసామర్థ్యాలను ఉపయోగించి, స్వతంత్రంగా చేయగలిగేటట్లు చూడాలి. ప్రకల్పన ఎంచుకున్న లక్ష్యాన్ని ఉపాధ్యాయుడు విద్యార్థికి వివరించాలి.

ప్రణాళికా రచన : ప్రకల్పన ఆశించిన ఫలితాలు సాధించటానికి మంచి ప్రణాళికా రచన అత్యంత అవసరం. ఎంపిక చేసుకున్న అంశాన్ని ఏ కోణంలో పూర్తి చేయాలి? ఇందుకు ఎలా కార్యాచరణ చేయాలి? వంటి ఆలోచనలు ముందుగా చేసుకోవాలి. విద్యార్థి శక్తిసామర్థ్యాలను కూడా ఈ విషయంలో పరిగణనలోకి తీసుకోవాలి.

అమలు పరచటం : ప్రణాళిక రూపొందించిన తర్వాత మెట్టు దాన్ని అమలు పరచటం. వాస్తవక్షేత్రంలో ప్రకల్పన నిర్వహణ ప్రారంభించిన తర్వాత వచ్చే ఇబ్బందులను ఎలా ఎదుర్కోవాలో ఉపాధ్యాయుడు తగిన సూచనలు ఇవ్వాలి.

మూల్యాంకనం : ప్రకల్పన అమలు చేసిన తర్వాత / పూర్తయిన తర్వాత మూల్యాంకనం నిర్వహించాలి. ప్రకల్పన అమలులో జరిగిన లోపాలేమిటో గుర్తించాలి. అవి ఎందుకు జరిగాయో, వాటివల్ల ప్రకల్పన మీద పడిన ప్రభావం ఏమిటో విశ్లేషించాలి. ఆశించిన లక్ష్యాన్ని ఎంతవరకు సాధించామో అంచనా వేయాలి. పొరపాట్లను సరిదిద్దుకుంటూ కొత్త ప్రకల్పనలకు ప్రణాళికలు తయారుచేయాలి.

నివేదిక : ప్రకల్పనను ఎందుకు ఎంచుకున్నామనే విషయంతో మొదలు పెట్టి, చేసిన ప్రణాళిక, అమలు పరిచిన విధానం, సేకరించిన సమాచారం, చేసిన విశ్లేషణ, వచ్చిన ఫలితాలతో సహా విద్యార్థులు ఒక నివేదిక తయారుచేయాలి. ప్రకల్పన నిర్వహణ కోసం చేసిన ఖర్చు, వినియోగించిన భౌతిక వనరులను కూడా ఇందులో పేర్కొనాలి. వీటి ఆధారంగా కొత్త ప్రకల్పనలు రూపొందించాలి.

ప్రకల్పన పద్ధతి – గుణాలు

– ఇది మనోవైజ్ఞానికమైన పద్ధతి. సంసిద్ధత, అభ్యసన, ఫలిత సిద్ధాంతాల మీద ఆధారపడి ఉంటుంది.

– జట్టు ప్రకల్పనలు చేయటం వల్ల విద్యార్థుల్లో సహకార భావం పెరుగుతుంది.

– విద్యార్థులు ప్రకల్పనలో స్వయంగా పాల్గొనటం వల్ల ఆత్మస్థైర్యం, పట్టుదల, స్వయంప్రతిపత్తి లక్షణాలు వృద్ధి చెందుతాయి.

– వైయుక్తిక భేదాలు గుర్తించటానికి ఈ పద్ధతి ఎంతో అనుకూలంగా ఉంటుంది.

– అంతర్గత శక్తుల్ని వెలికితీయటం సాధ్యమవుతుంది.

– స్వీయఅభ్యసనం చేశామన్న తృప్తి కలుగుతుంది.

– విషయాన్ని 'నేను కనుక్కున్నాను' అనే ఆనందం విద్యార్థిలో కలుగుతుంది.

ప్రకల్పన పద్ధతి – పరిమితులు

– ఎక్కువ సమయం అవసరమవుతుంది.

– సకాలంలో సిలబస్ పూర్తిచేయటం కష్టమవుతుంది

– ఉపాధ్యాయుని పాత్ర చాలా కష్టతరంగా ఉంటుంది. సరైన మార్గదర్శనం ఇవ్వకపోతే ప్రకల్పన విఫలం కావటంతో పాటు ప్రకల్పనల పట్ల విద్యార్థిలో వ్యతిరేక భావనలు ఏర్పడే అవకాశం ఉంది.

– ప్రకల్పన నిర్వహణకు సంబంధించిన వనరులు ఎల్లప్పుడూ అందుబాటులో లేకపోవచ్చు. దీనివల్ల ప్రకల్పన నిర్వహణ కష్టమవుతుంది.

– చాలా వ్యయంతో కూడుకుని ఉంటుంది. అధిక శ్రమ అవసరమవుతుంది.

ఎలిమెంటరీ స్థాయిలో ఇవ్వదగిన ప్రాజెక్ట్‌లు :

– వ్యాపార గణితాంశాలు : లాభ, నష్టాలు, ముదర, వడ్డీ లెక్కలు మొదలగు అంశాలతో ముడిపడి ఉన్న కృత్యాలను విద్యార్థులతో నిర్వహింపజేయాలి. తర్వాత, ఫలితాన్ని పరిశీలింపజేసి, నివేదిక తయారుచేయించాలి.

– పాఠశాల వార్షికోత్సవ నిర్వహణకు సంబంధించిన అంశాల నిర్వహణను ప్రాజెక్ట్‌గా ఇవ్వవచ్చు.

– పాఠశాలలో నిర్వహించే ఏదైనా గణిత / విజ్ఞానశాస్త్ర ప్రదర్శనకు సంబంధించిన అంశాల నిర్వహణతో కూడుకున్న ప్రాజెక్ట్ మొ॥నవి.

కేవలం గణితాన్ని మాత్రమే ఉద్దేశించినపుడు కింద ఉదహరించిన ప్రాజెక్టులను పరిగణలోకి తీసుకోవచ్చు.

కృత్యం : 1. ఏదైనా పాఠశాలలోని పదో తరగతి ఫలితాలను (వరుసగా ఐదు సంవత్సరాలు) సేకరించి, రేఖీయ చిత్రాల ద్వారా ఫలితాలను సూచించండి.

2. మీ కళాశాల భవనం మొత్తంగా, అందులోని గదులన్నిటినీ విడివిడిగా కొలతలు సేకరించి, వైశాల్యాలు లెక్కించండి. ఫలితాలను పట్టిక రూపంలో రాయండి.

3. బ్లాక్ టీచింగ్‌లో భాగంగా నీవు, నీ సహచర ఛాత్రోపాధ్యాయులు తయారు చేసిన గణిత బోధనోపకరణాల ప్రదర్శన నిర్వహించండి.

4. గణితానికి సంబంధించిన సూక్తులు, నినాదాలు, నిర్వచనాలు, గణితశాస్త్రవేత్తల చిత్రాలతో కూడిన పుస్తకాన్ని తయారుచేయండి.

5. నిత్యజీవితంలో ఉపయోగించే వస్తువులను గణిత ఆకృతులతో పోలుస్తూ పట్టిక తయారుచేయండి.

3.4.1.7 సమస్యా పరిష్కార పద్ధతి *(Problem solving method)*

గణితం అంటే సమస్యల వలయం. సమస్యల సాధన గణిత అభ్యసంలో అత్యంత కీలకమైంది. గణితంలో ఆయా సంబంధిత భావనలు, సూత్రాలు, నియమాలు మొదలైన అంశాల పట్ల జ్ఞానాన్ని పొందిన తర్వాత, వివిధ పరిస్థితుల్లో వాటిని అన్వయించటానికి, జ్ఞానాన్ని విస్తృతపరచుకోవటానికి, పాఠ్యపుస్తకంలో ఉన్న సమస్యలను సాధించటానికి ప్రయత్నం చేయటం జరుగుతుంది. ఉపాధ్యాయుడు తరగతి బోధనలో భాగంగా చెప్పిన మాదిరి సమస్యలను ఆధారం చేసుకుని, విద్యార్థులు పాఠ్యపుస్తకంలోని ఇతర సమస్యలు సాధన చేస్తారు. సమస్యా సాధనలో ఇది ఒక కోణమైతే, పాఠ్యపుస్తకం ద్వారా నేర్చుకున్న గణిత పరిజ్ఞానం ఆధారంగా నిజ జీవితంలో ఎదురయ్యే సమస్యలను పరిష్కరించుకునే సామర్థ్యం పెంపొందించుకోవటం మరో కోణం.

పాఠ్యపుస్తక జ్ఞానం దైనందిన జీవితంలో ఉపయోగించినప్పుడే నేర్చుకున్న విద్యకు సార్థకత ఏర్పడుతుంది. జీవితంలో ఎదురయ్యే అనేక సమస్యలను ఎదుర్కొనే సామర్థ్యం విద్యార్థికి విద్య ద్వారా కలగాలి. ఇందుకోసం గణిత సమస్యల సాధన రూపంలో విద్యార్థిని భావిజీతానికి సన్నద్ధుడిని చేయటం జరుగుతుంది.

సమస్యా పరిష్కార పద్ధతి – విద్యార్థులు ఎదుర్కొనే సమస్యలు

– గణనలు సరిగ్గా చేయలేకపోవటం

– వివేచనా సామర్థ్య లోపం, శారీరక లోపాలు

– సరైన విధానాన్ని ఎంచుకోవటంలో లోపం

– సమస్యను సరిగ్గా అర్థం చేసుకోలేకపోవటం

– సమస్యను సరిగ్గా విశ్లేషించలేకపోవటం

సమస్యా పరిష్కార పద్ధతి – సోపానాలు

సమస్యా పరిష్కార పద్ధతి అనుసరించేటప్పుడు ఈ కింది సోపానాలను అనుసరించాలి.

– సమస్యను గుర్తించటం

– సమస్యను అవగాహన చేసుకోవటం

– సమస్యను విశ్లేషణ చేయటం, సమస్యలోని వివిధ అంశాల మధ్య పరస్పర సంబంధాలు తెలుసుకోవటం

– సమస్యకు పరిష్కారాన్ని కనుక్కోవటానికి అవసరమైన సమాచారాన్ని (సూత్రాలు, లక్షణాలు, సాధన ప్రక్రియలు) సేకరించటం లేదా జ్ఞప్తికి తెచ్చుకోవటం

– సేకరించిన సమాచారాన్ని క్రమపద్ధతిలో ఏర్పాటుచేసుకుని, సమస్యను సాధించటం

– జవాబును సరిచూసుకోవటం.

సమస్యా పరిష్కార పద్ధతి – ఉపాధ్యాయుని పాత్ర

– విద్యార్థుల వైయుక్తిక భేదాలు, మానసిక స్థాయిలకు అనుగుణంగా సమస్యలు ఇవ్వాలి.

– తమంతట తామే సమస్యలు పరిష్కరించేలా విద్యార్థులకు మానసిక శిక్షణ ఇవ్వాలి.

– తరగతి పుస్తకాలతో పాటు ఆధార గ్రంథాలు, పరిశీలన గ్రంథాలు, పత్రికలు వంటి ఇతర సౌకర్యాలను కూడా అందుబాటులో ఉంచాలి.

– తరగతిలో స్వేచ్ఛాపూరితమైన వాతావరణం కల్పించాలి.

– విద్యార్థుల్లో పట్టుదల, ఆత్మవిశ్వాసం పెంపొందింపజేయాలి

సమస్యా పరిష్కార పద్ధతి – గుణాలు

– విద్యార్థుల్లో ఆలోచన, వివేచన స్థాయులు పెరుగుతాయి.

– సహనం, సహకారం, ఆత్మవిశ్వాసం పెరుగుతాయి.

– నిత్యజీవిత సమస్యల్ని ఎదుర్కొనే మానసికస్థైర్యం కలుగుతుంది.

– మానసిక క్రమశిక్షణ ఏర్పడుతుంది.

– విశ్లేషణ శక్తి, ఊహాశక్తి, సృజనాత్మకత పెరుగుతాయి.

సమస్యా పరిష్కార పద్ధతి – పరిమితులు

– ఎక్కువ సమయం తీసుకుంటుంది.

– అన్ని శీర్షికలకు అనువైనది కాదు.

– ప్రాథమిక స్థాయి విద్యార్థులకు తగినది కాదు.

– ఈవిధానంలో ఉపాధ్యాయునికి శ్రమ ఎక్కు అవుతుంది.

3.4.1.8 ప్రయోగశాల పద్ధతి *(Laboratory method)*

విద్యార్థులు చదవటం ద్వారా చేయటం ద్వారా విద్యాభ్యాసం చేయాలి. అప్పుడే నిజమైన విద్య అందుతుంది. విద్యార్థులు స్వయంగా ఉపకరణాలను (పనిముట్లు) ఉపయోగించటం ద్వారా ఆనందాన్ని పొందుతారు. వారిలో ఆలోచనలు వికసిస్తాయి. సృజనాత్మకతను ప్రకటించటానికి అవకాశం కలుగుతుంది. మొత్తంగా గణిత అభ్యాసం పట్ల ఆసక్తి పెరుగుతుంది. ఇదంతా జరగాలంటే, సాధారణ తరగతి బోధన సరిపోదు. భౌతిక, రసాయన శాస్త్ర ఉపాధ్యాయుడి మాదిరిగా గణిత ఉపాధ్యాయుడు కూడా విద్యార్థులను ప్రయోగశాలకు తీసుకువెళ్ళి, విద్యార్థుల చేత ప్రయోగాలు చేయించాలి. తరగతి గది వాతావరణానికి భిన్నంగా ప్రయోగశాల వాతావరణం కొత్తగా ఉండటం, వివిధ రకాల ఉపకరణాలు అందుబాటులో ఉండటంతో విద్యార్థి ఆసక్తిగా నేర్చుకుంటాడు. ఇదే ప్రయోగశాల పద్ధతి.

దృష్టి, శ్రవణం, స్పర్శ అనే మూడు జ్ఞానేంద్రియాల వినియోగం ఈ పద్ధతిలో ఉంటాయి. కాబట్టి, ప్రయోగశాల పద్ధతి ద్వారా సాధించే ఫలితాలు చాలా స్థిరంగా ఉంటాయి. 'చేయటం ద్వారా నేర్చుకోవటం', 'పరిశీలన ద్వారా నేర్చుకోవటం' అనే సూత్రాల మీద ఈ పద్ధతి ఆధారపడి ఉంటుంది. దీనివల్ల విద్యార్థి గణితాంశాల పట్ల పరిపూర్ణమైన అవగాహన పొందుతాడు. బోధన చేసే విషయాన్ని ఆధారంగా చేసుకుని, ఉపాధ్యాయుడు తగిన సందర్భాల్లో ప్రయోగశాల పద్ధతిని అనుసరించినట్లయితే ఆశించిన బోధన లక్ష్యాలను తేలికగా సాధించవచ్చు.

ప్రాథమికోన్నతస్థాయిలో ప్రయోగశాల పద్ధతిలో బోధించటానికి అనువైన అంశాలు

1. వృత్త వైశాల్యానికి సూత్రం రాబట్టటం
2. యూలర్ సూత్రాన్ని సరిచూడటం
3. త్రిపరిమాణ, ద్విపరిమాణ పటాల మధ్య సంబంధాన్ని ఏర్పరచటం
4. చతురస్రాకార, వృత్తాకార జియోబోర్డుల ద్వారా సంఖ్యాధర్మాలు, జ్యామితీయ పటాల ధర్మాలు
5. గడియారపు ముళ్ళు, కోణాలు
6. త్రిభుజ ధర్మాలు, కోణాలు
7. వివిధ నమూనాల పరిశీలన – సార్వత్రీకరణ
8. సమాంతర రేఖల ధర్మాలు
9. త్రిభుజంలోని అంతర కోణాలు, బాహ్యకోణాల మధ్య సంబంధం
10. సమాంతర రేఖను ఒక తిర్యగ్రేఖ ఖండించగా ఏర్పడే కోణాల మధ్య సంబంధం

గణిత ప్రయోగశాలకు అవసరమైన పరికరాలు

గణిత నమూనాలు, జామెట్రీ బాక్స్, రేఖాలు చిత్రాలు గీసేందుకు తగిన పరికరాలు, కొలబద్దలు, త్రాసులు, భూభాగాల పరిమాణాన్ని కొలిచే పరికరాలు, గణితశాస్త్ర ఉపకరణాలు, అట్టలు, కత్తెర, మరలు, కప్పీలు, ధర్మామీటర్, $\frac{1}{3}\prod r^2 h$ కొలజాడీలు, డబ్బాలు, మూతలు, లోలకాలు, దారం, పటాలు గీసేందుకు అనువైన బల్లలు, డ్రాయింగ్ పిన్నులు, టేపు, తూకాల పెట్టె, కొలపాత్రలు, గ్రాఫ్ పేపర్లు, జియోబోర్డు, లివర్లు, స్క్రూడ్రైవర్లు, బారోమీటరు, లాక్టో మీటర్, గణితశాస్త్రవేత్తల జీవిత విశేషాలు ఉన్న చార్టులు, సూత్రాలు, నియమాలతో ఉన్న చార్టులు మొదలైనవి

ప్రయోగశాల పద్ధతి – ఉదాహరణ

శంకువు ఘనపరిమాణం అని ప్రయోగ పూర్వకంగా నిరూపించటం

సోపానాలు

ఎ) కావలసిన పరికరాలు : సమాన భూములు, సమాన ఎత్తులు కలిగిన మూడు జతల స్థూపం, శంకువులు (రేకుతో చేసినవి), ఒక బకెట్‌తో నీరు, స్టీల్ పళ్ళెం

బి) స్థూపం ఘనపరిమాణానికి సూత్రం $V = \prod r^2 h$

సి) ప్రయోగ నిర్వహణ

1. $r_1 = r_1, h_1 = h_1$ అయినట్టి మొదటి జత స్థూపం, శంకువులను తీసుకోండి.
2. స్టీలు పళ్ళెంలో స్థూపం ఉంచండి.
3. బకెట్‌లోని నీటిని శంకువు నిండుగా తీసుకోండి.
4. శంకువులోని నీటిని స్థూపంలో పోయండి.
5. మీరు గమనించిన విషయం ఏమిటి?

జ. .... (ఇక్కడ విద్యార్థి సమాధానాన్ని నోట్ చేయాలి)

6. ఇంకోసారి కూడా శంకువుతో నీటిని తీసుకుని, స్తూపంలో పోయండి. మీరు ఏమిగమనించారు?

జ. .... (ఇక్కడ విద్యార్థి సమాధానాన్ని నోట్ చేయాలి)

7. ఇంకోసారి కూడా శంకువుతో నీటిని తీసుకుని, స్తూపంలో పోయండి. మీరు ఏమిగమనించారు?

జ. .... (ఇక్కడ విద్యార్థి సమాధానాన్ని నోట్ చేయాలి)

8. అయినట్టి స్తూపం, శంకువుల జతను తీసుకోండి.

9. సోపానం 2 నుంచి సోపానం 7 వరకు ప్రయోగం చేయండి.

10. అయినట్టి స్తూపం, శంకువుల జతను తీసుకోండి.

11. సోపానం 2 నుంచి సోపానం 7 వరకు ప్రయోగం చేయండి.

12. పై మూడు ప్రయోగాల ఫలితాలను పట్టిక రూపంలో రాయండి.

క్రమ సంఖ్య	స్తూపం భూవ్యాసార్ధం	స్తూపం ఎత్తు	శంకువు భూ వ్యాసార్ధం	శంకువు ఎత్తు	శంకువుతో నీటిని పోయవలసిన పర్యాయాలు (స్తూపం పూర్తిగా నీటితో నిండటానికి)
1	r_1	h_1	r_1	h_1	3
2	r_2	h_2	h_2 $r_2 = r_2, h_2 = h_2$	h_2	3
3	r_3	h_3	r_3	h_3	3

13. పై పట్టికలోని ప్రయోగ ఫలితాలను పరిశీలించి, మీరు గమనించిన విషయాన్ని తెలపండి.

జ. సమాన భూ వ్యాసార్థాలు, సమాన ఎత్తులు ఉన్న స్తూపం, శంకువుల ఘనపరిమాణాల నిష్పత్తి 3:1 లేదా $r = r, h = h$ అయినటువంటి శంకువుతో స్తూపంలో మూడుసార్లు నీటిని పోస్తే స్తూపం నిండుతుంది.

14. అంటే, శంకువు, స్తూపాల ఘనపరిమాణాల సంబంధాన్ని గురించి ఏమి చెప్పవచ్చు?

జ. శంకువు ఘనపరిమాణం, స్తూపం ఘనపరిమాణంలో మూడవ వంతు ఉంటుంది.

15. స్తూపం ఘనపరిమాణం కనుక్కోవటానికి సూత్రం ఏమిటి?

జ. స్తూపం ఘనపరిమాణానికి సూత్రం $\prod r^2 h$

16. పై వాటిని ఆధారంగా చేసుకుని శంకువు ఘనపరిమాణం ఏమవుతుందో చెప్పండి.

జ. $V = \frac{1}{3} \prod r^2 h$

17. పై సూత్రంలో r దేనిని తెలియజేస్తుంది?

జ. శంకువు భూవ్యాసార్థం

18. పై సూత్రంలో దేనిని తెలియజేస్తుంది?

జ. శంకువు ఎత్తు.

కాబట్టి, శంకువు ఘనపరిమాణం $\frac{1}{3} \prod r^2 h$ అని ప్రయోగ పూర్వకంగా నిరూపించటమైంది.

ప్రయోగశాల పద్ధతి – గుణాలు

– ఈ పద్ధతిలో ఆచరణ ద్వారా అభ్యసన జరుగుతుంది. కాబట్టి, విద్యార్థులు అభ్యసనలో ఆసక్తిగా పాల్గొంటారు.

– విద్యార్థికి, ఉపాధ్యాయుడికి మధ్య సన్నిహిత సంబంధం ఏర్పడుతుంది. ఉపాధ్యాయుడు స్నేహితుడిగా, నాయకుడిగా ఉంటాడు.

– విజ్ఞానశాస్త్రానికి, గణితశాస్త్రానికి ఉన్న సహసంబంధాన్ని విద్యార్థి అవగాహన చేసుకుంటాడు.

– మనోవైజ్ఞానిక ప్రాతిపదిక ఉన్న పద్ధతి కావటంతో, మూర్తస్థాయి నుంచి అమూర్తస్థాయికి విద్యార్థి చేరుతాడు.

– వైజ్ఞానిక విచారణ, పరిశీలన, పరిశోధన దృష్టి పెరుగుతాయి.

– విద్యార్థులు స్వతంత్రంగా పనిచేసే అలవాటు చేసుకుంటారు.

– విద్యార్థుల్లో సామూహిక భావన పెరుగుతుంది.

– జట్టు నైపుణ్యాలు పెరుగుతాయి.

– ప్రయోగాత్మకంగా నేర్చుకున్న అంశాలు కావటంతో ఎక్కువకాలం జ్ఞాపకం ఉంటాయి.

ప్రయోగశాల పద్ధతి – పరిమితులు

– అన్ని పాఠ్యాంశాలను ప్రయోగశాల పద్ధతి ద్వారా బోధించటం వీలుపడదు.

– తక్కువ సంఖ్యలో విద్యార్థులు ఉన్న తరగతులకు మాత్రమే ఈ పద్ధతి సౌకర్యవంతంగా ఉంటుంది.

– ఈ పద్ధతి గణితశాస్త్ర సత్యాన్ని తెలుపుతుంది. కానీ, అవసరమైన తార్కిక వివేచన ఇవ్వదు.

– ప్రయోగశాల పద్ధతికి అనువుగా ఉండే పాఠ్యాంశాలు పాఠ్యపుస్తకంలో చాలా తక్కువగా ఉంటాయి.

3.4.1.9. సహయోగ అభ్యసన ఉపగమం *(Collaboarative Learning)*

సహయోగ అభ్యసనం అనే భావన వైగోస్కీ ప్రతిపాదించిన సాంఘిక అభ్యసన సిద్ధాంతంలోని సామీప్య వికాస మండలం ***(Zone of proximal development)*** అనే భావనతో సంబంధం కలిగి ఉంటుంది. సహాధ్యాయులు, పెద్దల సహకారం తీసుకోవటం ద్వారా విద్యార్థి తన అభ్యసనను ఏవిధంగా తీర్చుదిద్దుకోగలడు? అనే విషయాన్ని సహయోగ అభ్యసన ఉపగమం పరిగణలోకి తీసుకుంటుంది.

సహయోగ అభ్యసనం అనే పదం విద్యార్థులందరి సాధారణ గమ్యం కోసం వివిధ నిర్వహణ, నిష్పాదన స్థాయుల్లో విద్యార్థులు కలిసి, చిన్న సమూహాలతో పనిచేసే ఒక బోధన విధానాన్ని సూచిస్తుంది. అందులో విద్యార్థులు వారి అభ్యసనతో పాటు సమూహంలోని ఇతర విద్యార్థుల అభ్యసనకు కూడా బాధ్యత వహిస్తారు. ఈవిధంగా అభ్యసనలో ఒక విద్యార్థి విజయం అనేది ఇతర విద్యార్థుల విజయానికి కూడా తోడ్పడుతుంది.

జ్ఞానం ఒక సామాజిక నిర్మితి అనే అంశంపై సహయోగ అభ్యసనం ఆధారపడి ఉంటుంది. సహయోగ కృత్యాలు సర్వసాధారణంగా ఈ క్రింది సూత్రాలపై ఆధారపడి ఉంటాయి.

– బోధనలో విద్యార్థి ప్రథమ ప్రాధాన్యత కలిగిన కేంద్రంగా ఉంటాడు.

– పరస్పర చర్య, ఆచరణ / చేయటం అనేవి ప్రథమ ప్రాధాన్యత

– సమూహంలో పనిచేయటం అనేది ముఖ్యమైన అభ్యసన విధానం

– అభ్యసనలో వాస్తవ ప్రాపంచిక సమస్యల పరిష్కారాలను అభివృద్ధి పరచటంలో నిర్మాణాత్మక ఉపగమాలను పొందుపరచాలి.

సంప్రదాయ బోధన పద్ధతికి భిన్నంగా సహయోగ ఉపగమంలో అభ్యాసకులు వారి అభ్యసనానికి వారే బాధ్యులు అవుతారు. ఈ ఉపగమం స్వీయ అభ్యసనాన్ని ప్రోత్సహిస్తుంది. అభ్యాసకుల మధ్య సమష్టి సమన్వయ

సహకారంతో క్రియాశీలకంగా అభ్యసనం కొనసాగటానికి ఉపాధ్యాయుడు సౌకర్యకర్తగా ఉంటాడు. ఉపాధ్యాయుడు అభ్యాసకుల విభిన్న అవసరాలను గుర్తించి, కేటాయించిన సమయంలో అభ్యాసకులు ఆశించిన గమ్యాన్ని చేరటానికి సమష్టి సహకార సమన్వయంతో విద్యా సంబంధిత, సామాజిక నైపుణ్యాలను అభివృద్ధి చేస్తాడు.

సహయోగ ఉపగమంలో సోపానాలు

ఈ ఉపగమం ద్వారా అర్థవంతమైన అభ్యసనం జరపటానికి ఉపాధ్యాయుడు విద్యార్థులను జట్లుగా విభజించటానికి గమనించవలసిన / చేయవలసిన కార్యాచరణను ఈ కిందివిధంగా వివరించవచ్చు.

– ఒక్కొక్క జట్టులోని విద్యార్థులు విజాతీయంగా ఉంటారు. కాబట్టి, అభ్యాసకుల ఇష్టానికి ప్రాధాన్యత ఇస్తూ, సరళత్వరీతిలో జట్లను ఏర్పాటుచేయాలి.

– భావనల అభ్యసనానికి జట్టులోని సభ్యులను మార్చాలి.

– జట్టు నియమాలు ఏర్పాటుచేసుకుని, సభ్యులందరూ వాటిని పాటించేట్లు చూడాలి. నియమాలను ఉల్లంఘించటం లేదా అభిప్రాయభేదం ఏర్పడితే, సభ్యులందరూ ఏకాభిప్రాయానికి వచ్చేట్లు చూడాలి.

– ఉపాధ్యాయుడు ప్రతి జట్టుకు నాయకుడిని ఏర్పరచి, జట్టు పని సక్రమంగా నిర్వహించేట్లు, సభ్యులకు సౌకర్యకర్తగా ఉండేట్లు చేయాలి. నాయకుడు సభ్యులపై ఆధిపత్యం చెలాయించకుండా చూడాలి.

– ప్రతి జట్టులోని సభ్యుల పేర్లు, నాయకుల పేర్లు ఒక విద్యార్థితో నమోదు చేయించాలి.

– జట్టుపని మదింపులో జట్టులోని సభ్యులందరికీ సామాన్యంగా ఒక గ్రేడు ఇవ్వాలి. ఈ మదింపు అభ్యాసకుల అభ్యసన వేగాన్ని పెంచటానికి తోడ్పడుతుంది.

– పాఠశాల తరగతులు ప్రారంభమైన రెండు, మూడు నెలల తర్వాత ఈ ఉపగమాన్ని అనుసరిస్తే, చక్కని ఫలితాలు వస్తాయి. ఈ కాలవ్యవధిని విద్యార్థులను జట్లుగా విభజించటానికి వినియోగించుకోవాలి.

– జట్టు సభ్యులందరూ బాధ్యతాయుతంగా పనిచేసేలా వారితో ప్రతిజ్ఞ చేయించాలి.

– సభ్యులందరూ ఒకరితో ఒకరు పరస్పరం భావాలు పంచుకొనేందుకు, సభ్యులందరూ వారివారి భావాలు వెలిబుచ్చేందుకు సమాన అవకాశాలు కల్పించాలి.

– జట్టుపని గమ్యాన్ని చేరటానికి సభ్యులందరూ స్వేచ్ఛగా, సమన్వయంతో, సమష్టి సహకారంతో ఆనందంగా కలసిమెలసి ఉండాలి.

సౌకర్యకర్తగా ఉండే ఉపాధ్యాయుని చుట్టూ చిన్న చిన్న సమూహాలు ఉండేటట్లు చిన్న చిన్న జట్లను అమరిస్తే సహయోగ అభ్యసనం సులభతరం అవుతుంది.

సహయోగ అభ్యసన ఉపగమ లక్షణాలు / ప్రయోజనాలు

– నేర్చుకునే అంశాన్ని వివిధరీతుల్లో అర్థం చేసుకునే అవకాశం అభ్యాసకులకు కల్పించబడుతుంది.

– అభ్యాసకులందరూ విభిన్న ఆలోచనలను, భావాలను పంచుకొనేందుకు వీలుంటుంది.

– అభ్యాసకులు తమ అంతర్గత భావాలను మార్చుకొనేటట్లు అభ్యసనం జరుగుతుంది.

– అభ్యసన ఉత్సుకతను పెంచుతుంది. లోతైన అవగాహన కల్పిస్తుంది.

– ఈ ఉపగమం ద్వారా జరిగే అభ్యసన ప్రక్రియలో భాగంగా అభ్యాసకుల మధ్య ఏర్పడే ఆలోచనలు, భావనల మధ్య వ్యత్యాసాలు, వ్యతిరేకతలు క్రమంగా తొలగిపోతాయి.

– జట్టుపని వల్ల కుల, మత, జాతి విచక్షణా భేదం తొలగిపోతుంది. సభ్యులందరి మధ్యా స్నేహభావం ఏర్పడుతుంది.

– అభ్యాసకులలో ఓపిక, ధృఢ సంకల్పం, సమస్యను మధ్యలో వదలకుండా పూర్తి చేయటం, తన సమర్థతపై నమ్మకం వంటి లక్షణాలను అభివృద్ధి చేస్తుంది.

సహయోగ అభ్యసనం పరిమితులు

– జట్టుపని సమర్థంగా నిర్వహించకపోతే అభ్యాసకులలో తప్పు భావనలు, అసందర్భ భావనలు ఏర్పడే అవకాశం ఉంటుంది.

– బిడియపడే స్వభావం ఉన్న సభ్యులు ముభావంగా, నిష్క్రియాత్మకంగా అభ్యసనలో పాల్గొంటారు.

– ఉపాధ్యాయుడు అనుభవజ్ఞుడు కాకపోయినా లేదా తన సమర్థతను పూర్తిగా వినియోగించకపోయినా, అభ్యసన పూర్తి అయిన తర్వాత మదింపు చేయటం కష్టంగా మారుతుంది. సరైన మదింపు చేయకపోవటం వల్ల అభ్యాసకుల్లో నిరాశ ఏర్పడి, ఫలితంగా అభ్యసన కుంటుపడుతుంది.

– జట్లలో భావనల గురించి చర్చిస్తున్నప్పుడు తరగతి నిర్వహణ సరిగా లేకపోతే అభ్యసనంపై నిరాసక్తత ఏర్పడే అవకాశం ఉంటుంది.

3.4.1.10 సహకార అభ్యసనం *(Co operative Learning)*

తరగతి గదిలోని విద్యార్థులందరినీ జట్లుగా చేసి, ఆ జట్లకు అభ్యసన పనులు కేటాయించి, ఆ సమూహాల మధ్య, ప్రతి సమూహంలోని విద్యార్థుల మధ్య పరస్పర చర్య జరిగేలా చేసినప్పుడు ఆ విద్యార్థులు చేసిన అభ్యసన ఫలవంతం అవుతుంది. దీనినే సహకార అభ్యసనం అంటారు.

తరగతి గదిలో సామర్థ్యాలకు అనుగుణంగా విద్యార్థులను ప్రతిభావంతులు, సగటు స్థాయి విద్యార్థులు, అభ్యసనలో వెనుకబడిన వారు అని మూడువిధాలుగా విభజించటం జరుగుతుంది. ఇది సర్వసాధారణమైన విషయం.

ఈ విద్యార్థులందరినీ జట్లుగా విభజించటంలో రెండు విధానాలు ఉన్నాయి. అవి

1. జట్లను తయారుచేసే సందర్భంలో ఈ మూడువిభాగాల విద్యార్థులను కలిపి జట్టుగా తయారుచేయటం ఒక పద్ధతి. ఇలాచేయటం వల్ల చదువులో వెనుకబడిన విద్యార్థులు తోటి విద్యార్థుల (జట్టులో ఉన్న ప్రతిభావంతులైన విద్యార్థులు) సహాయాన్ని తీసుకుని, తమ అభ్యసనను మెరుగుపరుచుకుంటారు. దీనివల్ల విద్యార్థులందరి మధ్యా పరస్పర చర్య జరిగి, అందరి అభ్యసన స్థాయులు మెరుగుపడతాయి. జట్టులోని సభ్యులందరి మీదా సమవయస్కుల ప్రభావం విద్యార్థుల మీద ఎక్కువగా ఉంటుంది. కొన్ని సందర్భాల్లో తరగతిలో ఉపాధ్యాయుడు చెప్పిన పాఠం కన్నా తోటి విద్యార్థి చెప్పిన అంశం బాగా బోధపడుతుంది. ఈవిధమైన ప్రయోజనాలు సహకార అభ్యసనం ద్వారా సాధ్యమవుతాయి.

2. సామర్థ్యాలవారీగా జట్లను తయారుచేయటం రెండో పద్ధతి. ఒకే స్థాయి, సామర్థ్యం కలిగిన పిల్లలను కొన్ని కొన్ని సందర్భాల్లో వేర్వేరు సమూహాలుగా చేయవలసిన అవసరం ఉంటుంది. ఉదాహరణకు గణితంలో ప్రతిభ గల విద్యార్థుల జ్ఞాపకశక్తికి సవాలుగా కష్టమైన, క్లిష్టమైన సమస్యలను ఇవ్వాల్సిన అవసరం ఉంటుంది. అలాగే, అభ్యసనలో వెనుకబడిన విద్యార్థులకు లోపనివారణ బోధన చేయటానికి లేదా ప్రాథమిక అంశాలు స్థిరపరచటానికి, ఆవర్తనపని ఇవ్వటం జరుగుతోంది. ఇలాంటి సందర్భాల్లో సామర్థ్యాల వారీగా జట్లు చేయటం జరుగుతుంది. సహకార అభ్యసనంలో

విద్యార్థులకు జట్లుగా విభజించేటప్పుడు పాటించవలసిన జాగ్రత్తలు

– సాధ్యమైనంత వరకు జట్లను చిన్నవిగా చేయాలి.

– ప్రతి జట్టులో 5 / 6 గురు విద్యార్థులకు మించకుండా ఉండేలా చర్యలు తీసుకోవాలి.

– పిల్లలను ఎప్పుడూ ఒకే జట్టులో ఉండనివ్వకూడదు. జట్లు మారుస్తూ ఉండాలి.

– జట్టు నాయకులను కూడా మారుస్తూ ఉండాలి. జట్టులోని ప్రతి విద్యార్థి కనీసం ఒకసారైనా నాయకుడు అయ్యేలా చూడాలి.

– జట్లను వేర్వేరు దిక్కుల్లో కూర్చోపెట్టాలి. దీనివల్ల విద్యార్థులు ఏకాగ్రతతో పని పూర్తి చేస్తారు.

– కృత్యం లక్ష్యం, స్వభావాన్ని బట్టి సమవయస్కుల సమూహాలుగా జట్లను తయారుచేయవచ్చు. లేదా వేర్వేరు తరగతుల నుంచి విద్యార్థులను ఎంపిక చేసి, జట్లు తయారుచేయవచ్చు.

– జట్టు నాయకునికి కూడా అవసరమైన సూచనలు ఇవ్వాలి.

– జట్టుపనిలో ప్రతి విద్యార్థి, విద్యార్థి నాయకునితో సహా కృత్యంలో పాల్గొనేట్లు చూడాలి.

– కృత్యం లేదా నిర్దేశించిన పనికి కావలసిన సామగ్రిని సమకూర్చాలి.

ఉపయోగాలు :

– తరగతిలోని అన్ని స్థాయుల విద్యార్థులకు ఉపయోగిస్తుంది.

– విద్యార్థులు తమ అంతర వైయుక్తిక నైపుణ్యాలను పెంచుకోగలుగుతారు.

– ఈ పద్ధతి ద్వారా బోధనాంశం స్థిరీకరణ జరిగిందీ, లేనిదీ తెలుసుకోవచ్చు.

– విద్యార్థుల్లో ఆరోగ్యకరమైన పోటీతత్వాన్ని అలవరచవచ్చు.

– ఈ పద్ధతి విద్యార్థుల్లో ఆలోచన, వివేచన, ప్రజ్ఞాకుతూహలాన్ని ప్రేరేపిస్తూ, స్వీయ అభ్యసనాన్ని అలవాటు చేస్తుంది.

– స్వీయమూల్యాంకనానికి దారి తీస్తుంది.

– సాధారణంగా నిశ్శబ్దంగా ఉండే విద్యార్థులు సైతం, అభ్యసనలో చురుకుగా పాల్గొంటారు.

– విద్యార్థులో సామూహిక స్పృహ పెరుగుతుంది.

పరిమితులు :

– అభ్యసన లోపం కలిగిన విద్యార్థులకు సరైన సూచనలు ఇవ్వకపోతే, వారు అననుకూల వైఖరిని పెంపొందించుకుంటారు.

– తరగతి గదిలో విద్యార్థుల సంఖ్య తక్కువగా ఉన్నప్పుడు మాత్రమే ఈ పద్ధతి పూర్తిస్థాయి ప్రయోజనాన్ని అందిస్తుంది.

– అన్ని పాఠ్యాంశాలను ఈ పద్ధతి ద్వారా బోధించలేము.

సహకార అభ్యసనం ప్రకల్పనలో ఒక భాగం. దీని ద్వారా విద్యార్థి బోధనాభ్యసన ప్రక్రియలో చురుకుగా పాల్గొని, విషయ అవగాహనను, సామాజిక స్పృహను పెంపొందించుకుంటారు. దీనిలో ఉపాధ్యాయుడు నాయకుడిగా, మార్గదర్శకుడిగా, అవకాశం కల్పించేవాడుగా ఉండాలి. ఇది కేవలం జ్ఞానాత్మకరంగానికే కాకుండా భావావేశ, మానసిక చలనాత్మక రంగాలకు ప్రాధాన్యత ఇస్తుంది.

3.5 గణితీకరణ ప్రక్రియ *(Process of Mathematisation)* – అభివృద్ధి

గణితంలో కవిత్వం, సౌందర్యం అంతర్లీనంగా ఉంటాయి. ఈ రెండిటినీ వాటి దృష్టికోణంతోనే సమగ్రంగా అందించగలిగిన నేర్పు ఉన్న వ్యక్తి నుంచి వీటిని అందుకునేందుకు ప్రతి విద్యార్థీ అర్హత కలిగి ఉంటాడు.

– లాంగ్ మరియు డీ టెంపుల్

గణితం అంటే సమస్యలను సాధన చేయటం మాత్రమే కాదు. గణితాత్మకంగా ఉన్న సమస్యలతో పాటు పదాలతో ఉన్న సమస్యలను కూడా గణిత పరిభాషలోకి మార్చుకుని, సాధన చేయటం కూడా గణితశాస్త్ర అధ్యయనంలో భాగంగా సర్వసాధారణంగా జరిగే ప్రక్రియే. ఈవిధంగా ప్రతి అంశాన్నీ గణితదృష్టితో చూడటం, గణిత పరిభాషలోకి మార్చుకునే విధానాన్ని గణితీకరణ అంటారు.

గణితీకరణ అనేది ఒక సంక్లిష్ట ప్రక్రియ. పునర్విశ్లేషణ, పునర్వ్యవస్థీకరణ, సాధారణీకరణ, ప్రతిబింబించటం, అంతర్బోధిక విషయాలను గణితాత్మకంగా వ్యక్తీకరించటం ఇందులో భాగాలుగా ఉంటాయి. – క్లీమెంట్స్ మరియు శర్మ

పాఠశాలలో చేరటానికి పూర్వమే బాలలకు సహజంగా గణిత పరిజ్ఞానం ఉంటుంది. మౌఖికంగా అంకెలు, సంఖ్యలు చెప్పటం, తేడా చెప్పటం, ఆకారాన్ని గుర్తించటం వంటివి సహజజ్ఞానంగా ఉంటాయి. తరగతి పాఠాల ద్వారా ఈ భావాలను ఉపాధ్యాయుడు స్థిరీకరిస్తాడు. దీన్ని కొనసాగిస్తూ, దైనందిన జీవిత సమస్య సాధనకు గణితజ్ఞానాన్ని వినియోగించుకునే సామర్థ్యాన్ని విద్యార్థుల్లో పెంపొందింపజేయటం ఉపాధ్యాయుడు తన ప్రధానలక్ష్యాల్లో ఒకటిగా చేసుకోవాలి. సహజజ్ఞానానికి, పాఠశాలవిద్యకు మధ్య సమన్వయం సాధించినప్పుడే చేసిన అభ్యసన ఫలవంతం అవుతుంది.

పాఠశాల విద్యతో పాటు దైనందిన జీవిత అనుభవాల ద్వారా పొందిన జ్ఞానం, నైపుణ్యాలను విద్యార్థులు

వాస్తవ జీవన సమస్యలను సాధించటానికి ఉపయోగిస్తారు. ఇదే గణితీకరణ ప్రక్రియ.

ఈవిధంగా జరిగే గణితీకరణ ప్రక్రియ దైనందిన జీవితంలో జరిగే లేదా ఎదురయ్యే సంఘటనతో ప్రారంభమవుతుంది. ఈ సందర్భంలో విద్యార్థి సమస్యా సాధనకు తనకు ఉన్న గణిత పరిజ్ఞానంలో ఏ అంశం ఉపయోగిస్తుందో పరిశీలిస్తాడు. క్రమంగా దైనందిన ఘటన విషయాన్ని మరిచిపోయి, పూర్తిగా గణిత సమస్యగా ఘటనను మార్పుచేసుకుంటాడు. తర్వాత, సమస్యకు సాధన కనుగొని, తిరిగి ఆ సాధనను జీవిత ఘటనకు అన్వయం చేస్తాడు. ఈ మొత్తం ప్రక్రియలో దైనందిన జీవిత ఘటన గణిత సమస్యగా మార్పు చేయటం, తిరిగి గణిత సమస్యా పరిష్కారాన్ని జీవిత ఘటనకు అన్వయించటం జరుగుతుంది.

ఉదాహరణకు మట్టితో బొమ్మలు చేయటం పిల్లలకు చాలా ఇష్టమైన ఆట. గణితపరమైన ఆకృతులనే విషయం తెలియకుండానే (పాఠశాలకు పూర్వదశలో) వారు వివిధరకాలైన ఆకృతులను మట్టితో ఎంతో అందంగా తయారుచేస్తారు. పాఠశాలలో చేరి, గణిత ఆకృతులకు సంబంధించిన జ్ఞానాన్ని పొందిన తర్వాత, అవే అకృతులను మరింత ఉన్నతంగా తీర్చిదిద్దుతారు. అంటే, సిద్ధాంతపరంగా ఉన్న జ్ఞానం వాస్తవ పరిస్థితుల్లో అన్వయించటం జరిగింది.

మరో సందర్భాన్ని చూద్దాం. నోటుపుస్తకాలు కొనటానికి దుకాణానికి వెళ్ళిన కల్యాణికి 10 పుస్తకాల సెట్ ఖరీదు రూ. 150 అని, ఒక పుస్తకం అయితే రూ. 17 అని దుకాణదారుడు చెబుతాడు. కొద్దిసేపు ఆలోచించిన ఆమె, ఒక్కో పుస్తకానికి రూ. 2 తగ్గుతుందని భావించి, 10 పుస్తకాల సెట్‌ను కొనుగోలు చేసింది. టోకు లెక్కన అమ్మకం, తగ్గింపు మొదలైన వ్యాపారగణిత భావనలను ఇక్కడ కల్యాణి అన్వయించింది. అంటే, వాస్తవ ఘటనను గణితాత్మకంగా ఆలోచించటం లేదా గణితానికి అన్వయించటం జరిగింది. ఇదే గణితీకరణ.

దైనందిన జీవన వ్యవహారాల్లో అనేక సందర్భాల్లో అనియతంగా మనకు కలిగే అనుభవాలు, పరిశీలించిన అంశాలను నియతపద్ధతుల్లో గణితభావాల్లోకి మార్చుకుని, ఈ జ్ఞానాన్ని మరొక నూతన సందర్భంలో అన్వయించటం జరుగుతుంది. ఇదే గణితీకరణ ప్రక్రియ. – క్లీమెంట్స్ మరియు శర్మ

గణితీకరణ అనేది గణిత నమూనాల తయారీ ప్రక్రియలో ఒక దశ. ఇందులో దైనందిన ఘటన / నమూనాను గణిత నమూనాగా మార్చటం జరుగుతుంది. – బ్లూమ్ మరియు లీబ్

గణితీకరణకు సంబంధించిన సమస్యను సాధించటానికి మొదటి సోపానంగా విద్యార్థి అందుకు తగిన గణిత నమూనా / అంశాన్ని ఎంచుకోవాల్సి ఉంటుంది. తర్వాతి దశలో గణిత వాతావరణంలో పని చేయాల్సి ఉంటుంది (గణిత సమస్యకు పరిష్కారాన్ని / ఫలితాన్ని కనుగొనాలి). ఈవిధంగా లభించిన సాధన / పరిష్కారాన్ని దైనందిన ఘటనకు అన్వయించాలి. ఒకవేళ ఈ సాధన వాస్తవ ఘటనకు పరిష్కారం చూపలేకపోతే, సరైన సాధన లభించేవరకు ఈ ప్రక్రియను తిరిగి నిర్వహించాల్సి ఉంటుంది. ఇదే గణితీకరణ ప్రక్రియ జరిగే విధానం. దీన్ని ఈ క్రింది పటం ద్వారా వివరించవచ్చు.

3.5.1 గణితీకరణ ప్రక్రియలపై విద్యార్థులకు అవగాహన కల్పించటం

గిన్స్‌బర్గ్ ప్రకారం గణితీకరణ అనేది గణిత అభ్యాసానికి కేంద్రబిందువు కావాలి. రోజువారీ అనుభవాలను గణితభావాల్లో వ్యక్తీకరించే సామర్థ్యం పిల్లల్లో అభివృద్ధి చెందాలి. మూర్త, అమూర్త సందర్భాలు / భావనల మధ్య సమన్వయాన్ని సాధించేదిగా గణిత అభ్యసన సాగాలి. అప్పుడే అభ్యసన భావిజీవితానికి విద్యార్థిని సన్నద్ధుడిని చేస్తుంది.

జాతీయ విద్యా ప్రణాళికా చట్రం (ఎన్.సి.ఎఫ్) – 2005 కూడా 'పిల్లల్లో గణితీకరణ సామర్థ్యాలను అభివృద్ధి పరచటం లేదా పిల్లల్లో ఆలోచనా ప్రక్రియలను గణితీకరించటం గణితవిద్య యొక్క ముఖ్య ఉద్దేశ్యంగా ఉండాల'ని పేర్కొంది.

పిల్లలు ఏ సందర్భాన్నైనా గణితానికి చెందిన సాధనాలు, మెళకువలు ఉపయోగించి ఆలోచించేవిధంగా అభ్యసనం జరగాలి. ఈ సాధనాలు, మెళకువల పరిధిలోకి చిత్రాలు గీయటం (ప్రాతినిధ్యం), చరరాశుల ఎంపిక,

సమీకరణాల కూర్పు, తార్కిక నిర్ధారణలకు రావటం వంటి అన్ని అంశాలు వస్తాయి.

గణితానికి రెండు రకాల ఉద్దేశాలు ఉంటాయి. మొదటిది సంకుచిత ఉద్దేశం – తక్షణ జీవితావసరాలను సౌకర్యవంతంగా నిర్వహించుకోవటానికి ఉపయోగపడేవిధంగా సంఖ్యాపరమైన నైపుణ్యాలైన అంకగణిత పరిక్రియలు చేసే సామర్థ్యం, గణన సామర్థ్యం, శాతాలు, వైశాల్యాలు, ఘనపరిమాణాలు, బహుపదుల కారణాంక విభజన మొదలైన అంశాలన్నీ ఈ కోవకు చెందుతాయి. రెండో ఉద్దేశం ఉన్నత ఉద్దేశం – గణితానికి చెందిన అమూర్తభావనలను అవగాహన చేసుకుని, మారుతున్న సంక్లిష్ట సాంకేతిక ప్రపంచంలో సవాళ్ళను ఎదుర్కోవటానికి ఇది తోడ్పడుతుంది. పిల్లల్లో తార్కిక, విశ్లేషణాత్మక ఆలోచనలు అభివృద్ధి చేయటం ద్వారా, గణిత సమస్యల సాధనల్లో ఒక ధృఢమైన వైఖరిని పెంపొందించటం ద్వారా, అదేవిధంగా ఏ సందర్భంలో, ఏ గణిత సాధనాలు సరిపోతాయో, వాటిని తదనుగుణంగా అన్వయింపజేయగలిగేలా నిర్ణయించగల సామర్థ్యాన్ని కలిగించటం ద్వారా గణితీకరణ సామర్థ్యాన్ని పిల్లల్లో పెంచవచ్చు.

పిల్లలు గణితాన్ని గురించి తమలో తాము మాట్లాడుకునేలా, వ్యక్తపరచుకునేలా, చర్చించుకునేలా, కలిసి పనిచేసేలా తరగతి గది ఉండాలి. అలాగే, గణితం పిల్లల జీవితానుభవాలలో ఒక భాగంగా ఉండాలి. ఇదే గణితీకరణ ప్రక్రియగా చెప్పవచ్చు. గణితీకరణ వల్ల పిల్లలు స్వేచ్ఛగా, సృజనాత్మకంగా ఆలోచించే నేర్పును పెంచుకుంటారు.

పిల్లలు తమకు తాము అర్థవంతమైన గణిత సమస్యలు రూపొందించుకునేలా, పరిష్కరించుకొనేలా చేయగలగాలి. వారిలో తార్కిక ఆలోచనలను పెంపొందింపజేయాలి. గణిత విషయం కన్నా అభ్యసన ప్రక్రియకు ప్రాధాన్యత ఇవ్వాలి. దీనిలో భాగంగా గణితంలో వివిధ ప్రక్రియలైన సమస్యా సాధన, అన్వేషణ దృక్పథం, అంచనా వేయటం, క్రమాలను ఉపయోగించటం, దృశ్యీకరణ, ప్రాతినిధ్యపరచటం, కారణాలు, ఉపపత్తి, అనుసంధానించటం, వ్యక్తపరచటం వంటి వాటికి అధిక ప్రాధాన్యత ఇవ్వాలి. ఇవన్నీ గణితీకరణ ప్రక్రియకు తోడ్పడతాయి.

ఈ దిగువ ఇచ్చిన తరహా కృత్యాలను నిర్వహించటం ద్వారా ఉపాధ్యాయుడు విద్యార్థుల్లో గణితీకరణ ప్రక్రియను వృద్ధి చేయవచ్చు.

1. జాతీయాలు, సామెతల ఆధారంగా ఏవైనా రెండు పద సమస్యలను తయారు చేయండి.

2. 5, 25, 35 మరియు 7 సంఖ్యలను కేవలం ఒకసారి ఉపయోగించి, గణిత చతుర్విధ ప్రక్రియలను వరుసగా నిర్వర్తిస్తూ చేయగలిగే పదసమస్యను తయారుచేయండి.

3. ఓవర్, బ్యాట్, పిచ్, సెంచరీ, సచిన్ టెండూల్కర్ – ఈ పదాలను ఉపయోగించి ఒక పదసమస్యను తయారుచేయండి.

4. సమాధానం 173 వచ్చేలా ఒక సమస్యను తయారుచేయండి. ఏ సంఖ్యనైనా, చతుర్విధ ప్రక్రియల్లో అన్నీ లేదా కొన్ని ప్రక్రియలనైనా ఇందుకు ఉపయోగించుకోవచ్చు.

5. శ్రీనిధి బంధువుల ఇంట్లో జరిగే వివాహానికి హాజరు కావటం కోసం తన ఇంటి నుంచి ఉదయం గం.6లకు కారులో బయలుదేరింది. కారు గంటకు 50 కి.మీ వేగంతో ప్రయాణిస్తే, 255 కి.మీ దూరంలో ఉన్న బంధువుల ఇంటికి శ్రీనిధి చేరే సరికి సమయం ఎంత అవుతుంది?

3.5.2 గణితీకరణ ప్రక్రియ – నైపుణ్యాలు / అంశీభూతాలు

ఆశించిన లక్ష్యాలకు అనుగుణంగా గణితీకరణ ప్రక్రియ జరగాలంటే / గణితీకరణ సామర్థ్యాలు అభివృద్ధి చెందటానికి విద్యార్థులకు ఈ క్రింది అంశాల పట్ల ఉపాధ్యాయుడు అవగాహన / నైపుణ్యం కల్పించాల్సి ఉంటుంది.

భావనల్లోని పదాలు : గణితం అనేక భావనల సమాహారంగా ఉంటుంది. ఉపాధ్యాయుడు ఆయా అంశాలను విద్యార్థులకు బోధించేటప్పుడు ఆయా భావనల్లోని కీలకాంశాలు, కీలక పదాల పట్ల స్పష్టమైన అవగాహన విద్యార్థులకు కలిగించాలి. అప్పుడే వాటిని దైనందిన సందర్భాల్లో అవసరమైన చోట్ల సరైనవిధంగా అన్వయించగలుగుతారు. ప్రధానంగా నిర్వచనాల వంటివి బోధిస్తున్న సమయంలో వీలైన అన్నిచోట్లా వాటికి వాస్తవ / దైనందిన అనువర్తనాలు / ఉదాహరణలు ఇస్తూ బోధించాలి. అప్పుడే విద్యార్థికి ఆయా కీలకపదాల పట్ల స్పష్టమైన అవగాహన ఏర్పడటంతో పాటు సరైన సందర్భాల్లో

వాటిని ఉపయోగించే నైపుణ్యం కలుగుతుంది.

భావప్రసార నైపుణ్యం : గణితేతరంగా ఉండే సమస్యల్ని గణితరూపంలో మార్చగలిగిన నైపుణ్యం ఇది. గణితీకరణ ప్రక్రియలో ప్రధానాంశం కూడా ఇదే. ఈ నైపుణ్యాన్ని విద్యార్థుల్లో వృద్ధిచేయటానికి ఉపాధ్యాయుడు ప్రాధాన్యత ఇవ్వాల్సి ఉంటుంది. అలాగే, గణిత పరిభాషను కూడా చదివి, అవగాహన చేసుకుని, తిరిగి వ్యక్తం చేయగలిగిన నైపుణ్యాన్ని విద్యార్థులు సాధించాల్సి ఉంటుంది. అప్పుడే గణితీకరణ ప్రక్రియ పూర్తయినట్లు లెక్క.

తార్కిక విశ్లేషణ : వాస్తవ సన్నివేశాల్ని తార్కికంగా విశ్లేషించి, గణితానికి అన్వయించగలిగిన సామర్థ్యం ఇది. సమస్యను గణితానికి అన్వయించటంతో పాటు, కనుగొన్న ఫలితం వాస్తవ సన్నివేశానికి సరిపోతుందా? లేదా? అనే విషయం కూడా ఇందులో భాగంగా ఉంటుంది. ప్రశ్నించటం ద్వారా ఉపాధ్యాయుడు ఈ నైపుణ్యాన్ని విద్యార్థుల్లో పెంపొందింపజేయాల్సిఉంటుంది.

ప్రాతినిధ్యపరచటం : వివిధ రకాలైన గణితభావనలు, సంకేతాలను సందర్భానికి తగినవిధంగా ఎన్నుకుని, వాస్తవ సమస్యను గణితాత్మకంగా ప్రకటించే నైపుణ్యం ఇది. సన్నివేశాన్ని బట్టి ఒక్కోసారి ఒకటి కన్నా ఎక్కువ విధాలుగా ఆ సన్నివేశాన్ని గణితాత్మకంగా వ్యక్తీకరించవచ్చనే ఆలోచన కలుగుతుంది. ఈ సందర్భంలో సరైన ఎన్నిక చేయటం విద్యార్థి అవగాహన స్థాయి మీద ఆధారపడి ఉంటుంది. సందర్భానికి తగినవిధంగా గణిత పారిభాషిక ప్రతినిధత్వం చేయగలిగినపుడే గణితీకరణ ఆశించిన ఫలితాలను ఇస్తుంది.

సంకేతాలు మరియు పదాలు : సహజ సన్నివేశాలను గణిత సంకేతాల్లో వ్యక్తీకరించటం, తిరిగి సంకేతాలను సహజ సన్నివేశాల్లోకి మార్చటం ఈ నైపుణ్యంలోకి వస్తుంది. గణిత గుర్తులు / సంకేతాలను ఉపయోగించే సందర్భంలో సహజత్వం, సందర్భశుద్ధి ఉండేలా చూడాలి. ఎట్టిపరిస్థితుల్లోనూ గణిత నియమాలకు విరుద్ధంగా గణిత సంకేతాలను అన్వయించకూడదు.

కృత్యం : బ్లాక్‌టీచింగ్‌లో భాగంగా మీరు బోధిస్తున్న తరగతి విద్యార్థుల్లో గణితీకరణ నైపుణ్యాన్ని పరిశీలించటానికి కొన్ని నియోజనాలు వారి చేత చేయించి, ఫలితాలను నమోదు చేయండి. వాటిని మీ కళాశాల ఉపాధ్యాయులతో చర్చించండి.

3.6 గణిత భయం *(Maths Phobia)* – అధిగమించుట

బడిలో ఉపాధ్యాయులు, ఇంటిలో తల్లిదండ్రులు చేసే అనాలోచిత చర్యల వల్ల ప్రాథమిక స్థాయి నుంచి విద్యార్థులు గణితం పట్ల అనవసరమైన భయాన్ని పెంచుకుంటారని ఇంతకుముందు చర్చించుకున్నాం. వాస్తవంగా గణితం ఎంతో తేలికైన విషయం కావటంతో పాటు తార్కికత కూడా కలిగి ఉంటుంది. దీనివల్ల గణితాన్ని అభ్యసించటం ఎంతో ఆనందదాయకంగా సాగుతుంది. అయితే, పిల్లల్లో ఉండే సహజ లోపాలతో పాటు బడిలోను, ఇంట్లోను పెద్దలు చెప్పే భయం వల్ల గణితం అంటే ఒకవిధమైన భయాన్ని పెంచుకుంటున్నారు విద్యార్థులు. ఈవిధమైన గణిత భయాన్ని తొలగించి, విద్యార్థులు గణితం పట్ల ఆసక్తి పెంచుకునేలా చేయాల్సిన బాధ్యత ఉపాధ్యాయుడి మీదే అధికంగా ఉంటుంది.

3.6.1 గణిత భయం ఏర్పడటానికి కారణాలు

రమేష్, సురేష్ ఇద్దరూ కవల పిల్లలు. ఏడో తరగతి చదువుతున్నారు. అప్పటిదాకా గణితంలో డెబ్బైశాతం మార్కులు సాధించే రమేష్‌కు ఎందుకనో ఈసారి పరీక్షల్లో యాభైశాతం మార్కులు కూడా రాలేదు. సురేష్ ఎప్పటిలాగే ఎనభైశాతం మార్కులు సాధించాడు. తల్లిదండ్రులు ప్రశ్నిస్తే, తనకు గణితం అంటే భయంగా ఉందని, లెక్కలు చేయలేకపోతున్నానని, ఇంతకుముందులాగా తనకు సూత్రాలు గుర్తు ఉండటం లేదని రమేష్ చెప్పాడు. ఎందుకు భయం? అని తండ్రి గుచ్చిగుచ్చి ప్రశ్నిస్తే, ఇంటిపని (హోం వర్క్) చేయలేదని గణిత ఉపాధ్యాయుడు తనను తీవ్రంగా మందలించాడని, అప్పటి నుంచి తనలో గణితం అంటే భయం ఏర్పడిందని చెప్పాడు.

అదే తరగతిలో చదివే సరళ ఇంతకుముందు కన్నా ఇప్పుడు ఎంతో ఉత్సాహంగా లెక్కలు చేయటంతో పాటు, జాతీయస్థాయి గణిత ప్రతిభాన్వేషణ పోటీలకు హాజరయ్యేందుకు తయారవుతోంది.

ఒకే తరగతిలో చదివే ఒకే ఈడు పిల్లలకు, ఒకే ఉపాధ్యాయుడు ఒకే విధంగా బోధిస్తున్నా ఒక్కొక్కరికి, ఒక్కోవిధంగా గణితం పట్ల అభిప్రాయం / భయం ఏర్పడుతోంది? ఎందుకిలా జరుగుతోంది? అసలు విద్యార్థులకు గణితభయం ఎందుకు కలుగుతోంది? ఈ అంశాల ప్రస్తుతం అంతర్జాతీయస్థాయిలో పరిశోధనలు కూడా జరుగుతున్నాయి.

మొత్తంగా పరిశోధకులు గమనించింది ఏమిటంటే... గణిత భయం విద్యార్థులందరిలో ఒకే స్థాయిలో, ఒకే తీరులో ఉండదు. ఉండాలనే నియమం లేదు. ఇంకా చెప్పాలంటే, ప్రతి విద్యార్థికీ గణితభయం ఉండాలనే నిబంధన కూడా లేదు.

గణిత భయం అనేది కేవలం ఒక మానసిక సంఘర్షణ లేదా స్థాయి. ఎలాగైతే, ఒక్కో వ్యక్తికి ఒక్కో విధమైన మానసిక స్థాయి ఉంటుందో అలాగే గణితభయం కూడా ఉంటుంది. ఒకే తరగతిలో ఒకే ఉపాధ్యాయుడి వద్ద అభ్యాసం చేసే విద్యార్థుల్లో కొందరు తీవ్రస్థాయిలో గణిత భయాన్ని కలిగి ఉంటే, మరికొందరు సాధారణ భయాన్ని కలిగి ఉంటారు. కొందరు అసలు ఏమాత్రం గణిత భయం లేకుండా, స్వేచ్ఛగా గణిత అభ్యాసం కొనసాగించవచ్చు. ఇవన్నీ సందర్భానుగుణంగా జరిగేవే కానీ, కచ్చితమైన నియమాలేవీ ఇందుకు లేవు.

అలాగే, తమ పిల్లలకు గణితంలో అపారమైన జ్ఞానం, నైపుణ్యం రావాలనే కోరికతో పిల్లల ఆభిరుచులు, స్థాయులను గమనించకుండా, మితిమీరిన ఆశయాలతో విద్యార్థులను ఒత్తిడికి గురి చేసే తల్లిదండ్రుల ప్రవర్తన కూడా గణితభయం ఏర్పడటానికి కారణమవుతుంది. కచ్చితంగా నూరుశాతం మార్కులు రావాలని తల్లిదండ్రులు పెట్టే నిబంధనలు కూడా గణితభయం ఏర్పరస్తుందని పరిశోధనల్లో తేలింది.

ఈ మొత్తం చర్చవల్ల తేలిందేమిటంటే, విద్యార్థుల్లో ఇప్పటిదాకా లేని గణితభయం ఏర్పడవచ్చు. అదేవిధంగా, ఇప్పటిదాకా ఉన్న గణితభయం తొలగిపోవచ్చు. ఇదంతా ఉపాధ్యాయుడు తరగతిగదిలో చేసే బోధన; పాఠశాలలోను, బయటా ఉన్న గణిత వాతావరణం మీద ఆధారపడి ఉంటుంది.

గణిత భయం ఏర్పడటానికి మరికొన్ని కారణాలేమిటంటే...

- విద్యార్థి యొక్క వ్యక్తిగత నేపథ్యం, అతడి శారీరక, మానసిక పరిస్థితులు
- గణితం పట్ల విద్యార్థికి ఇష్టత లేకపోవటం
- ఏదైనా సమస్యను సాధించే క్రమంలో తర్వాతి సోపానం గర్తుకు రాకపోవటం అనేది తరచుగా జరగటం
- ఇంతకుముందు జరిగిన పరీక్షల్లో అతడు సాధించిన తక్కువ మార్కులు, గ్రేడు
- గణితంలోని ప్రాథమిక అంశాలు / భావనల పై పట్టు లేకపోవటం
- గణిత ప్రక్రియల పట్ల సరైన అవగాహన లేకపోవటం
- తక్కువ ప్రజ్ఞాస్థాయి
- మెదడు / నాడీ మండలానికి సంబంధించిన లోపాలు / సమస్యలు ఏర్పడటం
- శక్తికి మించిన లక్ష్యాలను నిర్ణయించుకోవటం
- బలవంతంగా గణిత అభ్యాసం చేయవలసి రావటం
- విషయావగాహన లేకపోవటం
- తల్లిదండ్రులు, ఉపాధ్యాయుల నుంచి లభించే ప్రోత్సాహం / ప్రశంసలో లోపం
- నిస్తేజంగా, నిరాసక్తంగా ఉండే గణిత బోధన, తరగతి గది వాతావరణం
- ఉపాధ్యాయుడు, విద్యార్థి మధ్య సమన్వయ లోపం ఏర్పడటం

మొత్తంగా చూస్తే, గణిత అధ్యయనం పట్ల విద్యార్థులు చూపే విముఖత, సరైన కారణం లేకుండా గణిత

అభ్యాసం నుంచి తప్పించుకోవటం గణిత భయం ఉన్న విద్యార్థి లక్షణాలుగా గుర్తించవచ్చు.

గణిత భయం వల్ల విద్యార్థుల్లో అనేక అవాంఛనీయ పోకడలు ఏర్పడతాయి. విద్యార్థులు ఆత్మవిశ్వాసం కోల్పోవటం, అంతిమంగా విద్యార్జనలో అన్నివిధాలుగా వెనుకబడటం జరగవచ్చు. ఇంటిపని చేయటానికి విముఖత చూపిస్తారు. లేదా ఇంటిపని చేసిపెట్టమని తల్లిదండ్రుల్ని బలవంతం చేస్తారు. అదీ సాధ్యం కాని సందర్భాల్లో పూర్తిగా నిరుత్సాహం చెందుతారు. గణితభయం వల్ల విద్యార్థిలో ఏర్పడే అవాంఛనీయ పోకడల ప్రభావం ఇతర విషయాల (సబ్జెక్ట్‌లు) మీద కూడా పడే అవకాశం ఉంది. మొత్తంగా విద్యార్థి చదువుకు దూరమయ్యే ప్రమాదం ఉంది.

గణితభయం పోగొట్టాలంటే...

విద్యార్థుల్లో గణితభయం పోగొట్టటానికి ఉపాధ్యాయునితో పాటు తల్లిదండ్రులు కూడా ముందుకు రావాలి. ఇందుకోసం వారు సమన్వయంతో పనిచేయాల్సి ఉంటుంది. విద్యార్థుల్లో గణితభయాన్ని పోగొట్టటానికి తీసుకోవాల్సిన చర్యల్లో కొన్నిటిని ఈ దిగువున పేర్కొనటం జరిగింది.

– గణితం చాలా తేలికగా నేర్చుకోదగిన విషయం అనీ, దైనందిన జీవితంలో గణిత అనువర్తనాల ప్రయోజనం ఎంతో ఉందని విద్యార్థులకు ఉదాహరణపూర్వకంగా నిరూపణ చేయాలి. దీనిద్వారా విద్యార్థులకు గణితం పట్ల ఇష్టాన్ని పెంచాలి.

– గణిత భావనలు విద్యార్థులకు అర్థమయ్యేలా బోధించాలి. సూత్రాలు బట్టీపట్టి, సమస్యలను సాధించటం కాకుండా, గణితంలోని ప్రాథమిక భావనలతో సహా అన్ని మౌలికాంశాల పట్ల విద్యార్థులకు పూర్తిస్థాయి అవగాహన కల్పించాలి.

– బోధన కన్నా సాధనకు ఎక్కువ సమయాన్ని కేటాయించాలి.

– ఉపాధ్యాయుడు తాను బోధించటం కాకుండా, విద్యార్థులకు ఎక్కువ అవకాశాన్ని కల్పిస్తూ, తమంతట తాముగా విషయాన్ని నేర్చుకునేలా విద్యార్థులకు మార్గదర్శనం, ప్రోత్సాహం ఇవ్వాలి.

– బోధనోపకరణాల వినియోగానికి ఎక్కువ ప్రాధాన్యత ఇవ్వాలి. దృశ్యీకరణ, చేస్తూ నేర్చుకోవటం వలన విద్యార్థులకు విషయం సూటిగా, స్పష్టంగా, ఎటువంటి సందేహాలు లేకుండా అర్థమవుతుంది.

– పాఠశాలలోను, ఇంట్లోను గణిత వాతావరణం కల్పించాలి.

– లెక్కలు చేయలేకపోయారనో, పరీక్షల్లో మార్కులు తక్కువ వచ్చాయనో కారణాలు చూపిస్తూ విద్యార్థులను అదేపనిగా నిందించటం మానుకోవాలి. దీనివల్ల విద్యార్థులు గణితంతో పాటు పూర్తిగా చదువు పట్ల ఇష్టత కోల్పోయే అవకాశం ఉంది.

– విద్యార్థులు గణితాన్ని ఇష్టపడేలా చేయాలి. వారి ఆలోచనల్ని స్వాగతిస్తూ, వాటిలోని తప్పులను సరిదిద్దుతూ ఉపాధ్యాయుడు మార్గదర్శిగా నిలవాలి.

– విద్యార్థులు పజిల్స్, సుడోకు వంటి వాటిని పూర్తి చేసేలా ప్రోత్సహించాలి. తద్వారా వారిలో గణిత అభ్యాసం పట్ల ఇష్టత పెంచాలి.

– అబాకస్, వేదిక్ మ్యాథ్స్, సహపాఠ్యకార్యక్రమాల ద్వారా బోధన, అభ్యసన జరిగేలా చూడాలి.

– మంచి గణిత తరగతిని ఏర్పాటు చేయటంతో పాటు, గణిత ప్రయోగశాలను ఏర్పాటుచేసి, సమర్థంగా నిర్వహించాలి.

– విద్యార్థుల స్థాయికి మించిన లక్ష్యాలను వారి మీద బలవంతంగా రుద్దకూడదు.

ఈవిధంగా విద్యార్థుల ఆసక్తి, అభిరుచులకు ప్రాధాన్యతనిస్తూ, వారిలో గణితం పట్ల ఇష్టత పెరిగేలా బోధన విధానాలను మలచుకుంటే విద్యార్థుల్లో గణితభయాన్ని తేలికగా పోగొట్టవచ్చు. ఇందుకు కావలసిందల్లా ఉపాధ్యాయుల నేర్పు, తల్లిదండ్రుల సహకారంతో పాటు ఇద్దరిమధ్యా సమన్వయం మాత్రమే.

ఇవి చేయండి : బ్లాక్ టీచింగ్‌లో మీరు బోధించిన తరగతి విద్యార్థుల్లో గణితభయం ఉన్న వారిని గుర్తించి, వారికి గణితభయం ఎందుకు ఏర్పడిందో పరిశీలన, పరిపృచ్ఛ (ఇంటర్వ్యూ) ద్వారా తెలుసుకుని, వివరాలు నమోదు చేయండి.

3.6.2 గణిత భయాన్ని అధిగమించుట – చర్యాత్మక పరిశోధన

విద్యార్థుల్లోని గణిత భయాన్ని తొలగించటానికి చర్యాత్మక పరిశోధన ఉత్తమమైన మార్గం. తన తరగతిలోని విద్యార్థుల్లో ఎవరెవరు గణితభయం కలిగి ఉన్నారో గుర్తించి, వారిలో ఆ భయాన్ని తొలగించటానికి ఉపాధ్యాయుడు చర్యాత్మక పరిశోధన మార్గాన్ని ఎంచుకుంటే, తక్కువ వ్యవధిలో పరిష్కారాన్ని కనుగొనటం సాధ్యంకావటంతో పాటు, విద్యార్థుల సమస్యను తక్షణమే పరిష్కరించేందుకు వీలుకలుగుతుంది. చర్యాత్మక పరిశోధన ద్వారా లభించిన పరిష్కారాన్ని ఉపాధ్యాయుడే స్వయంగా తన తరగతిలో అమలు చేయాలి. ఇందువల్ల ఉపాధ్యాయుడు తన విద్యార్థుల్లోని గణిత భయాన్ని స్వల్ప కాలవ్యవధిలోనే తొలగించి, వారిలో గణిత అభ్యాసం పట్ల ఇష్టాన్ని పెంచవచ్చు. తద్వారా, విద్యార్థులు పూర్తిగా గణిత అభ్యసనలో నిమగ్నమయ్యేందుకు వీలు కలుగుతుంది.

చర్యాత్మక పరిశోధన నిర్వహించటానికి ఉపాధ్యాయుడు పాటించవలసిన సోపానక్రమం

1. సమస్యను గుర్తించటం : ఉపాధ్యాయుడు తన తరగతిలోని మొత్తం విద్యార్థుల్లో ఎవరెవరు గణిత భయం కలిగి ఉంటున్నారో గుర్తించాలి. ఇంతకుముందు చర్చించిన 'గణిత భయం కలిగిన విద్యార్థుల లక్షణాల' ఆధారంగా ఆయా విద్యార్థులకు గుర్తించి, వారిని చర్యాత్మక పరిశోధన నిర్వహించటానికి ఎంపిక చేసుకోవాలి.

2. సమస్య గురించి చర్చించటం : విద్యార్థుల్లో గణిత భయం ఏర్పడటానికి గల కారణాలను ఉపాధ్యాయుడు ముందుగా అంచనా వేయాలి. విద్యార్థి కుటుంబ పరిస్థితులు, తరగతి వాతావరణం, కిందటి తరగతుల్లో విద్యార్థి సాధన, విద్యార్థి మానసిక పరిస్థితి మొదలైన అన్ని కారణాలను ఉపాధ్యాయుడు గుర్తించాలి. అవసరాన్ని బట్టి తోటి ఉపాధ్యాయులతో, ప్రధానోపాధ్యాయులతో సమస్య గురించి చర్చించాలి. సమస్యకు కారణమైన అంశాలను వరుసక్రమంలో రాసుకోవాలి.

3. కార్యాచరణ, ఊహాత్మక ప్రతిపాదనలు సిద్ధం చేయటం : సమస్య (గణిత భయం)కు కారణమైన అంశాలను విశ్లేషించి, వాటి నుంచి విద్యార్థిలో గణితభయం ఏర్పడటానికి ప్రధానకారణాలను ఊహించి, ప్రతిపాదనలు సిద్ధం చేయాలి. మొత్తం సాధ్యమయ్యే కారణాల్లో ఎంపిక చేసుకున్న విద్యార్థికి తగిన కారణాన్ని గుర్తించాలి. ఇది ఉపాధ్యాయుడు తన పరిశీలన ద్వారా చేసుకునే ఊహాత్మక ప్రతిపాదన మాత్రమే అవుతుంది. ఈ ప్రతిపాదనను పరీక్షించటానికి తగిన ప్రణాళికా రచన చేయాలి.

4. సమాచార సేకరణ : ప్రణాళిక మూలరూపం తయారు చేసుకున్న తర్వాత, అందుకు అవసరమైన సమాచారాన్ని సేకరించాలి. విద్యార్థుల్లో గణితభయం ఎందుకు ఏర్పడిందో తెలుసుకునేందుకు వీలుగా ఈ దశలో పరిపృచ్ఛ (ఇంటర్వ్యూ), ప్రశ్నావళి, పరిశీలన వంటి సాధనాలలో సందర్భానికి తగిన వానిని ఉపయోగించి, సమాచారాన్ని సేకరించాలి.

5. సమాచార విశ్లేషణ : ఈ విధంగా సేకరించిన సమాచారాన్ని, తర్వాతి సోపానంలో విశ్లేషించాలి. సేకరించిన సమాచారాన్ని అవసరాన్ని బట్టి వివిధ విభాగాలుగా వర్గీకరించాలి. ఎంపిక చేసుకున్న సాంఖ్యక గణనలు చేయటం ద్వారా ఫలితాలను రాబట్టాలి.

6. ముగింపు : సాంఖ్యక గణనల ఆధారంగా వచ్చిన ఫలితాలను, విశ్లేషించి, అంతిమంగా ఒక ముగింపునకు రావాలి. విద్యార్థిలో గణితభయం ఏర్పడటానికి కచ్చితమైన కారణం ఏదో నిర్ధారించాలి. గుర్తించిన కారణాన్ని (గణిత భయం ఏర్పడటానికి) ఎలా తొలగించాలో నిర్ణయించుకోవాలి. తగిన పరిష్కారాన్ని సిద్ధం చేయాలి.

7. పరిష్కారాన్ని అమలు చేయటం : విద్యార్థిలో గణిత భయం తొలగించటానికి ఎంపిక చేసుకున్న పరిష్కారాన్ని అమలు చేయాలి. ఈ దశలో విద్యార్థి యొక్క భౌతిక, మానసిక పరిస్థితులను దృష్టిలో ఉంచుకోవాలి. ఎంపిక చేసుకున్న పరిష్కారాన్ని అమలు చేసి, విద్యార్థిలో వచ్చిన మార్పులను గుర్తించి, నమోదు చేయాలి.

పైన చర్చించినవిధంగా చర్యాత్మక పరిశోధన నిర్వహించటం ద్వారా విద్యార్థుల్లో గణితభయానికి కారణమైన అంశాల పట్ల ఉపాధ్యాయుడికి స్పష్టమైన అవగాహన ఏర్పడుతుంది. విద్యార్థి కుటుంబనేపథ్యం, తల్లిదండ్రుల మితిమీరిన

ఒత్తిడి, ఆకాంక్షలు, నిరాసక్తిగా సాగే ఉపాధ్యాయుడి బోధన, ఆసక్తి కలిగించని పాఠశాల / తరగతి వాతావరణం మొదలైన అంశాల్లో విద్యార్థులకు గణితభయాన్ని కలిగిస్తున్న అంశాలేవో? వాటిని ఎలా తొలగించాలో, అందుకు అనుసరించాల్సిన విధానం ఏమిటో స్పష్టమవుతుంది. చర్యాత్మక పరిశోధన ఫలితాల ఆధారంగా ఉపాధ్యాయుడు తల్లిదండ్రులకు, విద్యార్థులకు గణితభయం పోగొట్టే విషయంలో తగిన సూచనలు చేసే అవకాశం ఏర్పడుతుంది. ఈ అంశాలతో పాటు గణితశాస్త్రంలో సహజంగా ఉండే సంక్లిష్టతల వల్ల విద్యార్థుల్లో ఏర్పడే గణితభయాన్ని కూడా చర్యాత్మక పరిశోధన ద్వారా తొలగించవచ్చు.

కృత్యం : బ్లాక్‌టీచింగ్‌లో భాగంగా మీరు బోధిస్తున్న తరగతిలో గణితభయం కలిగిన విద్యార్థిని గుర్తించి, చర్యాత్మక పరిశోధన ద్వారా అతడి గణితభయాన్ని తొలగించండి. పరిశోధన ప్రక్రియ, ఫలితాలను నమోదు చేయండి.

ముఖ్యాంశాలు

1. విద్యార్థుల్లో గణితం పట్ల భయాన్ని పోగొట్టి, వారిలో గణితం పట్ల ఆసక్తి రేకెత్తించటానికి 'మంచి గణిత తరగతి' ప్రధానపాత్ర పోషిస్తుంది.

2. గణితం పట్ల విద్యార్థుల్లో సహజంగా ఏర్పడే భయాన్ని పారద్రోలటానికి ఉపాధ్యాయుడు గణిత తరగతిని ఆకర్షణీయంగా తీర్చిదిద్దటంతో పాటు, గణిత అభ్యాసం పట్ల విద్యార్థికి ప్రేరణ కలిగించి, అతడిలో ఉత్సాహాన్ని పెంపొందింపజేయాలి.

3. గణిత అధ్యయనం కేవలం నాలుగు గోడల మధ్య జరిగే విషయంగా ఉండకూడదు. తరగతి బయట కూడా విద్యార్థి గణితం పట్ల ఉత్సాహాన్ని కనబరచేలా అతడిని ప్రేరేపించాలి.

4. గణితాన్ని విద్యార్థుల జీవితానుభవంలో ఒక భాగంగా తీర్చిదిద్దాలి. ఇందుకోసం ఉపాధ్యాయుడు నిరంతరం సన్నద్ధుడిగా ఉండాలి.

5. మంచి గణిత తరగతిని నిర్వహించటంతో పాటు ఉపాధ్యాయుడు వనరుల కేంద్రంగా ఉండాలి. అప్పుడే ఆశించిన గణిత సామర్థ్యాలు, విద్యాలక్ష్యాలను చేరుకోగలుగుతాము.

6. గణిత భావనల పట్ల విద్యార్థులకు సమగ్ర సమాచారం ఇస్తూ, వాటిని దైనందిన జీవితంలో ఎలా అన్వయించుకోవాలో ఉపాధ్యాయుడు తన బోధనలో భాగంగా వివరించాలి.

7. అన్ని బోధన సందర్భాల్లో ఏ ఒక్క ఉపగమం / వ్యూహం / విధానం పూర్తిగా సరిపోతుందని నిర్ణయించలేము. విద్యార్థుల అభిరుచి, స్థాయి, తరగతి వాతావరణం ఆధారంగా ఉపాధ్యాయుడు ఎప్పటికప్పుడు బోధన విధానాలను మార్చుకోవాలి.

8. ఉపగమం అంటే నిర్ణయించుకున్న గమ్యాలను సాధించటానికి లేదా పూర్తిచేయటానికి మార్గనిర్దేశనం చేసే ఆలోచనా రీతి.

9. లక్ష్యం సాధించే క్రమంలో ఉద్దేశింపబడి, ఆ క్రమంలో అనుసరించే ప్రణాళికను వ్యూహం అంటారు.

10. విద్యార్థుల్లో గణితం పట్ల భయాన్ని పోగొట్టటానికి తల్లిదండ్రులు కూడా బాధ్యత తీసుకోవాలి. ఇంట్లో కూడా గణిత వాతావరణాన్ని ఏర్పాటు చేయాలి. విద్యార్థిని గణిత అభ్యాసం పట్ల బలవంతం చేయకుండా, అతడు గణితాన్ని ఇష్టపడేలా ప్రేరేపించాలి.

11. గణిత విద్య యొక్క ముఖ్య ఉద్దేశ్యం 'పిల్లల్లో గణితీకరణ సామర్థ్యాలను పెంపొందింపజేయటం'.

12. పిల్లలు గణితం గురించి తమలో తాము మాట్లాడుకునేలా, వ్యక్త పరచుకొనేలా, చర్చించుకునేలా, కలిసి పనిచేసేలా ప్రోత్సహించాలి. ఇందులో ఉపాధ్యాయుడితో పాటు తల్లిదండ్రులు కూడా బాధ్యత తీసుకోవాలి.

13. గణిత విషయం కన్నా, గణిత అభ్యసన ప్రక్రియకు ప్రాధాన్యత ఇవ్వాలి. ఇందులో భాగంగా సమస్యా సాధన,

అన్వేషణ, అంచనా వేయటం, క్రమాలను ఉపయోగించటం వంటి అంశాలకు ప్రాధాన్యత ఇవ్వాలి. ఇవన్నీ గణితీకరణ ప్రక్రియకు తోడ్పడతాయి.

మూల్యాంకనం

1. చక్రవడ్డీకి సంబంధించిన లెక్కను తీసుకుని ఎనిమిదో తరగతి విద్యార్థులకు నిగమన పద్ధతిలో ఏవిధంగా బోధిస్తారో వివరించండి.
2. 7 యూనిట్లు అనే కొలతను ఇస్తే, రేఖాగణితంలో నీవు ఏమి చేస్తావు? దీని ద్వారా మీ విద్యార్థులు నుంచి మీరు ఆశించే సమాధానాలు, అవసరమైన చోట్ల మీరు ఇచ్చే సూచనలు రాయండి.
3. 6 నుంచి 8వ తరగతి వరకు గల గణిత పాఠాలలో ఏదో ఒక పాఠ్యాంశాన్ని అన్వేషణ పద్ధతిలో ఎలా బోధిస్తారో తెలపండి.
4. ఎనిమిదో తరగతిలోని 'ద్విమితీయ చిత్రాలను త్రిమితీయ చిత్రాలుగా చూపుట' అనే పాఠ్యాంశం నుంచి ఆయిలర్ సూత్రాన్ని రాబట్టే విధానాన్ని ఆగమన పద్ధతి ద్వారా ఎలా బోధిస్తావు?
5. రూ.1000 ల పై 5% వడ్డీ రేటు చొప్పున 5 సంవత్సరాల్లో అయ్యే వడ్డీ ఎంత? అనే సమస్యను నిగమన పద్ధతి ద్వారా ఎలా బోధిస్తావో సోపానక్రమాలతో సహా వివరింపుము.
6. విశ్లేషణ, సంశ్లేషణ పద్ధతులను మిళితం చేస్తూ ఏదైనా ఒక సమస్యను బోధించి, మీ బోధన విధానాన్ని, విద్యార్థుల ప్రతిస్పందనను నమోదు చేయండి.
7. మంచి గణిత తరగతి లక్షణాలేవి?
8. గణిత ఉపాధ్యాయుడిగా నీవు పనిచేస్తున్న పాఠశాలలో మంచి గణిత తరగతిని ఎలా ఏర్పాటు చేస్తావో వివరింపుము.
9. ప్రాథమికోన్నత పాఠశాలలో గణిత ఉపాధ్యాయుడు నిర్వహించవలసిన పాత్ర ఏమిటి?
10. ఉపగమం, వ్యూహం - పదాల గురించి సంక్షిప్తంగా వివరించండి.
11. ఉపగమానికి, వ్యూహానికి మధ్య భేదం ఏమిటి?
12. ఆగమన పద్ధతి అంటే ఏమిటి? సూత్రాలు, గుణాలు, పరిమితులు రాయండి.
13. ఆగమన, నిగమన పద్ధతులను పోల్చండి.
14. నిగమన ఉపగమం గుణాలు, పరిమితులు రాయండి.
15. విశ్లేషణ, సంశ్లేషణ పద్ధతులను పోల్చండి.
16. అన్వేషణ పద్ధతిలో నీవు పాఠ్యాంశాన్ని బోధించే సందర్భంలో ఎటువంటి పాత్ర నిర్వహించావో వివరింపుము.
17. ప్రకల్పన పద్ధతిలోని సోపానాలేవి?
18. సమస్యాపరిష్కార పద్ధతిని అనుసరించే సందర్భంలో విద్యార్థులు ఎదుర్కొనే సమస్యలేవి? వాటిని పరిష్కరించటంలో నీవు ఏవిధంగా సహాయపడతావు?
19. ప్రాథమిక పాఠశాల ఉపాధ్యాయుడిగా గణిత ప్రయోగశాలను నీవు ఏవిధంగా నిర్వహిస్తావో వివరింపుము.
20. విద్యార్థుల్లో గణితభయం ఎందుకు ఏర్పడుతుంది?
21. నీ తరగతిలోని విద్యార్థుల్లో గణితభయాన్ని పోగొట్టటానికి ఎటువంటి చర్యలు తీసుకుంటావో వివరింపుము.

సంప్రదించిన గ్రంథాలు

1. బి.ఎడ్ గణిత బోధన అభ్యసన శాస్త్రం, తెలుగు అకాడెమి, హైదరాబాదు, 2016
2. డి.ఎడ్. గణితశాస్త్ర బోధన పద్ధతులు, తెలుగు అకాడమి, హైదరాబాదు, 2010
3. ప్రాథమిక స్థాయిలో గణిత అవగాహన మరియు గణిత విద్య, పాఠశాల విద్య, ఆంధ్రప్రదేశ్ ప్రభుత్వం, 2016
3. Co Curricular Activities in Mathematics, Dr. K. Rama Krishna, Sri Raghavendra Publications, Vijayawada, 2016, ISBN : 978 -81-929554-1-4

GRK

4. పాఠశాల గణితం : కృత్యాలు, వనరులు, ప్రణాళిక

(SCHOOL MATHEMATICS : ACTIVITIES, RESOURCES AND PLANNING)

బడి లోపల గణితం, బడి బయట గణితాల మధ్య ఉండే అనేక రకాలైన అనుసంధానాలు (Links) **పిల్లలు అన్వేషించి తెలుసుకునేలా చేస్తే, వారిలో సహజసిద్ధ గణితీకరణ పద్ధతి** (Natural Mathematization Process) **వేళ్ళూనుతుంది.** **- APSCF 2011**

యూనిట్ / అధ్యాయంలోని అంశాలు :

4.1 గణిత బోధన ఆశయాలు, లక్ష్యాలు

4.2 ప్రాథమికోన్నత స్థాయిలో గణిత విద్యా ప్రమాణాలు – అభ్యసన సూచికలు

4.3 కృత్యాలు – రూపకల్పన, ప్రసరణ

4.4 గణిత నమూనా విధానాలు (Mathematical Modelling)

4.5 గణిత పాఠ్యపుస్తకాలు – గణిత పాఠ్యపుస్తకాలు రూపొందించడంలో తాత్వికత, మార్గదర్శక సూత్రాలు (యూనిట్ నిర్మాణం, అభ్యాసాల స్వభావం, పాఠ్యపుస్తకాన్ని సమర్థవంతంగా ఉపయోగించడంలో ఉపాధ్యాయుని పాత్ర), పాఠ్యపుస్తక అధ్యాపన ఉద్దేశం.

4.6 గణిత ప్రయోగశాల / వనరుల గది, గణిత సంఘం, గణిత పేటిక

4.7 గణిత విద్యాప్రణాళికకు సమర్థవంతంగా బోధించడానికి కావలసిన అభ్యాసక వనరులు

4.8 బోధనా ప్రణాళిక – వార్షిక పథకం, పాఠ్య పథకం, పీరియడ్ పథకం

లక్ష్యాలు :

ఈ అధ్యాయం / యూనిట్ చదివిన తరువాత ఉపాధ్యాయ విద్యార్థులు :

✳ ప్రాథమికోన్నత స్థాయిలో గణిత బోధన, అభ్యసన ఉద్దేశాలు, లక్ష్యాలను అవగాహన చేసుకొంటారు.

✳ బ్లూమ్స్ విద్యా లక్ష్యాల వర్గీకరణను విపులీకరించగలుగుతారు.

✳ గణితశాస్త్ర బోధనా లక్ష్యాలు, స్పష్టీకరణలు వివరించగల్గుతారు.

✳ గణిత విద్యా ప్రమాణాలు, అభ్యసన సూచికలను అవగాహన చేసుకొంటారు.

✳ ప్రాథమికోన్నత స్థాయి గణిత పాఠ్యాంశాలకు విద్యాప్రమాణాలు రాయగలుగుతారు.

✳ కృత్యం అర్థం, రకాలు, రూపకల్పన, ప్రసరణలను తెలుసుకొంటారు.

✳ వివిధ గణిత భావనలను అవగాహన పరచుటకు కృత్యాలను రూపొందించి, వాటిని తరగతి గదిలో / బోధనాభ్యసన ప్రక్రియలో ఉపయోగించగల్గుతారు.

✳ గణిత నమూనా విధానాలను అవగాహన చేసుకొంటారు.

✳ గణిత పాఠ్యపుస్తకాలు రూపొందించటంలో తాత్వికత, మార్గదర్శక సూత్రాలను తెలుసుకుంటారు.

✳ గణిత పాఠ్యపుస్తక ఆవశ్యకతను, ఉత్తమ గణిత పాఠ్యపుస్తక లక్షణాలను అవగాహన చేసుకొంటారు.

* అర్థవంతమైన పాఠ్యపుస్తకాలను రూపొందించడానికి APSCF - 2011 చేసిన ప్రతిపాదనలను తెలుసుకుంటారు.
* ప్రస్తుత ప్రాథమికోన్నత స్థాయి గణిత పాఠ్యపుస్తకాల యూనిట్ నిర్మాణం, అభ్యాసాల స్వభావాన్ని అవగాహన చేసుకొంటారు.
* ప్రాథమికోన్నత గణిత పాఠ్యపుస్తకాలను సమర్థవంతంగా ఉపయోగించడంలో ఉపాధ్యాయుని పాత్రని తెలుసుకుంటారు.
* గణిత అభ్యసన వనరులైన గణిత ప్రయోగశాల / వనరుల గది, గణిత క్లబ్, గణిత పేటికలను గురించి అవగాహన చేసుకుంటారు. వాటిని సమర్థవంతంగా తరగతి గది బోధనలో ఉపయోగించగల్గుతారు.
* గణిత విద్యాప్రణాళికను సమర్థవంతంగా ప్రసరణ చేయడానికి కావలసిన అభ్యసన వనరులను గురించి తెలుసుకుంటారు.
* గణిత బోధనాభ్యసన ప్రక్రియలో వార్షిక, యూనిట్ / పాఠ్యపీరియడ్ పథకాలను తయారుచేసి, ఉపయోగించ గల్గుతారు.

పరిచయం :

పిల్లలు ప్రాథమిక విద్యను పూర్తిచేసుకుని, ప్రాథమికోన్నత స్థాయిలోకి అడుగిడుతారు. ఈ స్థాయి సెకండరీ విద్యను కొనసాగించటానికి ప్రముఖమైన వారధిగా ఉంటుంది. పిల్లలు స్వేచ్ఛగా పెద్దలతో, సామగ్రితో, తోటివారితో ప్రతిచర్యలు జరపడం, వివిధ సన్నివేశాల్లో, ప్రక్రియల్లో పరస్పరం సహకరించుకుంటూ పాల్గొనే అవకాశం లభించడం మూలంగా, అన్వేషణతో నూతన జ్ఞానాన్ని నిర్మించుకోగలమని మనం గుర్తిస్తాం. పిల్లలు కేవలం నిష్క్రియాత్మక గ్రహీతలు కాకుండా, అభ్యసనంలో భాగస్వాములు అని భావించినపుడు వారిలో సృజనాత్మక చొరవలను పెంపొందించడం సాధ్యమవుతుంది. పిల్లలు ఈ దిశలో ఉత్సుకత, ఆసక్తి, ప్రశ్నించేతత్వం, హేతుబద్ధత, ఋజువులను కోరడం, సవాళ్ళను అంగీకరించడం వంటి లక్షణాలను కలిగి ఉంటారు. అందుచేత ఆనందదాయకంగా పిల్లలు వివిధ భావనలను అన్వేషించడానికి, తమ సొంత శైలిలో సమస్యా సాధన చేయడానికి వీలుగా గణితశాస్త్ర బోధనను అభివృద్ధిపరచాల్సిన ఆవశ్యకత ఉంది. అమూర్త స్వభావంతో ఉండే గణితంలోని భావనలను పిల్లలు అర్థం చేసుకుని, సొంతంగా గణిత జ్ఞానాన్ని నిర్మించుకొనే సామర్థ్యానికి తోడ్పడే విధానాలను అభివృద్ధిపరచాలి. ఈ నేపథ్యంలో కాబోయే ఉపాధ్యాయులుగా ప్రాథమికోన్నత స్థాయి గణిత బోధన ఉద్దేశాలు, లక్ష్యాలు, విద్యా ప్రమాణాలు, అభ్యసన సూచికలు, గణిత బోధన – అభ్యసన కృత్యాలు, వాటి రూపకల్పన, ప్రసరణ, గణిత పాఠ్యపుస్తకాల రూపకల్పనలో తాత్వికత, మార్గదర్శక సూత్రాలు, గణిత పాఠ్యపుస్తకాల ఆవశ్యకత, ఉత్తమ గణిత పాఠ్యపుస్తక లక్షణాలు, ప్రాథమికోన్నత స్థాయి గణిత పాఠ్యపుస్తకాల్లోని యూనిట్ నిర్మాణం, అభ్యాసాల స్వభావం, పాఠ్యపుస్తకాన్ని సమర్థవంతంగా ఉపయోగించడంలో ఉపాధ్యాయుని పాత్ర, గణిత అభ్యసన వనరులైన గణిత ప్రయోగశాల / గణిత వనరుల గది, గణిత క్లబ్, గణిత పేటికలను సమర్థవంతమైన తరగతి గది బోధనలో ఉపయోగించగల్గుట, గణిత బోధనాభ్యసన ప్రక్రియలో వార్షిక, యూనిట్ / పాఠ్య, పీరియడ్ ప్రణాళికలను తయారుచేసి ఉపయోగించగలగడాన్ని తెలుసుకోవాల్సిన అవసరం ఎంతైనా ఉంది. కాబట్టి ఈ అధ్యాయంలో పై అంశాల గురించి తెలుసుకుందాం.

4.1 గణిత బోధనా ఉద్దేశాలు, లక్ష్యాలు :

"గణితం ఒక సహజసిద్ధమైన ఆలోచనా విధానం". తరచు పిల్లల నుంచి "నేను గణితాన్ని ఎందుకు నేర్చుకోవాలి?" అనే ప్రశ్నను ఉపాధ్యాయులుగా, తల్లిదండ్రులుగా వింటూ ఉంటాం. అదేవిధంగా "గణితాన్ని ఎందుకు బోధించాలి?" అనే ప్రశ్న కూడా ఎదురవుతుంది. మనచుట్టూ ఉండే సమస్యలను అర్థం చేసుకోవడానికి, నిత్యజీవితంలో ఎదురయ్యే సమస్యాసాధనకు గణితం పరిష్కారం చూపుతుందనేది మనందరకూ తెలిసిన విషయమే. కాబట్టి పాఠశాలలో గణితాన్ని బోధించడం, విద్యార్థులు గణితాన్ని నేర్చుకోవడం అవసరం. దీనికి సంబంధించి ప్రతీ గణిత ఉపాధ్యాయుడు / కాబోయే ఉపాధ్యాయుడు మొదటగా గణిత ఉద్దేశాలు, లక్ష్యాలు గురించిన అవగాహన పొందాలి. ఇవి విద్యా ప్రణాళికలు రూపొందించడంలో, అమలు చేయడంలో, నిర్దేశించిన ఉద్దేశాలు సాధించడంలో మార్గదర్శనం చేస్తాయి. పాఠ్యప్రణాళిక అమలులో ఉపాధ్యాయుని పాత్ర కీలకం. ఇందుకోసం వారికి గణిత అభ్యసనానికి సంబంధించిన వివేచన, అవసరాలు, ఉద్దేశాలు, లక్ష్యాలు పట్ల స్పష్టమైన అవగాహన ఉండాలి. గణిత బోధనాభ్యసన వ్యూహాలు తయారు చేసుకోవడంలో అధ్యయన సహకారానికి సమర్థవంతంగా ఇవి సహాయపడతాయి.

4.1.1 గణిత బోధనా ఉద్దేశాలు, లక్ష్యాలు :

ఉద్దేశం, లక్ష్యం అనే రెండూ సాధారణ సందర్భాలలో సమానార్థకంగా వాడే పదాలు. కానీ విద్యా క్షేత్రంలో ఈ రెండు పదాలు వాటి అర్థాలు, భావనలలోను తేడాలను కలిగి ఉన్నాయి. దీర్ఘకాలంలో పొందే అవకాశం ఉన్నటువంటి ఆశించిన ఫలితాలను ఉద్దేశాలు అంటాం. ప్రధానంగా ఉద్దేశాలనేవి వాటి స్వభావం దృష్ట్యా విశాల దృక్పథంతోను, సాధారణంగాను ఉండటం వల్ల సులభంగా సాధించబడేవిగాను, కొలవదగినవిగాను ఉండవు. అలాగని నిర్ణయించబడిన కాలపరిమితిలో వాటిని విద్యార్థులు సాధించేటట్లు చేయడం కూడా ఉపాధ్యాయునికి అంత సులువుగా సాధ్యమయ్యేది కాదు. ఆశించిన ఉద్దేశాలను విద్యార్థి పూర్తిగా సాధించాడో లేదో అని మూల్యాంకనం చేయడం కూడా ఉపాధ్యాయునికి సాధ్యం కాదు. కాబట్టి ఉపాధ్యాయునికి తన బోధనలో కొలవదగినవి, స్వల్పకాలంలో సాధింపబడేవి అయిన నిర్దిష్టమైన, స్పష్టమైన గమ్యాలు / ఫలితాలు ఉండాలి. అలా స్వల్పకాలంలో అంటే రోజులు, నెలలు, సంవత్సర కాలంలో పొందే ఆశించిన ఫలితాలకు కృత్యాలు లేదా కార్యక్రమాలు ఉంటాయి. వీటిద్వారా స్వల్పకాలంలో సాధించతగ్గ ఆశించిన ఫలితాలనే "లక్ష్యాలు" అంటాం. ఇవి అర్థవంతమైన అభ్యసనను సాధించేందుకు దోహదపడతాయి. ఉదాహరణకు – "విద్యార్థులకు గణితంలో గణన నైపుణ్యాన్ని పెంపొందింపజేయడం" అనేది గణిత బోధనలో ఒక ఉద్దేశం. ఇది విశాల దృక్పథంతో ఉండే ఒక సాధారణ వాక్యం. పాఠశాల విద్య పూర్తయ్యేటప్పటికి విద్యార్థి దీనిలో కొంత భాగం మాత్రమే సాధించి ఉండవచ్చు లేదా పూర్తిగా సాధించడానికి సంవత్సరాల తరబడి కాలం పట్టవచ్చు. అదేవిధంగా ఈ నైపుణ్యాన్ని ఎట్లా పెంపొందింపచేయాలి, ఎట్లా పరీక్షింపచేయాలి అనేది తెలియదు. కాబట్టి గొప్పగొప్ప పదజాలాలతో కూడిన ఇటువంటి ఉద్దేశాలను సాధించాలంటే, వాటిని ఉపాధ్యాయుడు బోధించడానికి, పరీక్షించడానికి అనువుగా, విద్యార్థుల అభ్యసనకు సాక్ష్యాధారాలుగా, వారి ప్రవర్తనా, పరివర్తనను సూచించే పదాలలో చెప్పాలి. అయితే "విద్యార్థులలో రెండంకెల సంఖ్యల కూడిక నైపుణ్యాన్ని పెంపొందించడం" అనేది చాలా స్పష్టంగా రాయబడ్డ ఉద్దేశం. ఇది సులువుగా సాధింపదగినది లేదా కొలవదగినది. ఇలా స్పష్టతను సూచించేటట్లు రాసిన లేదా చెప్పిన ఉద్దేశాలే లక్ష్యాలు అవుతాయి.

అధ్యయనం లేదా అభ్యసనం అవసరాన్ని గమ్యాలు, ఉద్దేశాల పదాలలో తెలుపుతాం. ఇది నిర్ణయించబడిన ఉద్దేశాల దృష్ట్యా సఫలమైన అభ్యసనం కోసం ఏమి బోధించాలో, ఎలాంటి అర్థవంతమైన అభ్యసన అనుభవాలు

నిర్వహించాలో, విద్యా ప్రణాళిక తయారు చేసేవారికి, ఉపాధ్యాయునికి మార్గదర్శకత్వాన్ని ఇస్తుంది. అదేవిధంగా అభ్యాసకులకు కూడా ఒక మార్గాన్ని చూపిస్తుంది. విద్యపరంగా సాధారణ ఉద్దేశాలు దృష్ట్యా గణిత బోధన ఉద్దేశాలు రూపొందిస్తారు. అదేవిధంగా గణిత బోధన ఉద్దేశాలకు, గణిత బోధన లక్ష్యాలు సహాయకారిగా ఉంటాయి. ఉపాధ్యాయుడిగా నీవు – ఆశించిన అభ్యసన కృత్యాల పట్ల పిల్లల అవధానం పొందడానికి ఏవిధంగా సహాయపడతావు?, అభ్యసనను ప్రోత్సహించడానికి ఎటువంటి బోధనా వ్యూహాలు, అనుభవాలు రూపొందిస్తావు? జ్ఞాన నిర్మాణం, పునః జ్ఞాన నిర్మాణం విద్యార్థులు చేసుకోవడానికి ఏవిధంగా సహాయపడతావు? అభ్యసన సాక్ష్యాలుగా పాఠం చివర ఎటువంటి రుజువులు పరిశీలించి, సేకరించి పొందుపరుస్తావు? స్వీయ మదింపులో నీకు నీవుగా విద్యార్థులకు ఏవిధంగా సహాయపడతావు? నీ పని సక్రమంగా జరగడానికి, ఈ ప్రశ్నలన్నింటికి జవాబు పొందడానికి బోధనా లక్ష్యాలు సహాయకారిగా ఉంటాయి.

గణిత విద్య విశాల ఉద్దేశం గణితీకరించే దిశగా విద్యార్థులలో సామర్థ్యాలను అభివృద్ధిపరచడం. గణిత విద్య నిర్దిష్ట / సంకుచిత ఉద్దేశం సంజ్ఞలు, పరిక్రియలు, కొలతలు, దశాంశాలు, శాతాలకు సంబంధించిన ఉపయుక్తమైన సామర్థ్యాలను అభివృద్ధి పరచడం (NCF - 2005). విద్య సాధారణ ఉద్దేశాలు, లక్ష్యాలకు, విద్యా ప్రణాళికలోని విషయాల బోధనా ఉద్దేశాలు, లక్ష్యాలకు మధ్యగల భేదాలు కింది పట్టికలో చూపడమైనది.

4.1.2 గణిత బోధన ఉద్దేశాలు, లక్ష్యాల మధ్య భేదాలు :

ఉద్దేశాలు	లక్ష్యాలు
1. దీర్ఘకాలిక గమ్యాలే 'ఉద్దేశాలు'.	1. స్వల్పకాలిక గమ్యాలే "లక్ష్యాలు".
2. ఇవి పూర్తిగా విద్యా విధానానికి మార్గదర్శకాలు.	2. ఇవి ఉద్దేశాలు సాధించడానికి మార్గదర్శకాలు.
3. దీర్ఘకాలంలో ఆశించిన ఫలితాలు పొందే అవకాశం ఉండేవే 'ఉద్దేశాలు' అంటారు.	3. బోధనాభ్యసన ప్రక్రియ ద్వారా స్వల్పకాలంలో అంటే రోజులు, నెలలు, సంవత్సరంలోగా ఆశించిన ఫలితాలను పొందే వాటిని "లక్ష్యాలు" అంటారు.
4. ఇవి విశాలమైనవి, సాధారణమైనవి.	4. ఇవి నిర్దిష్టమైనవి, స్పష్టమైనవి.
5. ఎగ్లెస్టన్ ప్రకారం, ఉద్దేశాలు వ్యూహాన్ని తెలియజేస్తాయి.	5. లక్ష్యాలు కార్యసాధన ఉపాయాలను సూచించే స్వభావం కలవి.

4.1.3 ప్రాథమికోన్నత స్థాయిలో గణిత బోధన ఉద్దేశాలు – లక్ష్యాలు :

ప్రస్తుతం మన దేశంలో పాఠశాల విద్యా విధానాన్ని 3 రకాలుగా విభజించారు.

1) ప్రాథమిక స్థాయి, 2) ప్రాథమికోన్నత స్థాయి, 3) ఉన్నత పాఠశాల స్థాయి.

గణిత బోధన ఉద్దేశాలు, లక్ష్యాలు స్థాయినిబట్టి మారుతూ ఉంటాయి. ఇప్పుడు ప్రాథమికోన్నత స్థాయిలో గణిత బోధన ఉద్దేశాలు, లక్ష్యాలను గురించి తెలుసుకుందాం.

ప్రాథమికోన్నత స్థాయిలో గణిత బోధన ఉద్దేశాలు :

1. గణితం పట్ల విద్యార్థులకు ఆసక్తి కలిగించడం.
2. గణిత భావనలపై అవగాహన కలిగించడం, వాటిని నిజజీవిత సమస్యల పరిష్కారంలో ఉపయోగించుకొనే నైపుణ్యాలు పెంపొందించడం, సమస్యల సాధనలో వేగం, ఖచ్చితత్వం అలవర్చటం.

3. విద్యార్థుల్లో తార్కిక ఆలోచనాశక్తి, అంచనా వేసే సామర్థ్యాలు పెంపొందించడం.
4. తార్కిక ఆలోచన, వివేచన లాంటి ఆలోచనా నైపుణ్యాలు పెంపొందించడం ద్వారా మానసిక క్రమశిక్షణ అభివృద్ధి చెందించడం.
5. క్రమత, శుభ్రత, ఖచ్చితత్వం, స్పష్టతకు సంబంధించిన విలువలు, వైఖరులు అలవరచడం.
6. గణిత భాష, గుర్తులు పరిచయం చేయడం.
7. ఏకాగ్రత, ఆత్మవిశ్వాసం పెంపొందింపచేయడం.
8. శాస్త్రీయ వైఖరి, హేతువాద దృక్పథం పెంపొందింపచేయడం.
9. గణితంలో సన్నిహిత సంబంధంగల ఇతర విషయాలను నేర్చుకోగలగడం.
10. ఆధునిక ప్రపంచంలో గణితశాస్త్ర ప్రాముఖ్యతను గుర్తించడం.
11. గణిత అభ్యసన రీతిని, దాని ప్రాముఖ్యతను అభినందించడం.
12. పిల్లల అభ్యసన అనుభవాలను గణితీకరించడం.

ప్రాథమికోన్నత స్థాయిలో గణిత బోధన, లక్ష్యాలు :

1. విద్యార్థి పదాల, భావనల, సత్యాల, సూత్రాల, ప్రక్రియల జ్ఞానాన్ని సముపార్జించడం, అవగాహన చేసుకోగలగడం.
2. రేఖాచిత్రాలను గీయడం, కొలవడం, అంచనా వేయడం, ప్రదర్శించడం లాంటి నైపుణ్యాలను పెంపొందించడం.
3. తన గణిత జ్ఞానాన్ని, నైపుణ్యాలను నిజజీవితంలో ఎదురయ్యే గణిత సమస్యల సాధనలో ఉపయోగించగలగడం.
4. సిద్ధంగా ఉన్న పట్టికలను సంప్రదించగలిగి, వాటిని ఉపయోగించగలిగే సామర్థ్యాలను పెంపొందించడం.
5. దత్తాంశాల నుంచి సాంఖ్యక చిత్రాలను గీయడం, చదవడం లాంటి సామర్థ్యాలను పెంపొందించడం.
6. గణిత జ్ఞాన పెరుగుదల, నాగరికత అభ్యుదయానికి ప్రాచీన భారతీయుల కృషిని అభినందించడం.
7. విద్యార్థుల్లో పూర్ణసంఖ్యలు, భిన్నాలు, దశాంశ భిన్నాల భావనలను అవగాహన చేసుకోవడం, ఆ భావనలకు సంబంధించిన గణన నైపుణ్యాలను పెంపొందించడం, వాటిని నిజజీవిత సమస్యల సాధనలో వినియోగించే సామర్థ్యం పెంపొందించడం.
8. సంఖ్యల పరిజ్ఞానం, అకరణీయ సంఖ్యల సమితి, వాటి చతుర్విధ పరిక్రియలు, వాస్తవ సంఖ్యల జ్ఞానం తెలియజేయడం.
9. ప్రాథమిక రేఖా భావనలను, వాటి పరస్పర సంబంధాలను విద్యార్థులు నేర్చుకొనేటట్లు చేయడం.
10. సాధారణ సమతల పటాలైన త్రిభుజాలు, చతుర్భుజాలు, వృత్తాలు మొదలైన వాటి ధర్మాలను విద్యార్థులు అన్వేషించేటట్లు చేయడం.
11. సాధారణ సమీకరణాలు సాధించడానికి అవసరమయ్యే బీజగణిత పరిభాషను విద్యార్థులకు పరిచయం చేయడం.
12. సమస్యల సాధనలో అవసరమైన గణన నైపుణ్యాలలో వేగాన్ని, ఖచ్చితత్వాన్ని పెంపొందించడం.

4.1.4. బోధనా లక్ష్యాలు :

ప్రతీ ఉపాధ్యాయుడు తన తరగతి గదిలో విషయాన్ని బోధించడం ద్వారా సాధించాల్సిన లక్ష్యాలను "బోధనా లక్ష్యాలు" (Instructional Objectives) అంటారు. బోధనా లక్ష్యాలు బోధనాభ్యసన ప్రణాళికను రూపొందించడానికి, నిర్వహించడానికి, అభ్యసన మూల్యాంకనం చేయడానికి, విద్యార్థుల ప్రవర్తనల్లో ఆశించిన మార్పులు తేవడానికి తోడ్పడతాయి.

ఈ బోధనా లక్ష్యాలు తరగతి గదిలో బోధన పూర్తయిన తరువాత విద్యార్థుల్లో చూడగలిగిన మార్పులు. ఈ మార్పులను విద్యార్థుల్లో ప్రవర్తనలో పరివర్తనలుగా చూడవచ్చు. వీటినే "స్కిన్నర్" అభ్యసనగా నిర్వచించాడు. అదేవిధంగా విద్యార్థుల్లో అభ్యసనం జరిగింది అనడానికి సాక్ష్యాలు ప్రవర్తనలో పరివర్తనలు. వీటినే "స్పష్టీకరణలు" అంటారు. ఇవి లక్ష్యాల పరిధిని సూచిస్తాయి. ఒక లక్ష్యానికి మరొక లక్ష్యానికి తేడాను తెలుపుతాయి. బోధన – అభ్యసన అనుభవాలను ఏర్పరచడానికి సహకరిస్తాయి. పరీక్షాంశాల ఎన్నికకు, నిర్మాణానికి ఆధారమవుతాయి.

బోధనా లక్ష్యాల లక్షణాలు : బోధనా లక్ష్యాలు

1) ముందుగా నిర్ణయింపబడి ఉండాలి.

2) వీనిలో విషయ భాగం, ప్రవర్తనా మార్పుభాగం అని రెండు భాగాలు ఉండాలి.

3) సంపూర్ణ వాక్యాలుగా రాయబడాలి.

4) సాధింపదగినవై ఉండాలి.

5) కొలవదగినవై ఉండాలి.

6) పరిశీలించదగినవై ఉండాలి.

7) విద్యార్థుల ప్రవర్తనలో కలిగే మార్పులను సూచించాలి.

8) కచ్చితంగాను, స్పష్టంగాను ఉండాలి.

9) ఒక భావనకు మాత్రమే రాయబడాలి.

10) సరళ వాక్యాలలో మాత్రమే రాయబడాలి.

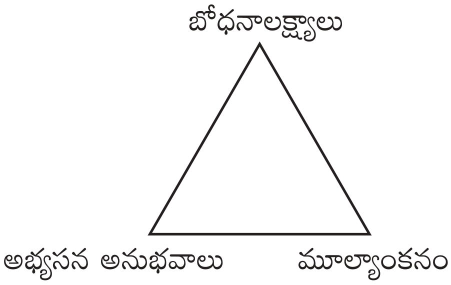
11) అసంబద్ధంగా ఉండకూడదు.

12) సందిగ్ధంగా ఉండకూడదు.

4.1.5 విద్యాలక్ష్యాల వర్గీకరణ :

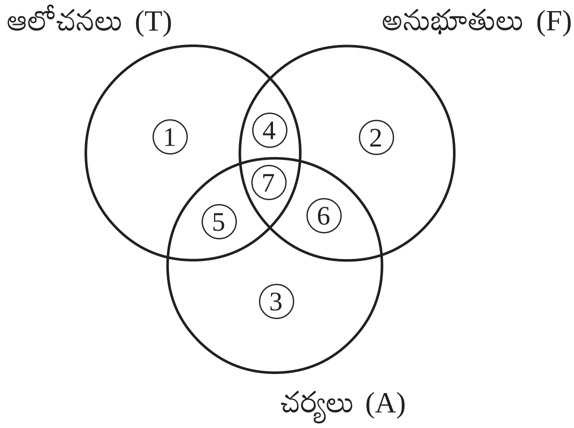
బోధన ద్వారా సాధించవలసిన లక్ష్యాలు అనేకం ఉంటాయి. వాటిని విద్యార్థుల స్థాయికి తగినట్లుగా ఏర్పాటు చేసుకోవటం, సన్నిహిత సంబంధమున్న లక్ష్యాలను ఒకే వర్గం క్రింద వర్గీకరించుకోవలసి ఉంది. వీటిని శాస్త్రీయంగా, ఉపయోగకరంగా వర్గీకరించిన వ్యక్తి బెంజిమన్.ఎస్.బ్లూమ్. ఈ వర్గీకరణను విద్యాలక్ష్యాల వర్గీకరణ అన్నారు.

విద్యా ప్రక్రియలో విద్యాలక్ష్యాలు ప్రధానమైనవి. వీటి ఆధారంగానే అభ్యసన అనుభవాలు, మూల్యాంకనం ఏర్పాటు చేసుకోవడం జరుగుతుందని వివరించారు. లక్ష్యాలను ఆధారంగా చేసుకొని అభ్యసన అనుభవాలు కల్పించడం, లక్ష్యాలు ఎంతమేరకు సిద్ధించాయో మూల్యాంకనం చేయడం ద్వారా తెలుసుకోవచ్చు. అనుకొన్న లక్ష్యాలు నెరవేరకపోతే అభ్యసన అనుభవాలను మార్చి అందించడం, తిరిగి మూల్యాంకనం చేసి లక్ష్యాలు సిద్ధింపబడినవా లేవా నిర్ధారించడం చేయాలి. ఈ విధంగా దీన్ని ఒక చక్రీయ ప్రక్రియగా భావించవచ్చు.



ముందే చెప్పిన విధంగా అభ్యసనకు సాక్ష్యాలు ప్రవర్తనా మార్పులు. ఈ ప్రవర్తనా మార్పులను బ్లూమ్స్ పరస్పర ప్రభావం వున్న మూడు భాగాలుగా విభజించారు. అవి :

1) ఆలోచనలు (Thinking), 2) అనుభూతులు (Feelings), 3) చర్యలు (Actions). అవి ఈ దిగువ వెన్–డయాగ్రమ్ ద్వారా సూచించబడినవి.



1) ఆలోచనలు మాత్రమే.

ఉదా : యాంత్రికంగా ఆలోచించడం

2) అనుభూతులు మాత్రమే

ఉదా : సుందర దృశ్యాన్ని ఊహించుకొని

3) చర్యలు మాత్రమే

ఉదా : యాంత్రికంగా పనిచేయడం

4) ఆలోచనలతో కూడిన అనుభూతులు మాత్రమే

ఉదా : మంచి వంటకాన్ని తయారు చేయడమెలాగో ఆలోచించి, వాటిని ఊహాత్మకంగా అనుభూతి చెందడం.

5) ఆలోచనలతో కూడిన చర్యలు మాత్రమే.

ఉదా : అప్పగించిన పనిని సక్రమంగా పూర్తి చేయటం.

6) అనుభూతులతో కూడిన చర్యలు మాత్రమే.

ఉదా : నచ్చిన వంటకం పెడితే దానిని తిని అనుభూతి చెందడం.

7) ఆలోచనలు, అనుభూతులతో కూడిన చర్యలు.

ఉదా : సైకిల్ నడపాలన్న ఆలోచన కలిగి, తరువాత నడిపిన ఆనందాన్ని అనుభవించటం.

ఈ మూడు భాగాల్లో జరిగే మార్పులను ప్రత్యేక రంగాలుగా పేరు పెట్టటం జరిగింది. అవి :

ఎ) జ్ఞానాత్మక రంగం (Cognitive Domain) – (ఆలోచనలకు సంబంధించినది)

బి) భావావేశ రంగం (Affective Domain) – (అనుభూతులకు సంబంధించినది)

సి) మానసిక చలనాత్మక రంగం (Psycho-Motor Domain) – (చర్యలకు సంబంధించినది)

బ్లూమ్, ఆయన సహచరులు జ్ఞానాత్మక రంగానికి చెందిన లక్ష్యాలను, స్పష్టీకరణలను గుర్తించారు.

ఎ) జ్ఞానాత్మక రంగం :

ఈ రంగంలోని లక్ష్యాలను నిర్దిష్టంగా కొలవచ్చు. కనుక విద్యాబోధన, మూల్యాంకనం దృష్ట్యా ఈ బోధనా లక్ష్యాలు చాలా విలువైనవి. ఈ రంగంలో జ్ఞానం, ప్రజ్ఞాభివృద్ధికి చెందిన నైపుణ్యాలుంటాయి. ఈ రంగంలోని

లక్ష్యాలను ఆరు వర్గాలుగా విభజించారు. ఈ ఆరు లక్ష్యాలు సాధారణ ప్రవర్తన నుంచి సంక్లిష్ట ప్రవర్తన వైపుగా కింది నుంచి పైకి సోపాన క్రమాన్ని అనుసరిస్తాయి. ఈ ఆరు లక్ష్యాలు వరుసగా జ్ఞానం (Knowledge), అవగాహన/అవబోధం (Comprehension), వినియోగం (Application), విశ్లేషణ (Analysis), సంశ్లేషణ (Synthesis), మూల్యాంకనం (Evaluation).

జ్ఞానం (Knowledge) : జ్ఞానాత్మక రంగంలోని అన్నింటికంటే ప్రాథమిక స్థాయి లక్ష్యం జ్ఞానం. ఈ లక్ష్యంలో విద్యార్థికి ఇచ్చిన సమాచారం మెదడులో యథాతథంగా నిక్షిప్తం అవుతుంది. అవసరమైనప్పుడు రూపం మార్పు చెందకుండా బయటకు వస్తుంది. ఆ విధంగా భావనలు, నిర్దిష్ట యదార్థాలు, పారిభాషిక పదాలు, సంప్రదాయాలు, సూత్రాలు, సామాన్యీకరణ, పద్ధతులకు సంబంధించిన సమాచారం యథాతథంగా గుర్తించడం గాని గుర్తుకు తెచ్చుకోవడం గాని జరుగుతుంది (Recall & Recognition).

అవగాహన / అవబోధం (Comprehension) : జ్ఞానానికి పై లక్ష్యం అవగాహన. అవగాహన లక్ష్యంలో విద్యార్థి యథాతథంగా గ్రహించిన సమాచారం మెదడులో రూపాంతరం చెంది అనువాదం, వ్యాఖ్యానం చేసే స్థితికి మారుతుంది.

వినియోగం (Application) : వినియోగ లక్ష్యంలో జ్ఞానం, అవగాహన ఇమిడి ఉంటాయి. పొందిన జ్ఞానం, అవగాహన నూతన పరిస్థితులకు అన్వయింపచేయబడతాయి.

విశ్లేషణ (Analysis) : విశ్లేషణ లక్ష్యం మరింత ఉన్నతమైన లక్ష్యం. దీనిలో మూల విషయాల విశ్లేషణ, సంబంధాల విశ్లేషణ, నియమాల విశ్లేషణ ఉంటాయి.

సంశ్లేషణ (Synthesis) : సంశ్లేషణలో నూతన ప్రాకల్పనలు, న్యాయాలు, అమరికలు అభివృద్ధి చేయడం వంటి అంశాలు ఇమిడి ఉంటాయి.

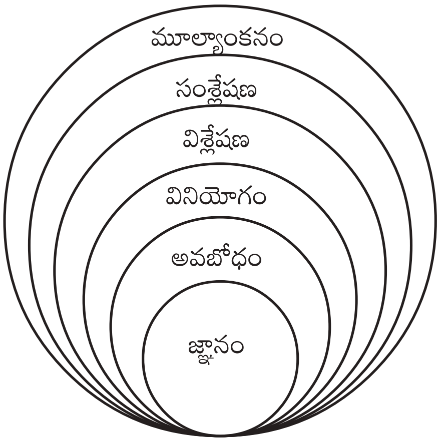
మూల్యాంకనం (Evaluation) : జ్ఞానాత్మక రంగంలో అత్యున్నత స్థాయి లక్ష్యం మూల్యాంకనం. దీనిలో అంతర్గత, బాహ్య సాక్ష్యాధారాలతో తీర్పునిచ్చే సామర్థ్యం ఇమిడి ఉంటుంది.

సవరించిన బ్లూమ్స్ – జ్ఞానాత్మక రంగ వర్గీకరణ :

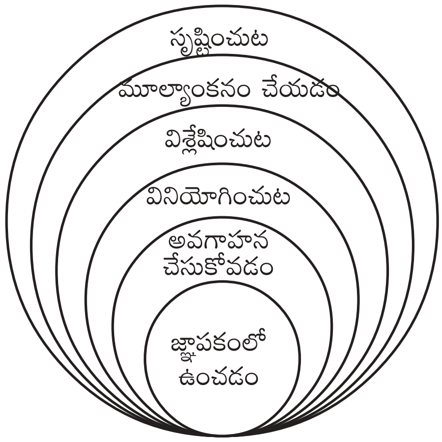
బ్లూమ్స్ విద్యార్థి అయిన ఎల్.డబ్ల్యూ. అండరసన్ (2001)జ్ఞానాత్మక రంగంలోని లక్ష్యాలను ప్రస్తుత విద్యార్థుల, ఉపాధ్యాయులకు ఉపయోగపడేటట్లు సవరించాడు.

జ్ఞానాత్మక రంగంలోని 6 లక్ష్యాలకు సంబంధించి మూడు రకాలైన మార్పులు చేయుట జరిగింది. అవి : 1) పదజాలంలో మార్పు, 2) నిర్మాణంలో మార్పు, 3) ప్రాధాన్యతలో మార్పు.

1) పదజాలంలో మార్పు : పాత, సవరించిన బ్లూమ్ వర్గీకరణలో 6 లక్ష్యాలను పదజాలంలో అనగా నామవాచక రూపం నుంచి క్రియా రూపాలుగా మార్చబడినవి. "జ్ఞానం"ను జ్ఞాపకంలో ఉంచడం (Remembering), "అవబోధం (Comprehension)"ను "అవగాహన చేసుకోవడం" (understanding) అని, "వినియోగం"ను "వినియోగించుట (Applying) అని, "సంశ్లేషణ"ను "సృష్టించుట (Creating)" అని, "మూల్యాంకనం"ను "మూల్యాంకనం చేయడం (Evaluating)" గాను మార్చుట జరిగింది. పాత బ్లూమ్స్ వర్గీకరణలో అత్యున్నత స్థాయి లక్ష్యమైన "మూల్యాంకనాన్ని" సవరించిన బ్లూమ్స్ వర్గీకరణలో రెండవ అత్యున్నత స్థాయి లక్ష్యం "మూల్యాంకనం చేయడం"గాను పాత బ్లూమ్స్ వర్గీకరణలో రెండవ అత్యున్నత స్థాయి లక్ష్యమైన "సంశ్లేషణ"ను సవరించిన బ్లూమ్స్ వర్గీకరణలో అత్యున్నత స్థాయి లక్ష్యం "సృష్టించుట"గా మార్పు చేయుట జరిగింది.



పాత బ్లూమ్ వర్గీకరణ



సవరించిన బ్లూమ్ వర్గీకరణ

2) నిర్మాణంలో మార్పు : సవరించిన బ్లూమ్ వర్గీకరణలో విధానానికి ప్రాధాన్యత నివ్వడం వల్ల; పాత బ్లూమ్ వర్గీకరణలో లక్ష్యాలు ఏకమితి రూపంలో ఉంటే, సవరించిన బ్లూమ్ వర్గీకరణలో ద్విమితీయ రూపాన్ని సంతరించుకొన్నాయి.

జ్ఞానం / లక్ష్యాలు	జ్ఞాపకంలో ఉంచడం	అవగాహన చేసుకొనుట	వినియోగించుట	విశ్లేషించుట	మూల్యాంకనం చేయుట	సృష్టించుట
యదార్థ జ్ఞానం	పొందుపరుచుట (List)	సంగ్రహణం (Summarize)	వర్గీకరణ (Classify)	క్రమం (Order)	ర్యాంక్ (Rank)	సంయోగం (Combine)
భావనా జ్ఞానం	వర్ణన (Describe)	వ్యాఖ్యానించుట (Interpret)	ప్రయోగం (Experiment)	వివరించడం (Explain)	మదింపు (Assess)	ప్రణాళిక (Plan)
విధాన జ్ఞానం	పట్టిక రూపంలో (Tabulation)	ఊహించుట (Predict)	గణించుట (Calculate)	వేరుపరచుట (Differentiate)	నిర్ధారించుట (Concluded)	ఏర్పరచుట (Compose)
అధి–అభిజ్ఞజ్ఞానం (Meta-Cognitive Knowledge)	ఉపయోగించుట (Use)	నిర్వహించుట (Execute)	నిర్మించుట (Construct)	సాధించుట (Achieve)	చేపట్టుట (Action)	వాస్తవాన్ని గుర్తించుట (Actualize)

3. ప్రాధాన్యతలో మార్పు : విద్యాప్రణాళిక, బోధన, మదింపులలో సాధికారంగా ఉపయోగించే విధంగా ఈ లక్ష్యాలు మార్చబడినవి.

బి. భావావేశరంగం : మానవ ప్రవర్తనలో ఉద్వేగాలకు సంబంధించిన లక్ష్యాలను సూచించే రంగమిది. దీనిలోని లక్ష్యాలు ఆసక్తులు, వైఖరులు, విలువలు, అభినందనలు, ఏకాగ్రత, సర్దుబాటు వంటి అంశాలకు చెందినవి. ఈ విద్యా లక్ష్యాలు అభ్యసనలో ఉన్నత లక్ష్యాలు, జ్ఞానాత్మక, ప్రవర్తనా మార్పులతో దగ్గర సంబంధం కలవి.

క్రాత్‌వాల్ భావావేశరంగంలోని లక్ష్యాలను 5 రకాలుగా వర్గీకరించాడు. అవి :

1. గ్రహించడం : భావావేశరంగంలో ప్రాథమిక స్థాయి లక్ష్యమిది. ఒక విషయాన్ని గ్రహించడానికి దానిపై

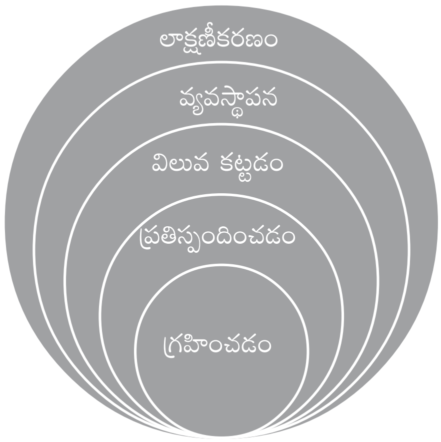
ఇష్టం ఉండాలి. ఇష్టం ఉన్నప్పుడు గ్రహించడానికి సుముఖత చూపుతాడు. సుముఖత మూలంగా ఏకాగ్రత ఏర్పడుతుంది.

2. ప్రతిస్పందించడం : విషయాన్ని గ్రహించి, సుముఖత ఏర్పరచుకొని ఏకాగ్రత కలిగి ఉంటే ప్రతిస్పందిస్తాడు.

3. విలువ కట్టడం : వ్యక్తి సంతృప్తి పడినప్పుడే దాని విలువ అర్థం చేసుకొంటాడు. అర్థం చేసుకొన్న విలువకు ప్రాధాన్యం ఇచ్చి, ఆ విలువకు కట్టుబడి ఉండటం జరుగుతుంది.

4. వ్యవస్థీకరించుట : వ్యవస్థీకరించటంలో కట్టుబడిన విలువను భావనగా రూపొందించుకొని, దానిని విలువ వ్యవస్థగా ఏర్పాటు చేసుకొనుట జరుగుతుంది.

5. లాక్షణీకరణం : భావావేశరంగంలో అత్యున్నతస్థాయి లక్ష్యం లాక్షణీకరణం. లాక్షణీకరణంలో విలువకు చెందిన సాధారణీకృత ప్రవర్తనను రూపొందించుకుంటాడు.

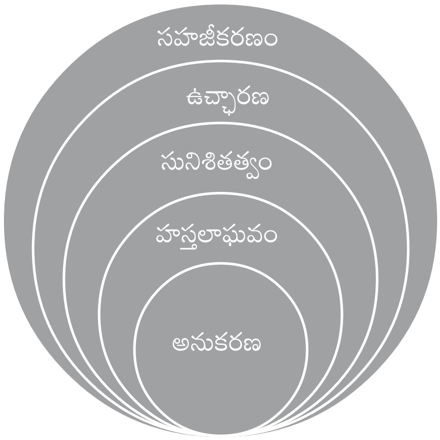


సి) మానసిక చలనాత్మక రంగం :

ఈ రంగం మానసిక - చలన విషయాలకు సంబంధించిన మానసిక-చలన, కండరాల సమన్వయం సాధింపు స్థాయిలపై ఆధారపడుతుంది. సమన్వయం స్థాయి పెరిగే కొలది చేతులు, కాళ్ళు వేగంగాను, అనాలోచితంగాను, యాంత్రికంగాను ఉపయోగించగలుగుతాడు.

ఆర్.హెచ్.దవే ఈ రంగంలోని లక్ష్యాలను 5 రకాలుగా వర్గీకరించాడు. అవి :

1. **అనుకరణం :** మానసిక చలనాత్మక రంగంలోని మౌళికలక్ష్యం అనుకరణం. మానవుడు ఏదైనా చేయాలనుకొనేముందు వాటిని చూసి, తాకి, అదే విధంగా చేయడానికి ప్రయత్నిస్తాడు.
2. **హస్తలాఘవం :** తరువాత చేతులను, కాళ్ళను ఉపయోగించి వాటితో పనిచేస్తాడు.
3. **సునిశితత్వం :** కొన్నిరోజుల ఈ ఆచరణ తర్వాత వివిధ భాగాలను చక్కగా ఉపయోగించే నియంత్రణ పొందుతాడు.
4. **ఉచ్చారణ (Articulation) :** అనుభవంతో మానసిక - చలనాత్మక సమన్వయం పొందుతాడు.
5. **సహజీకరణం (Naturalisation) :** మానసిక చలనాత్మక రంగంలో అత్యున్నతస్థాయి లక్ష్యం సహజీకరణం. దీనిలో భాగంగా చివరికి అనాలోచితంగా - యాంత్రికంగా ఆయా వస్తువులను ఉపయోగించగలుగుతాడు.



తరగతి గదిలో గణిత బోధన లక్ష్యాలు :

గణిత బోధన అనేది మూడు రంగాల్లోని అన్ని లక్ష్యాలను సాధించే విధంగా కొనసాగాలి. కాని ఎలిమెంటరీ స్థాయిలో గణితాన్ని బోధించేటప్పుడు, ఇతర లక్ష్యాలకన్నా "జ్ఞాపకం ఉంచడం", "అవగాహన చేసుకోవడం", "వినియోగించుట" వంటి జ్ఞానాత్మక రంగంలోని లక్ష్యాలకు, మానసిక–చలనాత్మక రంగానికి చెందిన "నైపుణ్యం/కౌశలాల"కు ఎక్కువ ప్రాధాన్యతనివ్వాలి. ఇతర లక్ష్యాలైన విశ్లేషించుట / మూల్యాంకనం చేయుట, సృష్టించుట మొదలగునవి తగిన జ్ఞానాత్మక మరియు మానసిక పరిణితి పొందిన తరువాత సాధించగలరు.

బోధన లక్ష్యాలు, సాధించిన తర్వాత అభ్యసన ఫలితాలు (Learning Outcomes) అవుతాయి. ప్రతి గణిత బోధన లక్ష్యానికి అనుగుణంగా ఊహించే అభ్యసన ఫలితాలు (Learning Outcomes) దిగువ ఇవ్వబడ్డాయి.

1. జ్ఞాపకం ఉంచడం (జ్ఞానం) : విద్యార్థి గణిత పాఠ్య విషయానికి చెందిన పదాల, భావనల, ప్రక్రియల, సూత్రాల, నియమాల, నిర్వచనాల, గుర్తుల, యదార్థాల, సామాన్యీకరణాల జ్ఞానాన్ని సముపార్జించుకుంటాడు.

స్పష్టీకరణలు : విద్యార్థిపై అంశాలకు చెందిన జ్ఞానాన్ని

1. జ్ఞప్తికి తెచ్చుకుంటాడు (Recalls).
2. గుర్తిస్తాడు (Recognises).

2. అవగాహన : విద్యార్థి జ్ఞానానికి సంబంధించిన పై అంశాలను అవగాహన చేసుకొంటాడు.

స్పష్టీకరణ : విద్యార్థి

1. సొంత పదాల్లో వివరిస్తాడు (Explains)
2. సొంత ఉదాహరణలిస్తాడు (Illustrates).
3. వర్గీకరిస్తాడు (Classifies).
4. సన్నిహిత సంబంధమున్న భావనల మధ్య సామ్య, విబేధాలను కనుక్కొంటాడు (Find similarities and differences).
5. దత్తాంశంలో గల సన్నిహిత సంబంధాలను గుర్తిస్తాడు (Identifies).
6. సూత్రాలు, సంబంధాలను సూచిస్తాడు (Cites)
7. శాబ్దిక ప్రవచనాలను, సాంకేతిక ప్రవచనాలుగాను, సాంకేతిక ప్రవచనాలను శాబ్దిక ప్రవచనాలుగా అనువదిస్తాడు

(Translates).

8. సమస్యల సాధనకై సూత్రాలను ఉపయోగిస్తాడు (Uses formulas).
9. తగిన ప్రమాణాలు ఉపయోగిస్తాడు (Uses appropriate units).
10. కావలసిన గుర్తును, సంఖ్యను, సూత్రాన్ని గణిత ప్రక్రియల్లో ప్రతిక్షేపిస్తాడు (Substitutes).
11. దోషాలను గుర్తించి, సరిచేస్తాడు (Detects & Correct errors).
12. పోల్చుతాడు (Compares).
13. ఫలితాలను అంచనా వేస్తాడు (Estimates).
14. ఫలితాలను సరిచూస్తాడు (Verifies).
15. విచక్షణ చేస్తాడు (Discriminates).
16. రేఖాపటాలు, పట్టికలు, చిత్రపటాలను వ్యాఖ్యానిస్తాడు (Interprets).

3. వినియోగించుట : విద్యార్థి జ్ఞానాన్ని, అవగాహనను నూతన పరిస్థితులలో వినియోగిస్తాడు.

స్పష్టీకరణ : విద్యార్థి

1. సమస్యను విశ్లేషణ చేస్తాడు లేదా చిన్నచిన్న అంశాలుగా విడదీస్తాడు (Analyses).
2. సమస్యలో దత్తాంశాన్ని, సారాంశాన్ని కనుక్కొంటాడు (finds out what is given and what is required).
3. ఇచ్చిన దత్తాంశంలో సంబంధాలను స్థాపిస్తాడు. (Establishes relationships).
4. దత్తాంశాలు సరిపోతాయో లేదో నిర్ణయిస్తాడు (Judges).
5. సమస్య సాధనకు వివిధ పద్ధతులు తెలుపుతాడు (Gives Different Methods).
6. తగిన పద్ధతులు ఎంపిక చేస్తాడు (Selects).
7. అనుమితులను రాబడతాడు (Draws Inference).
8. ఫలితాలను ఊహిస్తాడు (Predicts).
9. సామాన్యీకరిస్తాడు (Makes Generalisations).
10. ఆగమన, నిగమన విధానంలో కార్యకారణ చింతన చేస్తాడు (Reasons inductively and deductively).

4. నైపుణ్యాలు / కౌశలాలు : విద్యార్థి గణిత విషయాలకు చెందిన కౌశలాలు / నైపుణ్యాలు (మానసిక – చలనాత్మక రంగంలో) సాధిస్తాడు.

1. వివిధ గణితోపకరణాల సక్రమ / సరియైన వినియోగం

స్పష్టీకరణ : విద్యార్థి

1. సరైన ఉపకరణాన్ని ఎంపిక చేసుకొంటాడు.
2. కచ్చితంగా / స్పష్టంగా మాపనం చేస్తాడు.
3. ప్రతి పరికరాన్ని ఉపయోగించటంలో తగిన జాగ్రత్తలు తీసుకొంటాడు.
4. ప్రతి పరికరాన్ని వీలైనన్ని విధాలుగా ఉపయోగిస్తాడు.

2. రేఖాచిత్రాలు / జ్యామితీయ పటాలు / గ్రాఫ్‌లను గీయటంలో నైపుణ్యత

స్పష్టీకరణలు : విద్యార్థి

1. ఇచ్చిన ప్రమాణానికి అనుగుణంగా పటాలను గీస్తాడు.
2. పటాలు, రేఖా చిత్రాలను వేగంగా, శుభ్రంగా, కచ్చితంగా గీస్తాడు.
3. సమంజసమైన, స్పష్టత గల స్వేచ్ఛాచిత్రాలను, రేఖాచిత్రాలను గీస్తాడు.

3. గణనా నైపుణ్యాలు :

స్పష్టీకరణలు : విద్యార్థి

1. మనోగణనలను కచ్చితంగా, త్వరితంగా చేస్తాడు.
2. లిఖిత గణనలను కచ్చితంగా, త్వరితంగా చేస్తాడు.
3. సరియైన గుర్తులు, సంజ్ఞలు ఉపయోగిస్తాడు.
4. సమస్యను సాధించడంలో క్రమబద్ధంగా ఉంటాడు.
5. సమస్యను సాధించడంలో అనవసర సోపానాలు వదిలేస్తాడు.

5. పట్టికల పఠనం :

స్పష్టీకరణలు : విద్యార్థి

1. సరైన పట్టికను ఎంపిక చేసుకొంటాడు.
2. తప్పులు లేకుండా చదువుతాడు.
3. రీడింగ్‌లను సరిచూసుకొంటాడు.
4. త్వరితంగా, నిర్దిష్టంగా చదువుతాడు.

4.1.6. పాఠ్యాంశం ఆధారంగా బోధన లక్ష్యాలు, స్పష్టీకరణలు :

ప్రతి పాఠ్యాంశం ద్వారా వీలైనన్ని లక్ష్యాలు సాధించడానికి ప్రయత్నించి సాధించాల్సిన లక్ష్యాల కనుగుణంగా అభ్యసనానుభవాలు రూపొందించుకోవాలి. పరీక్షించడానికి వీలుగా స్పష్టీకరణలు పేర్కొనాలి. ఒకే అభ్యసనానుభవం ద్వారా ఒకటి కంటే ఎక్కువ స్పష్టీకరణలు సాధించవచ్చు. అలాగే ఒక స్పష్టీకరణకు ఒకటి కంటే ఎక్కువ అభ్యసనానుభవాలు కల్పించాల్సి రావచ్చు.

ఇప్పుడు ఒక ఉదాహరణను పరిశీలిద్దాం.

ఉదాహరణ :

తరగతి : 8 విషయం : గణితం

పాఠం : లాభనష్టాలు

1. **జ్ఞానం :** విద్యార్థి లాభనష్టాల పాఠ్యాంశానికి చెందిన పదాల, భావనల, నిర్వచనాల, సూత్రాల, విధానాల జ్ఞానాన్ని సముపార్జించుకొంటాడు.

   స్పష్టీకరణలు : 1) విద్యార్థి వ్యాపారంలో ఉపయోగించే కొన్న వెల, అమ్మిన వెల, లాభం, నష్టం వంటి పదాలను జ్ఞప్తికి తెచ్చుకుంటాడు.

2) విద్యార్థి లాభం లేదా నష్టం కనుక్కోవడానికి సరైన సూత్రాలను జ్ఞప్తికి తెచ్చుకుంటాడు.

2. **అవగాహన :** విద్యార్థి వ్యాపారంలో లాభం లేదా నష్టం వచ్చే సందర్భాలను అవగాహన చేసుకుంటాడు.

స్పష్టీకరణలు : 1) విద్యార్థి వ్యాపారంలో లాభం లేదా నష్టాన్ని నిర్ధారించడంలో అమ్మిన వెలకు, కొన్న వెలకు గల సంబంధాన్ని పోలుస్తాడు.

2) విద్యార్థి పై సంబంధాన్ని గణిత రూపంలోకి అనువదిస్తాడు.

3. **వినియోగం :** విద్యార్థి లాభనష్టాలు పాఠ్యాంశంపై పొందిన జ్ఞానాన్ని, అవగాహనను నూతన పరిస్థితుల్లో వినియోగిస్తాడు.

స్పష్టీకరణలు : 1) కొన్న వెల, అమ్మిన వెల, లాభం, నష్టాల మధ్య సంబంధాన్ని స్థాపిస్తాడు.

2) విద్యార్థి కొన్న వెల అమ్మిన వెల కంటే ఎక్కువైతే నష్టం అని, కొన్న వెల అమ్మిన వెల కంటే తక్కువైతే లాభం అని అనుమితులు రాబడతాడు.

3) విద్యార్థి ఇచ్చిన వ్యాపార సంబంధ సమస్యను విశ్లేషిస్తాడు.

4) విద్యార్థి దత్తాంశం, సారాంశాలను కనుక్కొంటాడు.

4. **నైపుణ్యం :** విద్యార్థి దత్త సమస్యలకు లాభం / నష్టాలను గణన చేయడంలో నైపుణ్యాలను (కౌశలాలను) పొందుతాడు.

స్పష్టీకరణలు : 1) విద్యార్థి లాభ, నష్టాలకు సంబంధించిన సులభమైన సమస్యల సాధనలో మనోగణనలను వేగంగాను, ఖచ్చితంగాను చేయగలుగుతాడు.

2) విద్యార్థి అవసరమైన సోపానాలను అనుసరిస్తూ తగిన వేగంతో సమస్యల్ని క్రమపద్ధతిలో సాధిస్తాడు.

ఆలోచించండి : 6, 7, 8 తరగతులలో ఒక్కొక్క తరగతి నుండి ఒక్కొక్క గణిత భావన / అంశాన్ని తీసుకొని, బోధనా లక్ష్యాలు, స్పష్టీకరణలు రాయండి.

4.2. గణిత విద్యాప్రమాణాలు – అభ్యసన సూచికలు :

మానవుని జీవిత చక్రంలో సర్వాంతర్యామి అయిన గణితాన్ని ఒక్కొక్కరు ఒక్కొక్క అవసరం కోసం, ఒక్కో రకమైన శక్తి సామర్థ్యాలను పొందడం కోసం నేర్చుకుంటారు. మరికొందరు దైనందిన జీవితంలో ఎదురయ్యే పనులు చేసుకోవడానికి అవసరమయ్యే ప్రాథమిక గణిత భావనలను నేర్చుకుంటారు. మరికొందరు వారు ఎంచుకున్న వృత్తి, ఉద్యోగం చేయడానికి, ఇంకొందరు బుద్ధి కుశలతకు, కొంతమంది విషయాన్ని లోతైన అధ్యయనం చేయడానికి, కొంతమంది పరిశోధన, అన్వేషణలకు మార్గాలై నూతన సత్యాలను, దాగి వున్న వాస్తవాలను వెతకడానికి, వ్యక్తీకరించడానికి ఒక పరికరంగా గణితాన్ని నేర్చుకుంటారు.

అయితే నియత వ్యవస్థలో బోధనాభ్యసన కార్యక్రమంలో ఎదురయ్యే ముఖ్యమైన ప్రశ్నలలో ఎందుకు బోధిస్తారు అనేది ఒకటి. మొదటి లక్ష్యాల సాధన కోసం బోధనాభ్యసన కార్యక్రమం రూపొందించబడింది. తరువాత అది సామర్థ్యాలు, కనీస అభ్యసన స్థాయిలు సాధించడం కోసం జరిగేది. ఇప్పుడు విద్యాప్రమాణాలు సాధించడం కోసం పాఠశాలలో బోధనాభ్యసన కార్యక్రమాలు రూపొందించబడుతున్నాయి.

లక్ష్యాలు, సామర్థ్యాలు, విద్యా ప్రమాణాలను విశ్లేషణాత్మకంగా చూస్తే – బోధనా లక్ష్యాలు, పాఠ్యాంశం నేర్చుకున్న

తరువాత మనం విద్యార్థిలో కలుగుతాయని ఆశించే మార్పులు, సామర్థ్యాలు ఒక తరగతి పూర్తయ్యేసరికి విద్యార్థి సాధించాల్సినవి. ఏవైనా అభ్యసనానంతరం మనం ఆశించే అంత్య ఫలితాలు మాత్రమే. పేర్లు ఏవైనా భావన ఇదే. ఇప్పుడు స్వీకరించిన విద్యా ప్రమాణాలైనా ఇంతే. అభ్యసన అంత్య ఫలితాలు, ఆశించే ఫలితాలు. ఇలాంటి వాటన్నింటి భావన ఒకటే.

4.2.1. విద్యా ప్రమాణాలు – గణితం :

విద్యా ప్రమాణాలు అంటే ఏమిటి?

విద్యార్థులు వేనిని అర్థం చేసుకోవాలో, ఏమి చేయగలరో వాటిని విద్యా ప్రమాణాలు నిర్వచిస్తాయి.

– పెన్సిల్‌వేనియా కామన్‌కోర్ ప్రమాణాలు

విద్యార్థులు వేనిని నేర్చుకోవాలో, వేనిని చేయగలరో వాటిని విద్యాప్రమాణాలు నిర్దేశిస్తాయి.

– విస్కాన్సిన్ విద్యా ప్రమాణాలు

విద్యార్థి ఏమి తెలుసుకోవాలి, చేయగలగాలి, ఒక నిర్దిష్ట సమయము వద్ద ఏమి అభ్యసించాలి. విశాల దృక్పథంలో చూస్తే, అభ్యసనం జరిగింది అని నిశ్చయించుటకు ఏ నిష్పాదన (performance) సాక్ష్యంగా అంగీకరించబడుతుందో – విద్యాప్రమాణం నిర్దేశిస్తుంది.

ఒక విద్యార్థి విద్యను అభ్యసిస్తున్నపుడు, ఏదైనా ఒక స్థాయిలో తనకు తెలిసి ఉండాలి, ఏమి నేర్చుకుని ఉండాలి, ఏమి చేయగలిగి ఉండాలి, అనే ప్రశ్నలకు సమాధానాలనే ఆ స్థాయి విద్యాప్రమాణాలు అంటారు.

- SCERT, A.P.

ఉపాధ్యాయుడు తన బోధనలో అంచనా వేయడానికి విద్యార్థి తనకు తెలిసిన భావాల నుండి క్రమంలో దశలవారీగా భావనను నిర్మించుకునే విధానానికి ప్రాముఖ్యతనివ్వాలి. ఈ దిశలో చూస్తే, విద్యాప్రమాణాలు ఉపాధ్యాయునికి మార్గదర్శకాలను అందజేస్తున్నాయి. ఆయన తరగతి గదిలో ఏవిధంగా బోధన జరపాలో తెల్పుతాయి. అనగా బోధనాభ్యసన మార్గాన్ని సూచిస్తాయి.

విద్యాప్రమాణాల ఆవశ్యకత :

1. బోధన అభ్యసనానికి విద్యా ప్రమాణాలు ఖచ్చితమైన గమ్యాలుగా ఉపయోగపడతాయి.

2. ఉన్నత విద్యాప్రమాణాలను ఏర్పరచడం వలన విద్యార్థులు, తల్లిదండ్రులు, అధ్యాపకులు, పౌరులు సమయంలో దత్త ప్రదేశం వద్ద చేరేసరికి ఏఏ అంశాలను విద్యార్థులు అభ్యసించాలో తెలుసుకొనుటకు వీలవుతుంది.

3. విద్యార్థులు ఏమి తెలుసుకోవాలి, ఏమి చేయగలిగి ఉండాలి, అనే వాటికి సంబంధించిన స్పష్టమైన ప్రకటనలు (Statements) అవసరం. వీనివలన విజయానికి అవసరమైన జ్ఞానము, నైపుణ్యాలకు, పాఠశాలలు, విద్యార్థులకు అందించాయో లేదో తెలుసుకోవడానికి వీలవుతుంది.

4. రాష్ట్ర వ్యాప్తంగా మదింపు (Assessment) వ్యవస్థకు అవసరమైన పాఠ్యాంశాలను (Content) వ్యవస్థితం చేయడానికి తగిన గట్టి పునాదిని ప్రమాణాలు నిర్మిస్తాయి.

బోధనాభ్యసనకు మార్గదర్శక సూత్రాలు :

1. ప్రతి విద్యార్థికి అభ్యసించడానికి హక్కు ఉంది.

2. బోధనకు తగిన విధంగానూ, ఖచ్చితంగానూ ఉండాలి.

తరువాత మనం విద్యార్థిలో కలుగుతాయని ఆశించే మార్పులు, సామర్థ్యాలు ఒక తరగతి పూర్తయ్యేసరికి విద్యార్థి సాధించాల్సినవి. ఏవైనా అభ్యసనానంతరం మనం ఆశించే అంత్య ఫలితాలు మాత్రమే. పేర్లు ఏవైనా భావన ఇదే. ఇప్పుడు స్వీకరించిన విద్యా ప్రమాణాలైనా ఇంతే. అభ్యసన అంత్య ఫలితాలు, ఆశించే ఫలితాలు. ఇలాంటి వాటన్నింటి భావన ఒకటే.

4.2.1. విద్యా ప్రమాణాలు – గణితం :

విద్యా ప్రమాణాలు అంటే ఏమిటి?

విద్యార్థులు వేనిని అర్థం చేసుకోవాలో, ఏమి చేయగలరో వాటిని విద్యా ప్రమాణాలు నిర్వచిస్తాయి.

– పెన్సిల్‌వేనియా కామన్‌కోర్ ప్రమాణాలు

విద్యార్థులు వేనిని నేర్చుకోవాలో, వేనిని చేయగలరో వాటిని విద్యాప్రమాణాలు నిర్దేశిస్తాయి.

– విస్కాన్‌సిన్ విద్యా ప్రమాణాలు

విద్యార్థి ఏమి తెలుసుకోవాలి, చేయగలగాలి, ఒక నిర్దిష్ట సమయము వద్ద ఏమి అభ్యసించాలి. విశాల దృక్పథంలో చూస్తే, అభ్యసనం జరిగింది అని నిశ్చయించుటకు ఏ నిష్పాదన (performance) సాక్ష్యంగా అంగీకరించబడుతుందో – విద్యాప్రమాణం నిర్దేశిస్తుంది.

ఒక విద్యార్థి విద్యను అభ్యసిస్తున్నపుడు, ఏదైనా ఒక స్థాయిలో తనకు తెలిసి ఉండాలి, ఏమి నేర్చుకుని ఉండాలి, ఏమి చేయగలిగి ఉండాలి, అనే ప్రశ్నలకు సమాధానాలనే ఆ స్థాయి విద్యాప్రమాణాలు అంటారు.

- SCERT, A.P.

ఉపాధ్యాయుడు తన బోధనలో అంచనా వేయడానికి విద్యార్థి తనకు తెలిసిన భావాల నుండి క్రమంలో దశలవారీగా భావనను నిర్మించుకునే విధానానికి ప్రాముఖ్యతనివ్వాలి. ఈ దిశలో చూస్తే, విద్యాప్రమాణాలు ఉపాధ్యాయునికి మార్గదర్శకాలను అందజేస్తున్నాయి. ఆయన తరగతి గదిలో ఏవిధంగా బోధన జరపాలో తెల్పుతాయి. అనగా బోధనాభ్యసన మార్గాన్ని సూచిస్తాయి.

విద్యాప్రమాణాల ఆవశ్యకత :

1. బోధన అభ్యసనానికి విద్యా ప్రమాణాలు ఖచ్చితమైన గమ్యాలుగా ఉపయోగపడతాయి.

2. ఉన్నత విద్యాప్రమాణాలను ఏర్పరచడం వలన విద్యార్థులు, తల్లిదండ్రులు, అధ్యాపకులు, పౌరులు సమయంలో దత్త ప్రదేశం వద్ద చేరేసరికి ఏఏ అంశాలను విద్యార్థులు అభ్యసించాలో తెలుసుకొనుటకు వీలవుతుంది.

3. విద్యార్థులు ఏమి తెలుసుకోవాలి, ఏమి చేయగలిగి ఉండాలి, అనే వాటికి సంబంధించిన స్పష్టమైన ప్రకటనలు (Statements) అవసరం. వీనివలన విజయానికి అవసరమైన జ్ఞానము, నైపుణ్యాలకు, పాఠశాలలు, విద్యార్థులకు అందించాయో లేదో తెలుసుకోవడానికి వీలవుతుంది.

4. రాష్ట్ర వ్యాప్తంగా మదింపు (Assessment) వ్యవస్థకు అవసరమైన పాఠ్యాంశాలను (Content) వ్యవస్థితం చేయడానికి తగిన గట్టి పునాదిని ప్రమాణాలు నిర్మిస్తాయి.

బోధనాభ్యసనకు మార్గదర్శక సూత్రాలు :

1. ప్రతి విద్యార్థికి అభ్యసించడానికి హక్కు ఉంది.

2. బోధనకు తగిన విధంగానూ, ఖచ్చితంగానూ ఉండాలి.

విశదీకరించడంలోనూ, రూపొందించడంలోనూ విస్తారమైన అనుభవం పొందుతారు. ఇవి సమస్యా సాధనలో వారి నైపుణ్యం పెరగడానికి పట్టు వదలకుండా దోహదపడతాయి.

సమస్యలలో క్లిష్టత ఈక్రింది విషయాలపై ఆధారపడి ఉంటుంది :

- వివిధ భావనల, ప్రక్రియల, సందర్భాలను అనుసంధానించడం.
- సమస్యలలో సోపానాల సంఖ్య.
- సమస్యలలోని ప్రక్రియల సంఖ్య
- సందర్భ క్లిష్టత
- పద్ధతుల స్వభావం

పిల్లల్లో సమస్యా సాధనా నైపుణ్యం సాధింపబడింది అని తెలుసుకొనుటకు సూచికలు :

- సమస్యను చదవడం.
- ఇచ్చిన సమస్యల్లోని సమాచారాన్ని విడి భాగాలుగా గుర్తించగలగడం.
- గుర్తించిన విడి భాగాలను వేరుచేయడం.
- సరైన సమస్యల్లో ఇమిడియున్న భావనలను అవగాహన చేసుకొనడం.
- సరైన పద్ధతిని లేదా విధానాన్ని ఎంపిక చేయడం.
- ఎన్నుకున్న పద్ధతి ప్రకారం సమస్యను సాధించడం.

2. కారణాలు తెలపడం – నిరూపణలు చేయడం :

ఏ స్థాయినుండైనా గణిత పాఠ్యపుస్తకంలో క్రొత్త అధ్యాయం మొదటగా పరిచయం చేసినపుడు కొన్ని స్వీకృతాలను తీసుకోవడం సహజమే. కానీ తరువాత, గణిత భావనలన్నీ ముందున్న భావనల మధ్య కొత్త సంబంధాలను రాబట్టుట కార్యకారణ విచారణలతో ఏర్పడుతున్నది. అంటే గణిత భావనల పరంపరను అవగాహన చేసుకోవడంలో ఆ భావనల మధ్య కార్యకారణ చేయడమే ప్రధానం. గణిత భావనల సముపార్జనలో చేయు ఆగమన, నిగమన కార్యకారణ విచారణా నైపుణ్యాలను క్రింది అంశాలు అనువర్తనం చేయగలగాలి. అవి :

- దశల వారీగా ఉన్న సోపానాలకు కారణాలు వివరించటం.
- గణిత సాధారణీకరణాలను, ప్రకల్పనలను అర్థం చేసుకోవడం, చేయగలగడం.
- పద్ధతిని అర్థం చేసుకోవడం, సరిచూడడం.
- సమస్యా నిరూపణలో క్రమాన్ని అర్థం చేసుకోవడం.
- ఆగమన, నిగమన పద్ధతులలో తార్కికతను వినియోగించడం.
- గణిత ప్రకల్పనలను పరీక్షించటం.

అంటే కార్యకారణ చింతన ఏది, ఎందుకు జరిగిందో తెలుసుకోవడానికి చేసే ఆలోచన. ప్రతి స్థాయిలోని పిల్లలు సమస్యా సాధనకై వారు ఏయే నైపుణ్యాలను, ఏయే భావనలు ఎందుకు ఎంచుకున్నారో వంటి విషయాలకు కారణాలు చెప్పగలిగి ఉండాలి. వారు తాము చేసిన నిర్ణయాలు, ఫలితాలు సరిచూసుకోవడం ఒక అలవాటుగా మారాలి.

3. భావవ్యక్తీకరణ / వ్యక్తపరచడం :

వ్యక్తపరచడం అనేది గణితం మరియు గణిత అభ్యసనలో ముఖ్యమైన అంశం. అది గణితంలో విషయాల మీద అవగాహన యొక్క సాధారణీకరణం, తార్కిక ఆలోచన ఇతరులతో పంచుకోవడానికి ఒక మార్గం. మనం ఆలోచనలతో ప్రతిస్పందించడానికి, సానబెట్టడానికి, సరిచేయడానికి, చర్చించడానికి వ్యక్తపరచడాన్ని సాధనంగా ఉపయోగిస్తాం. వివిధ విషయాలను క్రోడీకరించి విషయ అవగాహనను మరియు మన ఆలోచనలను ప్రదర్శన రూపంలో మార్చడానికి వ్యక్తీకరణ ఉపయోగపడుతుంది. అభ్యసన ప్రక్రియలో ఒక వ్యక్తి తాను ఏమి నేర్చుకున్నాడో అవి ఎప్పుడు ధృవపరచుకోగలడు? తాను నేర్చుకున్న అంశము యొక్క వివిధ రూపాలను (సాంకేతిక పదాలనుపయోగించి, వ్రాయబడినది, సంజ్ఞారూపంలో వ్రాయబడినది, పట చిత్రాలలో చూపబడినది) చదువుట, రాయుట, వివరించుట చేయగలిగినపుడు తాను ఎంతవరకు అవగాహన చేసుకున్నాడో ధృవపరచుకోగలడు.

కావున గణిత అభ్యసన సందర్భంలో విద్యార్థికి భావవ్యక్తీకరణ చేయడానికి ఎక్కువ అవకాశాలు కల్పించాలి. ఆలోచనలను చక్కగా వ్యక్తీకరించాలి. అంటే తాను అనుభవం ద్వారా, అనుభవాన్ని ఉన్నది ఉన్నట్లుగా అవసరమైన గుర్తులు, ఉదాహరణలతో విశదీకరించి, క్లుప్తంగా చెప్పగలగాలి. సంపూర్ణ భావనలను అనుభవం ద్వారా పొందగలిగినపుడే ఇది సాధ్యమవుతుంది. ఇందుకోసం పాఠ్యపుస్తకాలలో కృత్యాలు, అభ్యాసాలు, నియోజనాలు కల్పించాలి. ఉపాధ్యాయుడు బోధనలో విద్యార్థిని ఈ దిశలో ప్రోత్సహించాలి.

- గణిత భావనలను, వాక్యాలను చదవగలగడం, రాయగలగడం.
- గణిత వ్యక్తీకరణలను రూపొందించడం.
- గణిత పరమైన ఆలోచనలను తన స్వంత మాటల్లో వివరించటం.
- గణిత పద్ధతులను వివరించడం.
- గణిత తార్కికతను వివరించటం.
- గుర్తులు, సంఖ్యలు ఉపయోగించి రాయగలగడం.
- గణిత వాక్యాన్ని నిజజీవిత సమస్యగా మార్చి చెప్పగలగడం.
- నిజజీవిత సమస్యలను, గుర్తులను ఉపయోగించి రాయగలగడం.
- ఇచ్చిన భావనలపై పద సమస్యలు తయారుచేయటం.

4. అనుసంధానం / అంతర్గత సంబంధాలు :

గణితం అర్థంలేని, ఒకదానికొకటి సంబంధం లేని కొన్ని అమూర్త భావనలు, నైపుణ్యాల మిశ్రమం కాదు. గణితాన్ని ఒక వియుక్త విషయంగా బోధిస్తే / అభ్యసిస్తే నేర్చుకునే అంశాల ప్రాముఖ్యత తెలియక ఆసక్తికరంగా ఉండదు. అనువర్తనం చేయునపుడు నేర్చుకోవాలనే తపన ఉండదు. అభ్యసనం కృత్రిమంగా ఉంటుంది. ఇది ఒకదానికొకటి అంతర్గత సంబంధాలు కల్గి ఉన్న భావనల సమ్మేళనం. అందుచేత గణితంలోని అనేక భావనలు, పద్ధతుల మధ్య ఉన్న సంబంధాలు గణితంలోని అనేక విభాగాలకు ఒకదానితో మరొక దానికి ఉన్న సంబంధాలు బాగా అవగాహన అయినపుడు, పిల్లలు గణితాన్ని సులువుగా అభ్యసించగల్గుతారు. అలాగే వారికి గణితానికి, విజ్ఞాన శాస్త్రాలు, కళలు, సంగీతం, వ్యాపారం, వైద్యం, ప్రభుత్వ కార్యకలాపాలు వంటి మిగతా విషయాలకి (సబ్జెక్టు) ఉండే సంబంధాలు కూడా తెలియజేయాలి.

- అనుబంధ గణిత పాఠ్యవిభాగాలకు - భావనలను అనుసంధానం చేయడం.

ఉదా : మొత్తంలో భాగానికి – నిష్పత్తికి – భాగహారానికి, అమరికలకు – సౌష్ఠవమునకు, కొలతలు, తలము / అంతరాళం.

- దైనందిన జీవితానికి అనుసంధానం చేయడం.
- వేర్వేరు సబ్జెక్టులతో గణితాన్ని అనుసంధానం చేయడం.
- గణితంలోని వేర్వేరు పాఠ్యాంశాలకు సంబంధించిన భావనలను అనుసంధానం చేయడం

  (ఉదా : దత్తాంశ సేకరణ, అంకగణితం, ప్రదేశం)
- భావనలను, బహుళ పద్ధతులకు అనుసంధానం చేయడం.

5. ప్రాతినిధ్యం – దృశీకరణ :

ప్రాతినిధ్యపరచడం అనగా ముడి సమాచారాన్ని (డేటా) లేదా ఒక పట్టికను, పిల్లలు చదివి, అర్థం చేసుకుని, వాటిని వర్ణించి, అంతేకాకుండా వారు తామర్థం చేసుకున్నదానిని రేఖాచిత్రములు లేదా సూచనాత్మక పటములు లేదా ఇతర మార్గాలలో వ్యక్తీకరించి, వాటికి అవి సూచించే సమాచారానికి ఉన్న సంబంధాన్ని ప్రతీకలుగా వివరించగలగాలి. పట్టికలోని సమాచారం, సంఖ్యారేఖ, పటచిత్రం, దిమ్మచిత్రం, 2–డి పటాలు, 3–డి పటాలు చదవడం, పట్టికలను రూపొందించగలగడం, సంఖ్యారేఖపై చూపడం, పటచిత్రములు, దిమ్మచిత్రములు మున్నగు పటాలను గీయడం.

4.2.3 గణితంలో వివిధ పాఠ్యాంశాల ద్వారా సాధించవలసిన అభ్యసన సూచికలు :

ఉదాహరణకు 7వ తరగతి గణిత పాఠ్యాంశాల ద్వారా సాధించవలసిన అభ్యసన సూచికలు కింద యివ్వబడ్డాయి.

7వ తరగతి గణితం – అభ్యసన సూచికలు :

వ.సంఖ్య	అంశం / భావన	అభ్యసన సూచికలు
1.	**సంఖ్యా భావన :**	
	– పూర్ణసంఖ్యల గుణకార, భాగహారాలు – పూర్ణసంఖ్యల ధర్మాలు – పూర్ణసంఖ్యలలో పదసమస్యలు – పూర్ణ సంఖ్యలలో వివిధ ప్రక్రియలను ఉపయోగించి సమస్యలు సాధించుట. – భిన్నాలలో గుణకార, భాగహారానికి సంబంధించిన సమస్యలు – మిశ్రమ భిన్నాలు – అకరణీయ సంఖ్యలలో వివిధ ప్రక్రియలు – అకరణీయ సంఖ్యలను దశాంశ రూపంలో మార్చడం – దశాంశ భిన్నాల గుణకారం, భాగహారాలు	– రెండు పూర్ణసంఖ్యల గుణకారాన్ని వివిధ క్రమాలలో ఉపయోగించి సాధారణీకరించగల్గడం ధన పూర్ణాంకాన్ని ఋణపూర్ణ సంఖ్యతో, ఋణ పూర్ణసంఖ్యను ధనపూర్ణ సంఖ్యతో గుణకారాన్ని చేయగల్గడం. – వివిధ పద్ధతుల ద్వారా పూర్ణసంఖ్యల గుణకారం, భాగహారం చేయగల్గడం. – భిన్నాల గుణకారాలను వివిధ పద్ధతుల ద్వారా, పటాలద్వారా, సూత్రాలద్వారా నిర్మాణ సోపాన కార్యక్రమాన్ని పద్ధతులను వివరించగలగడం. – భిన్నాల భాగహారాలను వివిధ పటాల ద్వారా, క్రమాలద్వారా భిన్నాల భాగహార సూత్రాలను

– మీటర్లు, కిలోగ్రాములలో ఉండే ప్రమాణాలను చిన్నప్రమాణాలుగా, పెద్దప్రమాణాలుగా మార్చడం	సాధారణీకరించగల్గడం.
– అకరణీయ సంఖ్యలు మరియు దశాంశ భిన్నాలలో వివిధ ప్రక్రియలను ఉపయోగించి సమస్యలను సాధించడం.	– అకరణీయ సంఖ్యల నిర్ణయాన్ని విద్యార్థి తన సొంత మాటలలో భిన్నాల, పూర్ణసంఖ్యల ద్వారా చెప్పగల్గడం.
– ఘాతాంకా మరియు వాటి న్యాయాలు	– అకరణీయ సమూహాలలో సంకలన, వ్యవకలన గుణకార, భాగహారాలను భిన్నాలు మరియు పూర్ణసంఖ్యల ధర్మాలను అనుసరించి చేయగల్గడం – అకరణీయ సంఖ్యలను దశాంశ రూపంలో మార్చగలగడం, దశాంశ భిన్నాల ధర్మాలను తెలుసుకొనుట. – ఘాతాంక న్యాయాలు ఉపయోగించి సమస్యలు సాధించగల్గడం (ఆవర్తన గుణ కారమునకు సంబంధించి)
2. బీజగణితం :	
– బీజీయ సమాసాల ఉత్పాదన – స్థిర, చరరాశులు, గుణకాలు, ఘాతాలు, సజాతి, విజాతి పదాలు, పరిమాణాలు గుర్తించడం.	– రెండు చరరాశులతో కూడిన బీజీయ సమాసాలను, వాటి రూపాలను నిత్యజీవితంలో తెలియని విషయాలను తెలుసుకొనుటలోఅన్వయించగల్గడం.
– వివిధ బహుపదులతో సంకలన, వ్యవకలనాలు.	– సమాసాల సంకలన, వ్యవకలనాలు చేయ గల్గడం.
– సామాన్య సమీకరణాలను, ఏక చరరాశులలో రెండు ప్రక్రియల ద్వారా పద సమస్యలను సాధించడం, పదసమస్యలను ఏర్పరచడం.	– నిత్యజీవిత సంఘటనలు, రేఖీయ, సామాన్య సమీకరణాలతో సాధించగల్గడం.
3. నిష్పత్తి – అనుపాతం :	
– శాతం–భావన	– లాభనష్టాలను శాతం, నిష్పత్తులను సాధారణ వడ్డీని ఏకవస్తు మార్గంలో వివరించగలగడం.
– భిన్నాలు, దశాంశ భిన్నాలను శాతాలుగా, శాతాలను భిన్నాలు, దశాంశ భిన్నాలుగా మార్చడం	– నిష్పత్తి–అనుపాతాలను లాభనష్టాలలో అన్వయించగల్గడం.
– లాభనష్టాలు	– ఏకవస్తుమార్గం ద్వారా బారువడ్డీకి సూత్రాన్ని అన్వయించగల్గడం
– సాధారణ వడ్డీ	– సాధారణ వడ్డీని గణించగల్గడం

4. జ్యామితి :

– రేఖీయ ద్వయం, పూరక, సంపూరక, సదృశ, అభిముఖ కోణాలు	– రేఖీయ ద్వయం, పూరకాల జత, సంపూరకాల జత, సదృశకోణాల జత, అభిముఖ కోణాల జత గుర్తించి ఒక కోణం విలువనిస్తే రెండవ కోణాన్ని తెలుసుకుంటాడు / గణిస్తాడు.
– సమాంతరరేఖ, లక్షణాలు, తిర్యక్ రేఖపై ఏర్పడే ఏర్పడే సదృశ, ఏకాంతర, అంతర, బాహ్యాకోణాలు.	– సమాంతర రేఖల జత, తిర్యగ్రేఖ ఖండిస్తే 8 కోణాల మధ్య సంబంధం సూత్రాలను ఉత్పాదిస్తాడు.

5. త్రిభుజ ధర్మాలు :

– త్రిభుజంలో కోణాల మొత్తం. – త్రిభుజంలో రెండు భుజాల మొత్తం పొడవు మూడవ భుజం కంటే ఎక్కువ.	– కోణాల మొత్తం సూత్రం ద్వారా తెలియని కోణాన్ని తెలుసుకొంటాడు.
– పైథాగరస్ సిద్ధాంతం–అనువర్తనాలు	– భ్రమణ సౌష్టవంలో ఉండే అందాన్ని ఆస్వాదిస్తాడు.
– సౌష్ఠవం, పరావర్తనం, భ్రమణ సౌష్ఠవం, ద్విమితీయ పటాలు.	– పాఠశాల, గ్రామ, తన ఇల్లు మొదలగు పటాలను చదువగల్గుతాడు.
– ద్విమితీయ, త్రిమితీయ పటాలు	– సర్వసమానత్వం నియమాన్ని త్రిభుజాలకి, వృత్తానికి అన్వయిస్తాడు.
– వలరూపం ఉపయోగించి త్రిమితీయ పటాలను ఏర్పరచుట.	– త్రిభుజ సర్వసమానత్వమునకు కనీసం మూడు అంశాలు అందు రెండు విభిన్నమైనవి ఉండాలని గుర్తిస్తాడు.
– పరిసరాల యొక్క పటాలను ఊహిస్తే గీయడం.	– త్రిభుజ నిర్మాణాలకు కనీసం 3 కొలతలు అవసరమని గుర్తిస్తాడు.
– సర్వసమానత్వం – భు.భు.భు., భు.కో.భు., కో.భు.కో., లం.భు.కో., సర్వసమానత్వ ధర్మాలు – దత్తరేఖకు సమాంతర రేఖను గీయడం. – సామాన్య త్రిభుజాలను స్కేలు, కోణమానిని, ఉపయోగించి నిర్మించడం.	

6. క్షేత్ర గణితం :

– చుట్టుకొలత భావన, వృత్తపరిధి	– సరళ సంవృత పటాలకు వేర్వేరు సంవృత

పటాల వైశాల్యాలు గణించగల్గుతాడు.

– π పట్ల అవగాహన

7. వైశాల్యం :	
– దీర్ఘచతురస్రం, త్రిభుజం, సమాంతర చతుర్భుజం, వృత్త వైశాల్యాలు.	– దీర్ఘచతురస్రం, చతురస్రం వైశాల్యాలకు సంబంధించిన సూత్రాలను రాబడతాడు.
8. డాటా హ్యాండ్లింగ్ :	
– వివిధ రకాల దత్తాంశాల సేకరణ	– దత్తాంశ సేకరణకు సంబంధించి వివిధ పదాలను గుర్తిస్తాడు.
– అవర్గీకృత దత్తాంశమునకు సగటు, మధ్య గతం, బాహుళకం.	– దత్తాంశాన్ని కమ్మీ రేఖాచిత్రాల ద్వారా వ్యక్తపరుస్తాడు.

ఆలోచించండి : 6, 8 తరగతులలోని గణిత పాఠ్యాంశాల ద్వారా సాధించవలసిన అభ్యసన సూచికలను రాయండి.

4.2.4. పాఠ్యాంశానికి విద్యాప్రమాణాలు ఆధారంగా అభ్యసన సూచికలు :

తరగతి : 6వ **విషయం : గణితం**

పాఠం : చుట్టుకొలత భావన, వైశాల్యం పరిచయం

సమస్యాసాధన :

1) విద్యార్థి చతురస్ర, దీర్ఘచతురస్ర చుట్టుకొలతల వైశాల్యాల సమస్యలను సాధిస్తాడు.

2) విద్యార్థి పద సమస్యలను సాధిస్తాడు.

కారణాలు చెప్పడం, నిరూపణలు చేయడం :

1) విద్యార్థి ఒక పటం యొక్క చుట్టుకొలత, వైశాల్యాల తేడాను వివరిస్తాడు.

2) విద్యార్థి ఒకే వైశాల్యం కలిగి వేరువేరు చుట్టుకొలతలు కలిగిన చతురస్రాలకు, దీర్ఘచతురస్రాలకు ఉదాహరణలిస్తాడు.

3) ఇచ్చిన పటాలలో ఒకే చుట్టుకొలత కలిగిన పటాలను గుర్తిస్తాడు.

4) విద్యార్థి చుట్టుకొలత, వైశాల్యాలను కనుగొనుటలో దోషాలను గుర్తించి సవరిస్తాడు.

వ్యక్తపరచడం : 1) విద్యార్థి చతురస్ర, దీర్ఘచతురస్రం, చుట్టుకొలత మరియు వైశాల్యాల సూత్రాలను వివరిస్తాడు.

సంధానం చేయడం : 1) వైశాల్యాల ప్రమాణాలు మరియు మధ్య సంబంధాన్ని నెలకొల్పుతాడు.

ప్రాతినిధ్యపరచడం : 1) బహుభుజి వైశాల్యాన్ని షేడ్ చేయుట ద్వారా సూచిస్తాడు.

తరగతి : 7వ **విషయం : గణితం**

పాఠం : భిన్నాలు మరియు అకరణీయ సంఖ్యలు

సమస్యా సాధన :

1) విద్యార్థి భిన్నాలపై చతుర్విధ ప్రక్రియలకు సంబంధించిన సమస్యలను సాధిస్తాడు.

2) విద్యార్థి అకరణీయ సంఖ్యలపై చతుర్విధ (ప్రాథమిక) ప్రక్రియలకు సంబంధించిన పదసమస్యలను సాధిస్తాడు.

3) దశాంశ సంఖ్యలకు సంబంధించి అన్ని ప్రక్రియలపైగల సమస్యలను సాధిస్తాడు.

4) విద్యార్థి ప్రమాణాల పరస్పర మార్పిడి చేస్తాడు.

కారణాలు చెప్పడం, నిరూపణలు చేయడం :

1) విద్యార్థి అకరణీయ సంఖ్యల, భిన్నాల తేడాలు చెప్తాడు.

2) విద్యార్థి అకరణీయ సంఖ్యలలో సాంద్రత ధర్మాన్ని సమర్థిస్తాడు.

వ్యక్తపరచడం :

1) విద్యార్థి అకరణీయ సంఖ్యల అవశ్యకతను వ్యక్తపరచును.

2) విద్యార్థి అకరణీయ సంఖ్యల ధర్మాలను సాధారణ రూపంలో వ్యక్తపరుస్తాడు.

సంధానం చేయడం :

1) విద్యార్థి అకరణీయ సంఖ్యలు, భిన్నాలు, దశాంశ సంఖ్యల మధ్యగల సహ సంబంధ వినియోగాన్ని కనుగొంటాడు.

ప్రాతినిధ్యపరచడం :

1) విద్యార్థి అకరణీయ సంఖ్యలను సంఖ్యారేఖపై సూచిస్తాడు.

ఆలోచించి రాయండి : 6,7,8 తరగతులలో ఒక్కొక్క తరగతి నుంచి ఒక్కొక్క గణిత భావన / అంశాన్ని గుర్తించి, వాటికి విద్యాప్రమాణాలు రాయండి.

4.3 కృత్యాలు – రూపకల్పన, ప్రసరణ :

"Thinking well to be wise ;

Planning well, wiser ;

Doing well wisest and best of all".

- Malcolm Forbes

గణితశాస్త్రం అమూర్త భావనలతో కూడిన శాస్త్రం. దీనిని కేవలం ప్రజ్ఞాపాటవాలు కలిగి వున్నవారే అభ్యసించగలరు. ఇది సామాన్య మానవునికి సాధ్యపడదు. – ఇది ఒకప్పటి మాట.

నేటి సాంకేతిక యుగంలో సామాన్య మానవుడు మొదలుకొని మేధావుల వరకు గణితాన్ని ఉపయోగిస్తున్నారు. ఇప్పటి గణితం అందరిది. అందరూ గణితాన్ని నేర్చుకోగలరు – ఇది ఇప్పటి మాట.

మారుతున్న పరిస్థితులే కాక, మానసికశాస్త్రం, బోధనాభ్యసన రంగాలలో జరుగుతున్న పరిశోధన ఫలితాలు ఉపాధ్యాయుడు అవలంబిస్తున్న బోధనా విధానాలను ప్రభావితం చేస్తున్నాయి. తద్వారా నేడు మునుపటికంటే ఎక్కువమంది పిల్లలు గణితాన్ని సులువుగా నేర్చుకోగలుగుతున్నారు. తమ విధి నిర్వహణలో గణితాన్ని సమర్థవంతంగా ఉపయోగించగలుగుతున్నారు. ఉపాధ్యాయులు గణితబోధనలో ఉపయోగిస్తున్న మెరుగైన బోధనా పద్ధతులు, మెలకువల వల్ల మాత్రమే ఇది సాధ్యపడుతుంది. అంటే ఉపాధ్యాయుడు తరగతి గదిలో గణితాన్ని సమర్థవంతంగా బోధించడానికి విషయ ప్రాధాన్యతతోపాటు విషయాన్ని విద్యార్థులకు ఎలా అందజేయాలి? ఏ విషయాన్ని ఏ విద్యార్థికి ఎలా బోధించాలి? ఏయే అభ్యసనానుభవాలు కల్గించాలి? వాటిని ఎలా కల్పించాలి? అనే అంశం పట్ల ఉపాధ్యాయుడు సంపూర్ణజ్ఞానం, నైపుణ్యాలు కలిగి ఉండాలి.

మరి మన విద్యా విధానాన్ని ఒకసారి జ్ఞాపకం చేసుకున్నట్లయితే పూర్వం గురుకులాలలో విద్య అంతా మౌఖికంగానే

జరిగేది. అంటే గురువు చెప్పే విషయాన్ని శిష్యుడు విని, వల్లె వేసేవాడు. అంటే గురువు చెప్పిందే విద్య, గురువు గ్రంథం, గురువే సర్వస్వం. మొత్తం మీద విద్య ఉపాధ్యాయ కేంద్రం (Teacher Centered)గా ఉండేది. తరువాత పాఠశాల వ్యవస్థ ఏర్పడింది. ముద్రణా యంత్రాలు కనుగొనబడి, పుస్తకాలు అచ్చువేయబడ్డాయి. అంటే విద్య విషయ కేంద్రం (Content Centered) గా మారింది. అంటే విద్యార్థి కంటే బోధించవలసిన విషయానికి ఎక్కువ ప్రాధాన్యత ఉండేది. నేటికాలంలో బోధనాభ్యసన ప్రక్రియలో బోధనాభ్యసన సామాగ్రిని ఉపయోగించడంతోపాటు విద్యార్థి స్వయంగా నేర్చుకోవడానికి ప్రాధాన్యత ఇవ్వబడుతోంది. విద్య శిశుకేంద్రం / అభ్యాసి కేంద్రం (Child Centered / Learned Centered) గా మారింది. అంటే విద్యార్థి అవసరాలు, మానసిక స్థాయి, అభిరుచులకు అనుగుణంగా బోధనాభ్యసన ప్రక్రియ జరుగుతుంది. ఇందుకు అనుగుణంగా నేడు పాఠశాల విద్యావ్యవస్థలో "కృత్యాధార బోధన" ప్రపంచం మొత్తం బోధన – అభ్యసన క్రమానికి నూతన దిశానిర్దేశం చేసింది.

ఇంతకూ కృత్యం అంటే ఏమిటి?

కృత్యబోధన అంటే ఏమిటి?

కృత్యాలను రూపొందించడం ఎలా?

కృత్యాలను ఎలా నిర్వహించాలి? మొదలైన అంశాలను గురించి తెలుసుకుందాం.

4.3.1 కృత్యం అంటే ఏమిటి?

American Heritage Dictionary of English Language (Fourth Edition) ప్రకారం, కృత్యం అంటే వాస్తవమైన అనుభవం ద్వారా అభ్యసనను ఉత్తేజపరచుటకు ఉద్దేశించబడిన విద్యా ప్రక్రియ లేక విధానం.

విద్యాక్షేత్రంలో ఉపయోగించే సందర్భాలను దృష్టిలో పెట్టుకొని కృత్యం అనే భావనను తెలుసుకుందాం. విద్యార్థి స్వాభావికంగా ఏదో చేయాలని, ఏదో తెలుసుకోవాలని, ఏదో సాధించాలని ఆరాటపడటం జరుగుతుంది. ఆ ఆరాటాన్ని విద్యార్థి పలురకాలైన పనుల ద్వారా వ్యక్తం చేస్తాడు. ఉదాహరణకు వినడం, చూడటం, మాట్లాడటం, ఆడటం, పరిశీలించడం, లెక్కించడం, ప్రయోగాలు చేయడం, రాయడం, సేకరించడం, సమస్య సాధన చేయడం, బొమ్మలు వేయడం, ఎగరడం, ఆలోచించడం, క్షేత్ర పర్యటన, పాటలు పాడటం, నాట్యం చేయడం మొదలైనవి. వీటినే కృత్యాలు అంటాం. దీనినిబట్టి కృత్యం అంటే సామాజిక పరిసరాలలో ప్రయోజన పూర్వకంగా భౌతిక, మానసిక శక్తులను ఉపయోగించి చేసే పని.

4.3.2 కృత్యాలు – రకాలు :

పైన పేర్కొన్న కృత్యాలలో కొన్ని భౌతికపరమైనవి, కొన్ని మానసిక లేక బౌద్ధికపరమైనవి, కొన్ని ప్రత్యక్ష అనుభవాలకు సంబంధించినవి, కొన్ని సాంకేతిక అనుభవాలకు సంబంధించినవి, కొన్ని మౌఖికాంశాలు, కొన్ని మౌఖికేతర అంశాలకు సంబంధించినవి. ఇలా వివిధ రకాలుగా వర్గీకరించవచ్చు.

భౌతిక అంశాలు : ఆటలాడటం, మాట్లాడటం, కొలవడం మొదలైనవి.

బౌద్ధిక అంశాలు : వర్గీకరించడం, ఆలోచించడం, విశ్లేషించడం, సమస్యను సాధించడం.

ప్రత్యక్ష అనుభవాలు : ప్రయోగం, క్షేత్రపర్యటన, ప్రదర్శనలు, పరిశీలించడం, అబాకస్‌తో లెక్కించడం, స్కేలుతో కొలవడం, డామినోలతో ఆడటం మొదలైనవి.

మౌఖిక అంశాలు : మాట్లాడటం, పాటలు పాడటం, చదవడం, చెప్పడం మొదలైనవి.

మౌఖికేతర అంశాలు : బొమ్మలు వేయడం, రాయడం, నాట్యం చేయడం మొదలైనవి.

ఇటువంటి రకరకాల కృత్యాలలో విద్యార్థులు చురుకుగా పాల్గొనేటట్లు చేసి, అభ్యసనానుభవాలు కలిగించి బోధించడాన్నే కృత్యాధార బోధన అంటారు.

అభ్యసనలో పిల్లలు చురుకుగా పాల్గొనేటట్లు ఉపాధ్యాయుడు కృత్యాలను తరగతి గదిలో గాని, తరగతి వెలుపల గాని తన బోధనలో భాగంగా చేస్తే, ఆ బోధనను కృత్యాధార బోధన అంటారు.

4.3.3 బోధన – అభ్యసన ప్రక్రియలో కృత్యాల ఆవశ్యకత :

ఇంతకూ బోధన – అభ్యసన ప్రక్రియలో కృత్యాల అవసరమేమిటని లేదా కృత్యాధార బోధన ఎందుకు? / అవసరమేమిటి? అనే ప్రశ్నలకు సమాధానం గురించి ఆలోచిద్దాం.

మనందరకూ పరిచయమైన చైనా సామెత ఉంది. అదేమిటంటే–

"నేను ఏది వింటానో, అది మరిచిపోతాను.

నేను ఏది చూస్తానో, అది గుర్తుంటుంది.

నేను ఏ పని చేస్తానో, అది అవగాహన అవుతుంది."

అదే విధంగా ఒక పరిశోధన ఫలితాన్ని చూద్దాం.

విన్నదానిలో 20%

చూసినదానిలో 30%

వింటూ చూస్తే 50%

చెప్పిందానిలో 80%

చెప్పి, చేసిందానిలో 90% మనకు గుర్తుంటుంది.

ఈ ప్రాచీన చైనా సామెత, పరిశోధన ఫలితం రెండూ కూడా చెప్పే సత్యం ఒక్కటే – పిల్లలు పని చేయడం ద్వారా సంబంధిత విషయాన్ని ఎక్కువగా అవగాహన చేసుకుంటారు. అది ఎక్కువ కాలం గుర్తుంటుంది.

ఈ సందర్భంగా మనం ఒక కథను కూడా గుర్తు చేసుకుందాం.

ఒక ఊరిలో రామయ్య అనే వ్యక్తి "ఈత శిక్షణా కేంద్రాన్ని" ఏర్పాటు చేసాడు. అతని దగ్గరికి పదిమంది పిల్లలు ఈత నేర్చుకొనేందుకు చేరారు. ప్రతిరోజు ఉదయం, సాయంకాలం పిల్లలకు "ఈతకొట్టడం"పై తరగతి గది పాఠాలు చెప్పాడు. 15 రోజుల తరువాత వారికి పరీక్షపెట్టి, అందరూ సఫలీకృతులైనట్లుగా సర్టిఫికేట్లు ఇవ్వడం జరిగింది. మరుసటి రోజు కొలనులో ఈతకొట్టడంపై ప్రదర్శన ఇవ్వాలి. పదిమంది పిల్లలు కొలనులో దూకారు. ఒక్కరు కూడా ఈతకొట్టలేక అందరు మునిగిపోయారు. అప్పుడు ఈత తెలిసినవాళ్ళు కొలనులో దూకి, వాళ్ళను కాపాడారు. ఈ కథ ద్వారా మనకు తెలిసేదేమిటి? పిల్లలు ఎందుకు ఈతకొట్ట లేకపోయారు? వాళ్ళకు ఈతకొట్టడంలో శిక్షణ లేనందువల్లనే అట్లా జరిగింది. కాబట్టి కృత్యాల ద్వారానే పిల్లలకు విషయాన్ని గురించిన పూర్తి అవగాహన ఏర్పడుతుందని మనం గ్రహించవచ్చు. అందుకే కృత్యాలకు బోధన – అభ్యసన కార్యక్రమంలో చాలా ప్రాముఖ్యత ఉంది. అంతే కాకుండా ప్రాథమిక, ప్రాథమికోన్నత స్థాయి పిల్లల్లో అభ్యసన సహజరూపంలో ఉండాలి. వారిలో

అవధానశక్తి, ఏకాగ్రత చాలా తక్కువ స్థాయిలో ఉంటాయి. వారు భౌతికంగా, మానసికంగా చాలా చురుకుగా ఉంటారు. చపలచిత్తులు, ఎప్పుడూ ఒకే దగ్గర కూర్చోరు, ఒకే పనిని ఎక్కువ సమయం చేయరు, విషయాన్ని చూస్తేగాని నమ్మరు. తోటి పిల్లలతో పని చేయటానికి ఇష్టపడతారు. ఇలాంటి కొన్ని అవసరాలకు పాఠశాల స్థాయి విద్యలో ప్రత్యేకంగా ప్రాథమిక, ప్రాథమికోన్నత స్థాయిలలో తాత్త్వికచింతన ప్రకారంగా, మనోవైజ్ఞానికంగా, సాంఘికపరంగా ఏవిధంగా చూసినా కృత్యాలు ఎంతైనా అవసరం. ఎందుకంటే బోధన – అభ్యసన ప్రక్రియలో కృత్యాలు నిర్వహించటం వలన ఈ కింది ప్రయోజనాలున్నాయి.

- కృత్యాల వల్ల ఆచరణ ద్వారా అభ్యసనం / పనిచేయటం ద్వారా నేర్చుకోవటం (Learning by doing) జరుగుతుంది.
- పిల్లలు చురుకుగా పాల్గొంటారు.
- వైయక్తిక బేధాలకు అనుగుణంగా బోధన – అభ్యసనకు అవకాశం ఉంటుంది.
- విద్యార్థులలో సహకార స్వభావం అలవడుతుంది.
- విద్యార్థులలో నాయకత్వ లక్షణాలు అభివృద్ధి చెందుతాయి.
- పరిసరాల ఆధారంగా, గతానుభవాల ఆధారంగా అభ్యసన జరుగుతుంది.
- విలువలు, వైఖరులు, క్రమశిక్షణ అలవడుతాయి.
- విద్యార్థులలో స్వయం అభ్యసన అలవడుతుంది.
- యాంత్రికమైన బోధన – అభ్యసనకు స్వస్తి పలుకుతుంది.
- విద్యార్థుల అంతర్గత శక్తులు వినియోగించబడతాయి.
- అంశాల అభ్యసన, విభాగాలుగా కాకుండా ఏకీకృతంగా జరుగుతుంది.
- భావ వ్యక్తీకరణ, పరిశీలనా శక్తి పెరుగుతాయి.
- ఉపాధ్యాయుడు, విద్యార్థుల మధ్య ఉత్తమ సంబంధం ఏర్పడుతుంది.
- స్వేచ్ఛగా, ఆనందంగా అభ్యసనం జరుగుతుంది.
- విద్యార్థులలో సృజనాత్మకత పెంపొందించడం జరుగుతుంది.
- సహజ వాతావరణంలో అభ్యసనం జరుగుతుంది.
- విద్యార్థులలో చదువు మీద ఆసక్తి పెంపొందించబడుతుంది.
- విద్యార్థులలో ఆలోచనాశక్తి పెంపొందించబడుతుంది.
- విద్యార్థులలో ఒకరినొకరు సంప్రదించుకునే శక్తి పెంపొందించబడుతుంది.
- అభ్యసించిన విషయాలు ఎక్కువకాలం గుర్తుంటాయి.

4.3.4 కృత్యాల లక్షణాలు :

మరి బోధన – అభ్యసన కార్యక్రమం విజయవంతమై, అభ్యసన ఫలవంతమవ్వాలంటే "మనం విద్యార్థులకు ఇచ్చే కృత్యాలు ఎట్లా ఉండాలి?"

అందుకుగాను కృత్యాలు –

- విద్యార్థుల స్థాయికి తగినవిగా ఉండాలి.
- సహజ అభ్యసన అనుభవాలు కల్పించేటట్లు ఉండాలి.
- జ్ఞానేంద్రియాలు వికసింపచేసేవిగా ఉండాలి.
- ఆసక్తి కలిగించే విధంగా ఆటలు, పాటలు, కథలు, పజిల్స్ ఉండాలి.
- మనం అనుకొన్న సామర్థ్యాన్ని పిల్లల్లో పెంపొందింపజేసేవిగా ఉండాలి.
- ఆలోచింపచేసేవిగా, తపన, జిజ్ఞాస కలిగించేవిగా ఉండాలి.
- ప్రయోజనం కలిగినగా ఉండాలి.
- తరగతికి అనువైనవిగా, సాధ్యమయ్యేవిగా ఉండాలి.
- విద్యార్థులు మళ్ళీమళ్ళీ చేసుకొనేందుకు వీలుగా ఉండాలి.
- ముగింపు లేనివిగా, నిరంతరం కొనసాగేవిగా ఉండాలి.
- విద్యార్థులలోని అంతర్గత సామర్థ్యాలను వెలికితీసేవిగా ఉండాలి.
- స్వయం అభ్యసనను ప్రోత్సహించేవిగా ఉండాలి.
- సృజనాత్మకతను పెంపొందించేవిగా ఉండాలి.
- పిల్లలు సవాళ్ళను ఎదుర్కొనేలాగ ఉండాలి.
- పిల్లల్లో ఉత్తేజాన్ని కలిగించేవిగా ఉండాలి.
- మానసిక ఉల్లాసం కలిగించేవిగా ఉండాలి.

4.3.5 కృత్యాల రూపకల్పన :

కృత్యాలను రూపకల్పన చేసేటపుడు ఉపాధ్యాయుడు ఈక్రింది విషయాలను దృష్టిలో ఉంచుకోవాలి.

- బోధించవలసిన అంశం / భావనను బట్టి సాధించవలసిన సామర్థ్యాలు / విద్యా ప్రమాణాలను ముందుగా నిర్ణయించుకోవాలి.
- విద్యార్థుల స్థాయిని బట్టి రకరకాల (అంటే సాధారణ స్థాయి / వెనుకబడిన / ప్రతిభావంతులకు) కృత్యాలను రూపొందించాలి.
- సంబంధిత కృత్యం వ్యక్తిగతంగా / జట్లలో పూర్తి తరగతికి నిర్వహించవలసిందో ముందుగానే నిర్ణయించుకోవాలి.
- భావన అవగాహనకు అవసరమైన పూర్వజ్ఞానం ఏమిటో నిర్ధారించుకోవాలి.
- కృత్య నిర్వహణకు కావలసిన సామాగ్రిని ఎంపికచేసి, తయారు చేసుకోవాలి / సేకరించాలి.
- కృత్యంలో చేయవలసిన పనులు, కృత్య నిర్వహణ విధానాలను నిర్ణయించుకోవాలి.
- కృత్య నిర్వహణకు ఎంత సమయం అవసరమో కూడా సుమారుగా తెలియజేయాలి.
- కృత్య నిర్వహణ తర్వాత చేయవలసిన మూల్యాంకన అంశాలను కూడా తయారుచేసుకోవాలి.
- కృత్య నిర్వహణలో భాగమైన కృత్య పత్రాలను రూపొందించి, అవసరమైనన్ని ప్రతులను తయారుచేసుకోవాలి.
- ఆ కృత్యానికి సంబంధించిన కృత్యకోశం తయారుచేసుకోవాలి.

కృత్యపత్రం (Activity Sheet) :

ప్రతీ కృత్యాన్ని ఎట్లా నిర్వహించాలో సూచించే విధంగా కృత్యపత్రాన్ని తయారుచేసుకోవాలి. ఇది ముఖ్యంగా విద్యార్థులతో కృత్యాలు చేయించడానికి ఉపయోగపడతాయి. ఉపాధ్యాయుడు ముందుగానే కృత్యపత్రాన్ని రచించి, తయారుచేసుకోవాలి. ఉదాహరణకు ఈ కింది కృత్యపత్రాన్ని గమనించండి.

కృత్యపత్రం – 1 :

తరగతి :

పాఠం : వైశాల్యాలు – చుట్టుకొలత

అంశం / భావన : వైశాల్యాలు – చుట్టుకొలత

ఆశించిన సామర్థ్యాలు / విద్యా ప్రమాణాలు : వైశాల్యాలు సమానంగా ఉన్న దీర్ఘచతురస్రాల చుట్టుకొలతలు వేరువేరుగా ఉంటాయని గ్రహిస్తాడు.

కావలసిన సామగ్రి : గళ్ళ కాగితం / జియోబోర్డు, రబ్బరు బ్యాండులు

సూచనలు / కృత్యం చేసే విధానం : గళ్ళ కాగితం / జియో బోర్డుపై 12×2, 8×3, 6×4 ప్రమాణాల కొలతలు ఉన్న దీర్ఘచతురస్రాలు నిర్మించండి.

– క్రింది పట్టికను పూరించండి.

క్ర.స.	పొడవు (యూనిట్లలో)	వెడల్పు (యూనిట్లలో)	చుట్టుకొలత (యూనిట్లలో)	వైశాల్యం (చ.యూనిట్లలో)
1	12	2		
2	8	3		
3	6	4		

– పై పట్టికను పరిశీలించండి.

మూల్యాంకనం :

- ప్రతి పటం చుట్టుకొలత, వైశాల్యాలను పోల్చండి.
- మీరేం గ్రహించారు?

కృత్యకోశం (Activity Pack) :

కృత్యపత్రం, ఆ కృత్యనిర్వహణకు కావలసిన వస్తుసామాగ్రిని ఒక సంచిలో ఉంచుకోవాలి. ఇట్లాంటి సంచిని కృత్యకోశం అంటాం. కృత్యాధార బోధన చేయడానికి అనుకూలంగా ఉపాధ్యాయుడు ఒక కృత్యకోశాన్ని అభివృద్ధి చేసుకోవాలి.

ఆలోచించండి : 6,7,8 తరగతులలో ఏదైనా ఒక గణిత పాఠ్యాంశానికి కృత్యకోశాన్ని తయారుచేయండి.

4.3.6 కృత్యాల నిర్వహణ / ప్రసరణ :

తరగతి గదిలో సమర్థవంతంగా కృత్యాలను నిర్వహించడానికి / ప్రసరణ చేయడానికి కింది అంశాలను దృష్టిలో

ఉంచుకోవాలి.

1. అభ్యసన ప్రక్రియలో పిల్లలు పాల్గొనటం వల్ల బాగా నేర్చుకుంటారు. తరగతి బయట పిల్లలు ఆనందంగా ఆడుతూ, పాడుతూ, వారికిష్టమైన రీతిలో స్వేచ్ఛగా గడుపుతారు. ఆ వాతావరణంలో చాలా విషయాలు వారికి తెలియకుండానే నేర్చుకుంటారు. ఈ అభ్యసనం సహజంగా జరుగుతుంది. దీనిద్వారా పిల్లలు వారిలోని అంతర్గత శక్తులను వినియోగించుకుంటారు.

తరగతిలో కూడా పిల్లలు అంతర్గత శక్తుల వినియోగానికి సహజ వాతావరణాన్ని కల్పించాలి. అందుకుగాను ఉపాధ్యాయుడు పిల్లల అభ్యసనకు దోహదపడే విధంగా, ఒక ప్రణాళికాబద్ధంగా, అర్థవంతంగా కృత్యాలను నిర్వహించాలి. ఇందుకుగాను విద్యార్థుల పూర్వ అనుభవాలు, వనరుల లభ్యత, బోధించవలసిన అంశం, ఎందుకు బోధిస్తున్నాం మొదలైన అంశాలు దృష్టిలో ఉంచుకుని విద్యార్థులకు పలురకాలైన అభ్యసన ప్రక్రియలను రూపొందించాలి. అయితే ఈ అభ్యసన దేని గురించి అనేది ఉపాధ్యాయులకు స్పష్టమైన అవగాహన ఉండాలి. కొత్త భావనలను నేర్చుకోవడానికా, నేర్చుకొన్న భానవలను విస్తృత పరచుకోవడానికా, లేదా ఆ భావనలను మరింత గట్టిపరచుకోవడానికా, అభ్యసించిన జ్ఞానం, నైపుణ్యాలు, వాస్తవిక పరిస్థితులలో అనుప్రయుక్తం చేయడానికా, ఈ ప్రశ్నలకు సమాధానాలను దృష్టిలో ఉంచుకొని ఉపాధ్యాయుడు కృత్యాలను రూపొందించి, నిర్వహించాలి.

2. కృత్యాలు నిర్వహించినప్పుడు అవి పిల్లలకు వ్యక్తిగతంగా ఇవ్వాలా? జట్లలో ఇవ్వాలా? తరగతి మొత్తానికి ఇవ్వాలా? అనేది విద్యార్థులు అభ్యసించవలసిన అంశం, చేయవలసిన పనినిబట్టి ఉంటుంది.

వ్యక్తిగత కృత్యాలు – చిత్రాలు, గ్రాఫులు గీయడం, సమస్యలు చేయడం, గణిత సాహిత్యం చదవడం వంటివి.

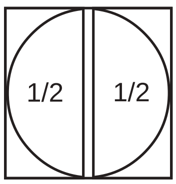
ఉదాహరణకు : కృత్యం

తరగతి	:	6
అంశం	:	సమాన భిన్నాలు
లక్ష్యం / సామర్థ్యం	:	భిన్నాల చట్రం సహాయంతో సమాన భిన్నాల భావన పొందుట
సామగ్రి	:	భిన్నాల చట్రం

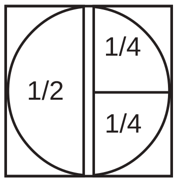
కృత్యం చేసే విధానం :

కింది విధంగా తయారుచేసిన వృత్తాకార చట్రంలో పట్టేటట్లు 1/2 ముక్కలు 2, 1/3 ముక్కలు 3, 1/4 ముక్కలు 4... ఇలా 1/10 పట్టేటట్లు పిల్లలకు ఇచ్చి, కింది పరిశీలనలు చేయమనండి.

i. వృత్తాకార చక్రంలో రెండు 1/2 భాగాలు ఉంచండి.

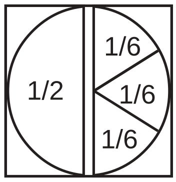


ii. ఒక 1/2 భాగంపై ఎన్ని 1/4 భాగాలను సరిపోయేటట్లు ఉంచగలమో చేసి చూడండి.



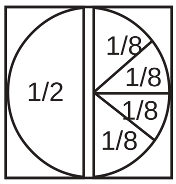
$$\frac{1}{2} = 2X\frac{1}{4} = \frac{2}{4}$$

iii. 1/2 భాగంపై ఎన్ని 1/6 భాగాలు సరిపోయేటట్లు ఉంచగలమో చేసి చూడండి.

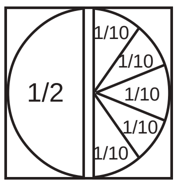


$$\frac{1}{2} = 3X\frac{1}{6} = \frac{3}{6}$$

iv. 1/2 భాగంపై ఎన్ని 1/8 భాగాలు, 1/10 భాగాలు సరిపోయేటట్లు ఉంచగలం? చేసి చూడండి.



$$\frac{1}{2} = [\ ]X\frac{1}{8} = ...$$



$$\frac{1}{2} = [\ ]X\frac{1}{10} = ...$$

పై కృత్యాల నుంచి ఏమి గమనించారు?

i. 1/2 కు సమానంగా ఉన్న భిన్నాలు ....

ii. 1/2కు సమానంగా పైన తెలిపినవి గాక ఇంకా ఏమైనా రాయవచ్చా?

అభ్యసన ఫలితం :

సమాన భిన్నాల భావనను భిన్నాల చట్రం సహాయంతో పొందుతారు.

జట్టు కృత్యాలు :

కొన్ని కృత్యాలలో విద్యార్థులు కలసి పనిచేసే అవసరం ఉంటుంది. అటువంటి పరిస్థితులలో ఒక్కొక్కరూ ఒక్కొక్క పనిని చేయడమో, కలసి చర్చించడమో, ఆలోచించడమో జరుగుతుంది. ఇలాంటి సందర్భాలలో జట్టు కృత్యాలు నిర్వహించడం జరుగుతుంది. తగినన్ని వనరులు లేకపోయినా, ప్రతిఒక్కరి కృత్యాన్ని ఉపాధ్యాయుడు చూడలేని సమయంలోను జట్టుకృత్యాలు నిర్వహించడం జరుగుతుంది. జట్టుకృత్యాలు ఇస్తున్నప్పుడు జట్టులోని సభ్యులను తరచుగా మార్పు చేస్తూ ఉండాలి. ఒకే జట్టులో సభ్యులుగా పిల్లలను ఎక్కువ కాలం ఉంచకూడదు. జట్టులోని ప్రతి

విద్యార్థి కృత్యంలో పాల్గొనేందుకు, మాట్లాడేందుకు అవకాశం ఇవ్వాలి.

పూర్తి తరగతి పని :

చేయవలసిన పనిలో ఎక్కువమంది పాల్గొనవలసిన అవసరం ఉన్నప్పుడు, వేరే జట్లలో గాని, వ్యక్తిగతంగా గాని నిర్వహించిన పనిని తరగతి మొత్తానికి తెలియజేసేటప్పుడు లేదా ఏదోఒక విషయంపై మేధోమథనం జరిపినప్పుడు తరగతి మొత్తంగా కృత్యాన్ని చేయడం జరుగుతుంది.

3) పిల్లలందరు అన్ని విషయాలూ ఒకేలాగ నేర్చుకోలేరు. అందరూ ఒకే వేగంతో నేర్చుకోలేరు. కొందరు సాధారణ వేగంతో నేర్చుకుంటారు. మరికొందరు మెల్లగా నేర్చుకుంటారు. ఇలా ప్రతి తరగతిలో పిల్లల అభ్యసన వేగంలో తేడాలుండడం సహజం. ఇటువంటి సందర్భాలలో పిల్లల సామర్థ్యాలు, వారి అభిరుచులు, వారి కుటుంబం, సాంఘిక, ఆర్థిక నేపథ్యాన్ని దృష్టిలో ఉంచుకొని కృత్యాల రూపకల్పన చేసి, నిర్వహించాలి. ప్రత్యేకంగా వ్యక్తిగత పనులు ఇచ్చేటప్పుడు ఈ అంశాలను దృష్టిలో పెట్టుకోవాలి. జట్టు కృత్యాలు ఇచ్చేటప్పుడు సాధారణంగా విజాతి సమూహాలుగా చేయాలి. అంటే జట్టులో వేరువేరు సామర్థ్యాలు ఉన్న పిల్లలను సభ్యులుగా చేయాలి. అభ్యసనలో సహాయం అవసరమైన (వెనుకబడిన) లేదా సాధారణ స్థాయిలో ఉన్న పిల్లలు తోటి విద్యార్థుల సహకారంతో వారి లోటుపాట్లను అధిగమించడానికి ఇలా చేయడం దోహదం చేస్తుంది. ఎందువల్లనంటే అభ్యసన పిల్లలు – బోధనాభ్యసన సామగ్రితో జరిగే పరస్పర ప్రతిచర్య (Interaction) తో పాటు పిల్లల మధ్య జరిగే ప్రతిచర్య ద్వారా జరిగే అభ్యసన చాలా శక్తివంతమైంది.

కొన్నిసార్లు అసాధారణ, క్లిష్టమైన సమస్యలను సాధన చేయడానికి తెలివైన విద్యార్థులకు యివ్వవలసిన అవసరం ఉంటుంది. అటువంటి సందర్భాలలో వీరిని ఒక సమూహంగా చేసి పని అప్పగించడం జరుగుతుంది. ఇటువంటి సమూహాలను సజాతి సమూహాలు అంటారు. అవసరమైన సందర్భాలలో ఇటువంటి సమూహాలను మాత్రమే ఏర్పాటు చేయడం జరగాలి.

ఏదిఏమైనా విద్యార్థులకు వారివారి స్థాయినిబట్టి, వారి అభ్యసన వేగాన్నిబట్టి తగిన అభ్యసన అనుభవాలు కల్పించడం ఉపాధ్యాయుల బాధ్యత.

అభ్యసనలో సహాయం అవసరమైన విద్యార్థులకు యివ్వవలసిన కృత్యాలు :

1. సంఖ్యల స్థాన విలువలపై అవగాహన బాగుగా ఉంటే పూసల చట్రం ఉపయోగించడం.
2. దశాంశ భిన్నాల అవగాహన లోపం ఉంటే గ్రిడ్ పేపర్‌పై లేదా పూసల చట్రంతో కృత్యాలు చేయడం.

1. మాయా చదరాలు ఇవ్వడం
2. కఠినమైన సమస్యలు ఇవ్వడం
3. సమస్యలను తామే రూపొందించుకునే అవకాశం
4. సమస్యసాధనను ప్రత్యామ్నాయ పద్ధతిలో సాధించడం
5. మనోరంజక అంశాలపై, స్థానిక పరిసరాలకు అనుగుణంగా కృత్యాలు రూపొందించి, నిర్వహించాలి.

చర్చించండి – రాయండి : ప్రాథమికోన్నత స్థాయి, పాఠ్యాంశాలను దృష్టిలో ఉంచుకొని 1) మనోరంజక అంశాలపై మరియు, 2) స్థానిక పరిసరాలకు అనుగుణంగా కృత్యాలు రూపొందించండి.

ఆలోచించండి – రాయండి : 6,7,8 తరగతులలో ఒక్కొక్క తరగతి నుండి ఒక్కొక్క గణిత పాఠ్యాంశాన్ని ఎంపికచేసి,

ఆ పాఠ్యాంశ బోధన, అభ్యసన ప్రక్రియలో నిర్వహించదగు 1) వ్యక్తిగత, 2) జట్టు, 3) పూర్తి తరగతి కృత్యాలను రూపొందించండి.

4.4 గణిత నమూనా విధానం :

There is no branch of mathematics, however abstract, which may not some day be applied to phenomena of the real world. **- Nicolai Lobacheusky**

మన నిజజీవితంలోని కొన్ని అద్భుతమైన విషయాలు మనల్ని ఆశ్చర్యచకితుల్ని చేస్తాయి. గణిత మేధావులుగానీ, శాస్త్రవేత్తలు గాని ఇంత కచ్చితంగా ఈ విలువలను ఎలా అంచనా వేయగలుగుతున్నారా అని మనం నివ్వెరపోతాం. అలాంటి ఉదాహరణలు కొన్నింటిని పరిశీలిద్దాం.

1. సూర్యుని ఉపరితలంపై ఉష్ణోగ్రత దాదాపు 6000^0సె. ఉంటుంది.
2. మానవుని గుండె ప్రతీ నిమిషానికి ఒకసారి 5 నుండి 6 లీటర్లు రక్తాన్ని శుద్ధి చేస్తుంది.
3. సూర్యునికి, భూమికి మధ్యగల దూరం 1,49,00,000 కి.మీ.

పైన పేర్కొన్న ఉదాహరణలలో ఏ శాస్త్రవేత్త కూడా సూర్యుని పైకి వెళ్ళి అక్కడ ఉష్ణోగ్రతలు కొలవలేదు. అదేవిధంగా మనిషి గుండెను బయటకు తీసి అది ఎన్ని లీటర్ల రక్తాన్ని శుద్ధి చేస్తుందో పరిశీలించలేదు.

మరి ఇలాంటి ప్రశ్నలకు ఇంత ఖచ్చితమైన సమాధానాలను ఎలా చెప్పగలిగారు?

"గణిత నమూనా విధానం" (Mathematics Modelling) ద్వారా ఊహకు అందని ఇలాంటి ప్రశ్నలకు కచ్చితమైన పరిష్కారాన్ని కనుక్కోగల్గుతాం.

4.4.1 పిల్లలు గణనలు ఎలా చేస్తారు?

గణిత నమూనా విధానం గురించి తెలుసుకోవడానికి ముందుగా పిల్లలు గణనలు ఎలా చేస్తారో తెలుసుకుందాం.

ఉదాహరణకు ఒక వస్తువు ధర రూ.25 అయితే 16 వస్తువుల ధరను కనుక్కోండి.

ముఖ్యంగా గణనలు చేయడానికి సంకలన, వ్యవకలన, గుణకార, భాగహారాలను ఉపయోగిస్తాం.

పై సమస్యను సాధించడానికి 16×25 విలువ కనుక్కోవాలి / గణన చేయాలి.

ఈ గణనను కింద చూపిన మూడు విధాలుగా చేయవచ్చు.

1. మొదటిది ఆల్గారిథమ్ (Algorithm) అంటే సోపానాలు వారీగా సమస్యకు పరిష్కారాన్ని పొందడం. దీనిలో కావలసిన ఫలితాన్ని పొందుతాము.

మనం తీసుకున్న సమస్యలోని గణనను కింది విధంగా చేస్తాం.

ఒక వస్తువు ధర = రూ.25

16 వస్తువుల ధర = ఒక వస్తువు ధర × వస్తువుల సంఖ్య

= 25 × 16 = 400

25 × 16ను కింది విధంగా చేయవచ్చు.

16 × 25 = 16

× 25

....

320

80

....

400

....

2. రెండవది అడకోరిథమ్ (Adhocorithm). వయోజనులు తమ నిజజీవితంలో ఎదురయ్యే సమస్యల సాధనలో ఉపయోగించే ఎన్నో అనియత పద్ధతుల్లో ఇది ఒకటి.

ఉదాహరణకు మన సమస్య 16×25లో గణన కోసం,

అ. నాలుగు 25లు 100. కాబట్టి పదహారు 25లు 400.

ఆ. పది 25లు 250, నాలుగు 25లు 100, రెండు 25లు 50. వాటి మొత్తం 400.

ఇ. ఆవర్తన రెట్టింపు – రెండు 25లు 50, నాలుగు 25లు 100, ఎనిమిది 25లు 200, పదహారు 25లు 400.

3. మూడవది కాలిక్యులేటర్ (Calculator) ఉపయోగించి గణనలు చేయడం.

కాలిక్యులేటర్ ఉపయోగించి 16×25 = 400 అని చెప్పటం.

నిజానికి నిజజీవిత సమస్యలు సాధించడంలో కాలిక్యులేటర్ ఉపయోగించడం అనేది ప్రాథమిక గణిత ప్రక్రియ అయినటువంటి "గణిత నమూనా విధానం"లో ఇమిడియున్నది.

4.4.2 గణిత నమూనా విధానం :

గణిత నమూనాలు అంటే ఏమిటి? గణిత నమూనా విధానం అంటే ఏమిటి? గణిత నమూనా విధానంలోని సోపానాలు ఏవి? అనే విషయాలు గురించి ఆలోచిద్దాం.

గణిత నమూనా అంటే ఏమిటి?

సాధారణ వడ్డీ కనుగొనడానికి ఏ సూత్రం వాడతామో గుర్తుందా?

సాధారణ వడ్డీ **(I)** = $\frac{PTR}{100}$ ఈ సూత్రం లేదా సమీకరణం అనేది వడ్డీ **(I)** , అసలు **(P)**, కాలం **(T)** మరియు వడ్డీరేటు **(R)** ల మధ్య సంబంధాన్ని సూచిస్తుంది.

అలాగే త్రిభుజ వైశాల్యం = 1/2 × భూమి × ఎత్తు

ఈ సూత్రాలను మనం గణిత నమూనాలకు ఉదాహరణలుగా చెప్పుకోవచ్చు. కాబట్టి,

నిజజీవిత సందర్భాలలో మనం ఉపయోగించే గణిత వివరణలు లేదా గణిత సూత్రాలే "గణిత నమూనాలు".

ఆలోచించండి – రాయండి : మీకు తెలిసిన మరికొన్ని గణిత నమూనా విధానాలను రాయండి.

గణిత నమూనా విధానం అంటే ఏమిటి?

మన దైనందిన జీవితంలో కొన్ని సందర్భాలలో సమస్యలను ఎదుర్కోవాల్సి వస్తుంది. వాటిని పరిష్కరించుకోవడానికి మనం ఆ సమస్యకు సరిపడు గణిత సమీకరణలను రాసుకొని వాని సాధనను కనుగొంటాం. తరువాతి దశలో మనం కనుగొన్న సాధన, మన సమస్యకు పరిష్కారంగా సరిపోతుందో లేదో అని విశ్లేషించుకుంటాం.

ఈ విధంగా ఒక గణిత నమూనాను నిర్మించుకొని, దాని ఆధారంగా సమస్యను సాధించే విధానాన్నే "గణిత నమూనా విధానం"గా వ్యవహరిస్తాం.

గణిత నమూనా విధానం :

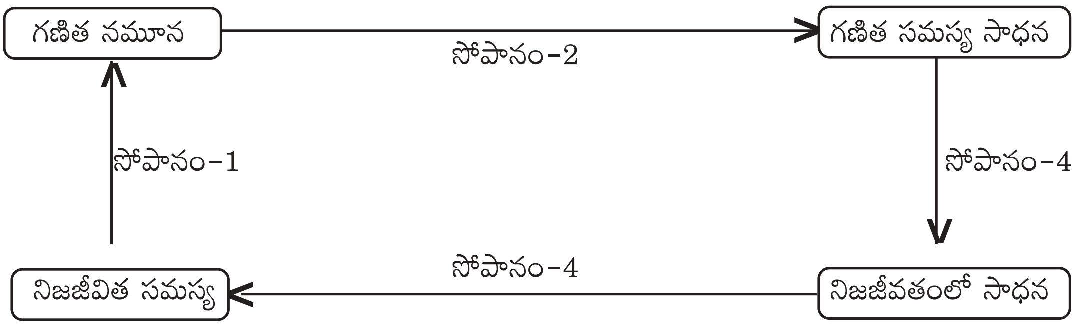
ఉదాహరణకు ఒక పెట్టెలో 18 పెన్సిళ్ళు పట్టును. అయితే 150 పెన్సిళ్ళు పట్టుటకు ఎన్ని పెట్టెలు కావాలి?

ఈ సమస్య సాధనకు 150ను 18తో భాగించాలి.

$150 \div 18$ విలువను గణన చేయాలి.

కాలిక్యులేటర్‌ని ఉపయోగించి ఈ విలువను కనుగొంటే, 8.3333...... వస్తుంది. అంటే 8 పెట్టెల కంటే కొంత భాగం ఎక్కువ కావాలి అని అర్థం. అంటే వాస్తవంగా 9 పెట్టెలు కావాలి. ఒకవేళ 8 పెట్టెలే ఉంటే, ఆ పెట్టెలో పట్టకుండా కొన్ని పెన్సిళ్ళు మిగిలిపోతాయి. అయినప్పటికీ కాలిక్యులేటర్ ద్వారా పొందిన సమాధానం ఎన్ని పెట్టెలు కావాలనే విషయాన్ని నేరుగా తెలియపరచలేదు.

ఈ కింద చెప్పబడిన 4 సోపానాల ద్వారా గణిత నమూనా విధానాన్ని అర్థం చేసుకోవచ్చు.



డెరక్ హేలాక్ సూచించిన నమూనా

పై ప్రక్రియలో, 1వ సోపానంలో నిజజీవిత సమస్య గణిత నమూనాగా మార్చబడుతుంది. కాబట్టి ఈ ఉదాహరణలో ఇచ్చిన పెన్సిళ్ళు పట్టుటకు కావలసిన పెట్టెలు కనుగొనడం అనే నిజజీవిత సమస్య $150 \div 18$ అనే గణిత నమూనాగా మార్చబడింది. 2వ సోపానంతో $150 \div 18$కు సంబంధించిన గణనలు చేసి, సమస్య సాధనను 8.333....గా కనుగొనడం జరిగింది. మూడవ సోపానంలో ఇవ్వబడిన పెన్సిళ్ళు పట్టుటకు 8 పెట్టెలు, మరొక పెట్టెలో కొంత భాగం కావలెనని వ్యాఖ్యానించడం జరిగింది. సమస్యా సాధనలో వచ్చిన ఫలితం నిజజీవితానికి సరిపోతుందో లేదో సరిచూసుకుంటాడు. నాల్గవ సోపానంలో పెన్సిళ్ళు పెట్టుటకు కావలసిన పెట్టెల సంఖ్య 8.333..... గా ఉండదని మనకు తెలుసు. వారికి కావలసిన పెట్టెల సంఖ్య 8.33....కు దగ్గరగా, తరువాత పూర్ణాంకమైన '9' గా ఉండాలి. కాబట్టి వాస్తవంగా '9' పెట్టెలు కావాలి. కాబట్టి ఈ ప్రక్రియలో ప్రధానంగా 4 సోపానాలు ఉన్నాయి.

1. గణిత నమూనాను నిర్మించడం.
2. గణితపరమైన సాధనను పొందడం.
3. పొందిన గణితపరమైన సాధనను నిజజీవిత సమస్యలలో వ్యాఖ్యానించడం.
4. అసలు సందర్భం యొక్క వాస్తవికతతో సాధనను సరిచూడడం. అవసరాలకు అనుగుణంగా 5వ సోపానం కూడా ఉంది.

ఇప్పుడు మరొక ఉదాహరణ ద్వారా గణిత నమూనా విధానాన్ని పరిశీలిద్దాం.

ఉదాహరణ : వమరవల్లి డైట్‌లో రెండవ సంవత్సరంలో గణితాన్ని ఆప్షనల్ సబ్జెక్ట్‌గా తీసుకున్న విద్యార్థులు 25. వారి గణితోపాన్యాసకునితో కలసి అమరావతికి విహారయాత్రకు వెళ్ళాలని నిశ్చయించుకున్నారు. అయితే ఒక్కొక్క వాహనంలో డ్రైవర్ కాకుండా కేవలం పదిమంది వ్యక్తులు మాత్రమే కూర్చోగల్గుతారు. అయిన వారు ఎన్ని వాహనాలను తీసుకోవాలి?

సోపానం – 1 : (గణిత నమూనాను నిర్మించడం)

ఈ సమస్యలో ఒక్కొక్క వాహన సామర్థ్యం, డ్రైవర్ కాకుండా 10 మంది వ్యక్తులు అని ఇవ్వబడింది. 26 మంది ప్రయాణించడానికి వాహనాల సంఖ్యను కనుక్కోవాల్సి ఉంది.

GRK

అవసరమైన వాహనాల సంఖ్య = మొత్తం వ్యక్తుల సంఖ్య / ఒక్కొక్క వాహనం సామర్థ్యం

సోపానం – 2 (గణితపరమైన సాధన పొందడం)

అవసరమైన వాహనాల సంఖ్య = 26/10 = 2.6

సోపానం – 3 (పొందిన గణితపరమైన సాధనను నిజజీవిత సమస్యలలో వ్యాఖ్యానించడం)

సాధనా ఫలితం ప్రకారం కావల్సిన వాహనాల సంఖ్య 2.6 అని అర్థం.

సోపానం – 4 (సాధనను అసలు సందర్భం యొక్క వాస్తవికతతో సరిచూడడం)

వాహనాల సంఖ్య 2.6గా వుండదని మనకు తెలుసు. కాబట్టి వారు అద్దెకు తీసుకోవాల్సిన వాహనాల సంఖ్య 2.6 దగ్గరి, తర్వాతి పూర్ణాంకమైన '3'గా ఉండాలి.

కాబట్టి కావలసిన వాహనాల సంఖ్య '3'.

ఆలోచించండి – చర్చించి, రాయండి : నిజజీవితంలో ఏదైనా సమస్యను తీసుకుని, దానికి గణిత నమూనా విధానాన్ని తెల్పండి.

గణిత నమూనా విధానం ఉపయోగాలు :

1. ఒక నిజజీవిత సమస్యను గణిత సమస్యగా మార్చుకొని, దానిని సాధించి ముఖ్యమైన సమాచారాన్ని రాబట్టడమే "గణిత నమూనా విధానం" ముఖ్య ఉద్దేశ్యం. ప్రత్యక్ష పరిశీలన ద్వారా ప్రయోగాలు నిర్వహించిగాని; అత్యంత ఖర్చుతో కూడుకొని వున్న సందర్భంలో గాని సమాచార సేకరణ కష్టం అయినపుడు "గణిత నమూనా విధానం" చాలా ఉపయోగకరం.

ఉదాహరణకు ఆగ్రాలో వున్న తాజ్‌మహల్ పైన "మధుర" నూనె శుద్ధి కర్మాగార కాలుష్య ప్రభావాన్ని తెలుసుకోవాలంటే, తాజ్‌మహల్ పైన ప్రత్యక్షంగా ప్రయోగాలు చేయలేం.

ఎందుకంటే దానివల్ల ఒక అద్భుతమైన కట్టడానికి ప్రమాదం వాటిల్లే అవకాశం ఉంది. ఇలాంటి సందర్భంలో గణిత నమూనా విధానాన్ని ఉపయోగించుకోవచ్చు.

2. అడవిలోని చెట్ల సంఖ్య ; సరస్సులలోని చేపల సంఖ్య ; ఓటింగ్‌లో పోలయిన ఓట్లు చెప్పడం లాంటి అనేక సందర్భాలలో మనం "అంచనా వేయడం" అనే ప్రక్రియను ఉపయోగిస్తాం.

3. ఈ కింది సందర్భాలలో 'గణిత నమూనా విధానాన్ని' ఉపయోగిస్తాం.

1) రాబోయే కొన్ని సం॥ తర్వాత ఉండే భవిష్యత్ జనాభా

2) రాబోయే కొన్ని రోజుల్లో ఉండే వాతావరణ వివరాలు

3) రాబోయే కొన్ని సం॥లలో ఉండే అక్షరాస్యత శాతం

4) ఒక చెట్టుకు ఉండే ఆకుల సంఖ్యను ఊహించగలగడం

5) మహాసముద్రాల లోతును లెక్కించడం

4.5 గణిత పాఠ్యపుస్తకం :

"పుస్తకాలు నిత్యం మనతో నిశ్శబ్దంగా ఉండే సహచరులు, అందుబాటులో ఉండే తెలివైన సహోదరులు, సహనంతో కూడిన ఉపాధ్యాయులు." – చార్లెస్ విలియం ఇలియట్

పూర్వకాలంలో విద్యార్థులు గురుకులంలో చేరి, గురుశుశ్రూష చేస్తూ, గురువులు చెప్పిన వాటిని మననం చేయడం ద్వారా విద్య నేర్చుకొనేవారు. విజ్ఞానం తాళపత్ర గ్రంథాలలో ఉన్నప్పటికీ, అవి కొద్దిమందికే అందుబాటులో ఉండేవి. అందువల్ల మౌఖికంగానే బోధన – అభ్యసన జరిగేది. గురువే గ్రంథం, కంఠస్థం చేయడం ఒక్కటే విద్య నేర్వడానికి మార్గం. ముద్రణలు లేని ఆ రోజుల్లో ఒక వ్యక్తి జ్ఞానం అతనికే లేదా అతని కొద్దిమంది శిష్యులకు మాత్రమే పరిమితమై తరువాత మరుగున పడేది.

విజ్ఞాన శాస్త్రాభివృద్ధి వల్ల ముద్రణ కనిపెట్టినప్పటి నుంచి మానవుడు తన జ్ఞానాన్ని పుస్తకరూపంలో తమ తరువాత తరం వారికి అందించగలుగుతున్నాడు. ప్రస్తుతం ప్రతీ విషయంపై ఎన్నో గ్రంథాలు లభ్యమౌతున్నాయి. ప్రతీ తరగతికి ప్రతీ విషయంలోను పాఠ్యప్రణాళికను నిర్ణయించడం వల్ల ఆ పాఠ్యప్రణాళికనుసరించి పాఠ్య పుస్తకాలు వివిధ రచయితలతో రచించబడి అందరికీ అందుబాటులో ఉంటున్నాయి. అందువల్ల ఈనాడు పాఠశాలలో ఏ విషయాన్ని బోధించడానికైనా పాఠ్యపుస్తకం ప్రాథమిక పరికరంగా ఉంది.

4.5.1 గణిత పాఠ్యపుస్తకం :

18వ శతాబ్దం చివరిభాగం వరకు సాధారణంగా పాఠ్యపుస్తకాలను ఉపయోగించే వారు కాదు. 1797వ సం॥లో "థామస్‌డిల్‌వర్త్" "The School Master's Assistant" అను పుస్తకాన్ని రచించాడు. దీనిని మొట్టమొదటి పాఠ్యపుస్తకంగా భావించవచ్చు. ఇందులో కూడా పాఠ్య విషయం తార్కిక క్రమంలో లేదు. సూత్రాలు, ధర్మాలు, నియమాల కంఠస్తంపై ఎక్కువగా ప్రాధాన్యత ఇచ్చారు.

ఇప్పుడు "పాఠ్యగ్రంథం అంటే ఏమిటి?" అనే అంశాన్ని పరిశీలిద్దాం.

"పాఠ్యపుస్తకం అనేది ఒక సబ్జక్టులోని ప్రధాన మార్గదర్శక సూత్రాలన్నీ ఉన్న ఒక పుస్తకం"

– ఛాంబర్స్ ఇంగ్లీష్ డిక్షనరీ

"పాఠ్యపుస్తకం అంటే ఒక ప్రత్యేకమైన అధ్యయన శాఖకు ప్రాథమిక లేక అనుబంధంగా ఉండే ప్రమాణిక గ్రంథం"

– లాంగ్

"పాఠ్యపుస్తకం ఒక రాష్ట్ర విద్యా కార్యక్రమంలో నిర్దేశించబడిన విషయ ప్రణాళికను ఆచరణకు తీసుకురావడానికి ఉపయోగించే ఒక పరికరం"

– NCERT **(1970లో నిర్వహించిన నేషనల్ బోర్డ్ ఆఫ్ స్కూల్ టెక్ట్‌బుక్స్ సమావేశం)**

గణిత పాఠ్యపుస్తకం – ఆవశ్యకత, ప్రాముఖ్యత :

విద్యాప్రణాళికను అమలు జరిపే ప్రధాన సాధనం పాఠ్యపుస్తకం. గణిత పాఠ్య పుస్తకానికి తరగతి గది బోధనలో ప్రముఖ స్థానం ఉంది. ఎందుకంటే గణిత పాఠ్యపుస్తకం గణిత విషయాన్ని అందించడంతోపాటు సమస్యా పరిష్కార పద్ధతులను కూడా సూచిస్తుంది. గణిత పాఠ్యపుస్తకం ఒక క్రమబద్ధమైన బోధనాభ్యసన ప్రక్రియకు సహకరిస్తుంది. ఇది తరగతి గది పనికి, విద్యార్థుల ప్రగతిని మూల్యాంకనం చేయడానికి మార్గదర్శకత్వం వహిస్తుంది. కాబట్టి గణిత పాఠ్యపుస్తకం ఇటు ఉపాధ్యాయునికి, అటు విద్యార్థికి కూడా ఉపయోగకరం. హాల్‌క్వెస్ట్ (Hall Quest) మాటల్లో "ఒక మంచి గణిత పాఠ్యగ్రంథం జ్ఞానానికి ఒక మంచి వనరు, ఒక పరికరం, ఒక మార్గదర్శి. విద్యార్థులు తమ జ్ఞానపరిధిని పెంపొందించుకోవడానికి ఒక మాధ్యమం, సత్యాన్ని వ్యాఖ్యానించడానికి ఒక మార్గం".

మంచి గణిత పాఠ్యపుస్తక ప్రయోజనాలను పరిశీలిద్దాం.

1. ఒక పాఠ్యపుస్తకం ఆ తరగతికి నిర్ణయించిన విషయ ప్రణాళిక (Syllabus) ఆధారంగా రాయబడుతుంది. కాబట్టి అది గణిత విషయానికి సంబంధించి ఒక తరగతిలో ఎంతవరకు బోధించాలి అనే విషయాన్ని తెలియజేస్తుంది.
2. నిర్దేశిత సిలబస్‌ను అనుసరించి ఒక క్రమబద్ధమైన పద్ధతిలో బోధించడానికి ఉపాధ్యాయునికి మార్గదర్శకంగా ఉంటుంది.
3. ఉపాధ్యాయుడు క్రమపద్ధతిలో బోధనా ప్రణాళికను తయారుచేయడానికి ఉపయోగపడుతుంది.
4. పాఠ్యపుస్తకం తరగతి గది బోధనలో ఒక పాఠాన్ని బోధించడానికి తగిన బోధనా పద్ధతులు, బోధనాభ్యసన సామగ్రి ఎన్నుకోవడానికి ఉపయోగపడుతుంది.
5. అవసరమైన సమాచారాన్ని అందించడంతోపాటు విద్యార్థుల మనస్సులో ఆలోచన, విచక్షణలను ప్రేరేపిస్తుంది.
6. ఉపాధ్యాయుల, విద్యార్థుల సమయాన్ని పొదుపు చేస్తుంది.
7. విద్యార్థులలో స్వయం అభ్యసన అలవాట్లను అభివృద్ధిపరుస్తుంది.
8. ఉపాధ్యాయునికి బోధనా సామర్థ్యం పెంపొందించడానికి ఉపయోగపడుతుంది.
9. మాదిరి సమస్యల ఆధారంగా విద్యార్థులు అభ్యాసంలోని సమస్యలను సాధించడానికి ఉపయోగపడుతుంది.
10. ఉపాధ్యాయునికి, పుస్తకంలో ఇచ్చిన సమస్యల ఆధారంగా తాము విద్యార్థుల అభ్యాసం కోసం అదనపు సమస్యలను తయారుచేయడానికి సహాయపడుతుంది.
11. బోధనాంశాలన్నీ పూర్తయిన తరువాత విషయాన్ని ఉపాధ్యాయుల సహాయం లేకుండానే, విద్యార్థులు స్వతంత్రంగా పునరభ్యసనం, పునర్విమర్శ చేసుకోవడానికి ఉపయోగపడుతుంది.
12. విద్యార్థులకు కావలసిన సమాచారం అంతా ఒకేచోట దొరుకుతుంది. తమకు కావలసిన అంశాన్ని త్వరగా అభ్యసించడానికి వీలవుతుంది.
13. విద్యార్థులు పాఠశాలకు హాజరుకాని సమయంలో జరిగిన పాఠ్యాంశాలను పాఠ్యపుస్తకం ద్వారా తెలుసుకోవడానికి ఉపయోగపడుతుంది.
14. ఉపాధ్యాయునికి సంప్రదింపు గ్రంథంగా (రిఫరెన్స్ బుక్) ఉపయోగపడుతుంది.

15. గణిత పాఠ్యపుస్తకం కొత్త ఉపాధ్యాయులకు ఎంతగానో ఉపయోగపడుతుంది.

16. విద్యార్థులు ఇంటి పని చేయడానికి సహాయపడుతుంది.

ఉత్తమ గణిత పాఠ్యపుస్తక లక్షణాలు :

ప్రాథమికోన్నత స్థాయి పిల్లలకోసం అభివృద్ధిపరచబడే పాఠ్యపుస్తకాలపై ప్రత్యేక శ్రద్ధ అవసరం. ఉత్తమ గణిత పాఠ్యపుస్తకం ఈకింది లక్షణాలను కలిగి ఉండాలి.

ఎ) సాధారణ విషయాలు – భౌతిక విషయాలు :

1. పాఠ్యపుస్తకం పరిమాణం మరీ పెద్దదిగానూ, మరీ చిన్నదిగానూ కాకుండా విద్యార్థుల వినియోగానికి వీలుగా మధ్యస్తంగా ఉండాలి.
2. పాఠ్యపుస్తకం ఆకర్షణీయంగా వివిధ వర్ణచిత్రాలను కలిగి ఉండాలి.
3. చిత్రపటాలు, పట్టికలు స్పష్టంగా ఉండాలి.
4. చిన్న తరగతులకు నిర్దేశించిన పాఠ్యపుస్తకాలలో పెద్దఅచ్చు (ఫాంట్) వాడాలి.
5. విద్యార్థికి కనీసం ఒక సంవత్సరం ఉపయోగపడేలా మంచి కాగితం వాడాలి.
6. పాఠ్యపుస్తకం గట్టి అట్టతో, కవరుపేజీ ఆకర్షణీయంగా ఉండాలి.
7. ముద్రణలో తప్పులు లేకుండా చూడాలి.

బి) విషయం – విషయ సమర్పణ :

1. ఒక తరగతి పాఠ్యపుస్తకంలోని విషయం విషయ ప్రణాళికను అనుసరించి, ఆధునికంగా ఉండాలి.
2. విషయం విద్యాప్రమాణాలకు అనుగుణంగా ఉండాలి.
3. విషయం విద్యార్థుల స్థాయికి తగినట్లుగా ఉండాలి.
4. విషయం శిశుకేంద్రంగా ఉండాలి.
5. విద్యార్థులలోని సృజనాత్మకతను బహిర్గతపరచడానికి అవకాశం ఉండాలి.
6. నిత్యజీవితంలో, ఇతర పాఠ్య విషయాలలో ఎదుర్కొనే సమస్యలకు గణిత పాఠ్యపుస్తకంలో స్థానం కల్పించబడాలి.
7. భాష సరళంగా, సులభంగా, స్పష్టంగా, విద్యార్థుల స్థాయికి తగినట్లుగా ఉండాలి.
8. అంతర్జాతీయంగా ఆమోదించబడి ఉపయోగించే సంజ్ఞలను మాత్రమే ఉపయోగించాలి. ఆ సంజ్ఞకు ఇంగ్లీషులో స్పెల్లింగ్, దానిని చదివే విధానం అందించాలి. దానికి సంబంధించిన చారిత్రికాంశాలను తెలియజేయాలి. ఒకే సంజ్ఞను ఒక్కటికంటే ఎక్కువ వానిచే సూచిస్తే, వాటన్నింటిని పొందుపరచాలి.
9. ఒక మౌలిక భావనను అభివృద్ధిపరచడంలో తగినంత విషయం ఉండాలి.
10. అవసరమైన పరిచయాన్ని, చారిత్రకాంశాలను, గణిత శాస్త్రజ్ఞులను గురించిన విషయాలను పొందుపరచాలి.
11. విషయం మనోవిజ్ఞానశాస్త్ర ఆధారంగా ఉండాలి.
12. పాఠ్యపుస్తకంలోని విషయాలు అభ్యసనా క్రమంలో ఉండాలి.
13. మాదిరి సమస్యలు / ఉదాహరణలు ఉండాలి.
14. విషయ సమర్పణ కృత్యాధార బోధనకు అనువుగా ఉండాలి.

15. స్వంతంగా చేసుకోవడానికి వీలైన అభ్యాసాలు ఉండాలి.

16. మౌఖిక అభ్యాసాలకు తగిన ప్రాధాన్యత ఇవ్వాలి.

17. అభ్యాసంలోని సమస్యలు పిల్లల్లో ఆలోచనాశక్తిని, హేతువాదాన్ని పెంపొందించేవిగా ఉండాలి.

18. సమస్యల క్రమం "సరళత నుంచి క్లిష్టతకు" అనే సూత్రాన్ని పాటించాలి.

19. అవసరమైనచోట ఆలోచింపచేసే ప్రశ్నలను, ప్రాజెక్టు పనులను పొందుపరచాలి.

20. పాఠ్యపుస్తకంలోని విషయాలన్నిటిని సూచించే 'విషయసూచిక' ఉండాలి.

21. మూల్యాంకనం కోసం పునశ్చరణ అభ్యాసాలు ఉండాలి.

22. ప్రతిభావంతులైన పిల్లల కోసం కష్టమైనవి, సవాలుగా నిలిచే అభ్యాసాలు ఇవ్వాలి.

23. సాంఘిక, సాంస్కృతిక విలువలను అభివృద్ధి పరిచేదిగా ఉండాలి.

24. పజిల్స్, మనోరంజక గణితాంశాలను తగిన విధంగా, తగిన స్థానాలలో ప్రభావం కలిగి ఉండేలా ఇవ్వాలి.

25. ముఖ్యమైన అంశాలను బాక్సులలో ఇవ్వాలి.

26. ప్రతి అధ్యాయం చివర, అభ్యాసాలలో ఇచ్చిన ప్రశ్నల జవాబులు ఉండాలి.

27. పాఠ్యపుస్తకాలు కింది తరగతులకు చెందిన కనీస సామర్థ్యాలు పునశ్చరణ అవకాశం కల్పిస్తూనే, తరగతి సామర్థ్యాలు సాధించడానికి, పై తరగతులకు చెందిన అంశాలకు అనుసంధానించేలా ఉండాలి.

గణిత పాఠ్యగ్రంథం ఎన్ని ఉత్తమ లక్షణాలు కలిగిఉన్నప్పటికీ దాన్ని ఒక పనిముట్టుగా, బోధనాభ్యసనలో ఉపయోగపడే పరికరంగా పరిగణించాలి. పాఠ్యపుస్తకంపై ఎక్కువ ఆధారపడటం వల్ల ఉపాధ్యాయుని, విద్యార్థుల ఆలోచన, వివేచన శక్తుల అభివృద్ధి కుంటుపడుతుంది.

ఎందుకంటే "పాఠ్యపుస్తకం సమర్థుడైన ఉపాధ్యాయుని చేతిలో ఒక మంచి పనివాడిలా ఉపయోగపడుతుంది. కాని అసమర్థుడైన ఉపాధ్యాయుని విషయంలో ఒక చెడు యజమానిలా స్వారీ చేస్తుంది". కాబట్టి ఉపాధ్యాయుడు గాని, విద్యార్థి గాని పాఠ్యపుస్తకానికి బానిస కాకూడదు. పాఠ్యపుస్తకం ఉపాధ్యాయుని బోధనకు ప్రత్యామ్నాయం కాకూడదు. దీన్ని విద్యార్థి పొందవలసిన జ్ఞానానికి పునాదిని ఏర్పరచుకునే విధంగా ఉపయోగించుకోవాలి. సమర్థుడైన ఉపాధ్యాయుడు పాఠ్యపుస్తకానికి మాత్రమే పరిమితం కాకూడదు. దీన్ని అదనపు వనరుగా మాత్రమే భావించాలి.

గణిత పాఠ్యపుస్తకాలు రూపొందించడంలో తాత్వికత, మార్గదర్శక సూత్రాలు :

విద్యాప్రణాళికను అమలు జరిపే ప్రధాన సాధనం పాఠ్యపుస్తకం. విద్యాలక్ష్యాలని సాధించడంలో, బోధనాభ్యసన ప్రక్రియలకు మార్గదర్శనం చేయడంలో పాఠ్యపుస్తకాలు ప్రముఖ పాత్ర నిర్వహిస్తాయి.

సాధారణంగా 10 సంవత్సరాలకొకసారి విద్యాప్రణాళికను వ్యవస్థీకరిస్తారు. విద్యా ప్రణాళికను మార్పుచేసిన ప్రతిసారీ పాఠ్యగ్రంథాలను కూడా మారుస్తారు. భాషేతర పుస్తకాలను ప్రస్తుతం "సర్పిల పద్ధతి", ఏకకేంద్ర పద్ధతిలో అమర్చడం జరుగుతోంది. రాష్ట్రస్థాయిలో రాష్ట్ర విద్యా పరిశోధనా శిక్షణ సంస్థ (SCERT) ఆధ్వర్యంలో పాఠ్యపుస్తకాలను అభివృద్ధిపరచడం జరుగుతుంది. పాఠ్యపుస్తకాలను విద్యార్థి కేంద్రంగా తయారుచేస్తారు.

స్వాతంత్ర్యం వచ్చిన నాటినుంచి భారతీయ విద్యావిధానంలో ఎన్నో మార్పులొచ్చాయి. నిర్బంధ విద్యాహక్కు చట్టం (RTE Act) – 2009, జాతీయ విద్యా ప్రణాళిక చట్టం (NCF) – 2005ల ప్రకారం పాఠ్యపుస్తకాలను ఆధునీకరించాల్సిన అవసరం ఏర్పడింది. NCF-2005 కి అనుగుణంగా ఆంధ్రప్రదేశ్ ప్రభుత్వం తనకంటూ ఒక

రాష్ట్ర విద్యా ప్రణాళిక చట్రాన్ని (APSCF-2011) ఆధారపత్రాలను తయారుచేసుకోవడం జరిగింది.

APSCF-2011 ప్రకారం పాఠ్యపుస్తకాలు పిల్లలను ఆలోచించేలా, పిల్లలు తమకున్న సహజమైన శక్తి, సామర్థ్యాలను వినియోగించుకుని నేర్చుకోవడానికి దోహదపడాలని సూచించింది. పిల్లలు పొందిన జ్ఞానాన్ని నిత్యజీవితంలో వినియోగించుకోవడానికి పాఠ్యపుస్తక పరిధిని దాటి, అదనపు అంశాలు అభ్యసించడానికి అవకాశం కల్పించేలా ఉండాలని తెల్పింది. ఆలోచింపజేసే అభ్యాసాల ద్వారా నిర్ధారిత విద్యాప్రమాణాలు విద్యార్థులు పొందగలగాలని సూచించింది.

విద్యాప్రణాళికలో భాగమైన గణిత ఆధారపత్రం సూచించిన విధంగా గణిత పాఠ్యపుస్తకాలు అన్నింటిలో భావనల వరుస క్రమం కంటే విద్యార్థుల అవగాహన క్రమానికి ప్రాధాన్యత ఇవ్వడం జరిగింది. సిలబస్‌ని విద్యార్థుల మానసిక స్థాయికి అనుగుణంగా రూపొందించడం జరిగింది. దానికి అనుగుణంగా బోధనాభ్యసన ప్రక్రియలు కల్పించడం జరిగింది. వీటి ప్రకారం విద్యార్థులకు ఆసక్తికరమైన, ఆనందదాయకమైన రంగురంగుల పాఠ్యపుస్తకాలను తయారుచేయడం జరిగింది.

విద్యార్థులు ప్రాథమిక స్థాయిలో నేర్చుకున్న గణిత భావనల అవగాహన, వినియోగాలను మరింత విస్తృతపరచడానికి అవసరమైన అంశాలు ప్రాథమికోన్నత స్థాయిలోని పాఠ్యప్రణాళికలో పొందుపరచి, గణిత పాఠ్యగ్రంథాలు తయారు చేయడం జరిగింది.

పాఠ్యగ్రంథాల్లోని పాఠ్య విషయాన్ని ప్రాథమిక గణిత భావనలు, సాధారణీకరణాల ద్వారా అవగాహనలపై నూతన గణిత అంశాలను రూపొందించారు. ఈ విధానం విద్యార్థులు గణితాభ్యాసంలో చురుకుగా పాల్గొనేటట్లు, సమవయస్కులతో చర్చించేటట్లు, ప్రశ్నించుకొనేటట్లు చేసి, బోధనాభ్యసన ప్రక్రియలలో మంచి ఫలితాలను అందిస్తోంది. విద్యార్థులు చిన్నచిన్న బృందాలుగా చర్చించి, సమస్యలు సాధించడానికి వీలుగా "ఇవి చేయండి", "ప్రయత్నించండి" వంటి శీర్షికలను కూడా చేర్చారు. పాఠ్యప్రణాళికలోని వివిధ అంశాలను ఒకేసారి ప్రవేశపెట్టకుండా సంవత్సరంలో రెండు, మూడు పర్యాయాలు అభ్యసనచేసేలా పొందుపరిచారు.

ఉదాహరణకు "నిష్పత్తి అనుపాతం" శీర్షికను ఆరో తరగతిలో నిష్పత్తి మరియు అనుపాతం", 7వ తరగతిలో "నిష్పత్తి ఉపయోగాలు", 8వ తరగతిలో "అనుపాతంలో రాశులను పోల్చుట", "అనులోమ, విలోమానుపాతాలు" అనే అధ్యాయాలుగా పొందుపరిచారు.

జ్యామితిలోని భావనలను ప్రాథమికోన్నత స్థాయి వరకు విద్యార్థులు సహజసిద్ధమైన ఆలోచనా దృక్పథానికి అనుగుణంగా కొలతలు కొలవడం, కాగితాలు మడవడం వంటి ప్రయోగాత్మక కృత్యాల ద్వారా నేర్చుకునేలా పొందుపరిచారు.

"ఇవి చేయండి", "ప్రయత్నించండి" "ఆలోచించి, చర్చించి, రాయండి" అనే శీర్షికలు తరగతి గదిలో విద్యార్థులను నిరంతరం సమగ్రంగా మూల్యాంకనం చేయడానికి దోహదపడతాయి. కొన్ని ఉప అంశాలు చర్చించిన తరువాత, ఇచ్చిన అభ్యాసాలను విద్యార్థులు స్వయంగా సాధించడానికీ, తద్వారా ప్రతీ విద్యార్థి అభ్యసన సామర్థ్యాన్ని అంచనా వేయటానికి అవకాశం కలుగుతుంది.

విద్యార్థులు ప్రతీ అంశాన్ని కూలంకషంగా అవగాహన చేసుకోవడానికి, హేతుబద్ధంగా ఆలోచించడానికి, అంశాలపై సమగ్రంగా పట్టు సాధించడానికి, సులభంగా నేర్చుకోవడానికి గణిత అధ్యయనం పట్ల ఆసక్తిని పెంచడానికి ఈ

పాఠ్య గ్రంథాలు దోహదపడతాయి.

పజిల్స్, మనోరంజక అంశాలతో "మెదడుకు మేత", "మీకు తెలుసా?" వంటి శీర్షికలు విద్యార్థుల్లో దాగివున్న సృజనాత్మకతను, ఆలోచనా విధానాలను వెలికితీడానికి సహాయపడతాయి.

గణిత పాఠ్యగ్రంథాలలోని ప్రతి పాఠ్యాంశం అవసరమైన పరిచయంతో ప్రారంభించబడింది. సందర్భానుకూలంగా, π, జ్యామితి, మూలాలు వంటి చారిత్రకాంశాలను పొందుపరిచారు. పాఠ్యాంశ నేపథ్యాన్నిబట్టి దాని అభివృద్ధికి దోహదపడిన శ్రీనివాస రామానుజన్, కాప్రేకర్, యూక్లిడ్, జార్జ్‌పోల్యా, ఆర్యభట్ట, నేపియర్ మొదలైన గణిత శాస్త్రజ్ఞుల పరిచయాలను పొందుపరచాలి.

గణిత పాఠ్యగ్రంథాలలోని అంశాలు లక్ష్యాలకు అనుగుణంగా పొందుపరచబడ్డాయి. పాఠ్యగ్రంథాల్లో సమస్యా సాధనా పద్ధతులు, విధానాలు, ఉదాహరణలు, మాదిరి సమస్యలు ఇవ్వడమైంది. నిత్యజీవితంలో ఇతర పాఠ్య విషయాలలో ఎదుర్కొనే సమస్యలకు గణిత పాఠ్యపుస్తకంలో స్థానం కల్పించబడింది. మూల్యాంకనం కోసం అభ్యాసాలు పొందుపరిచారు.

రంగుల వర్ణచిత్రాలు, పటాలు, చదవగలిగేలా అక్షరాల పరిమాణం, పాఠ్యపుస్తకం పేజీల సంఖ్య విద్యార్థులకు గణిత పాఠ్యపుస్తకం పట్ల భయం పోగొట్టి వారిని స్వయం అభ్యసనానికి ప్రేరేపిస్తాయి. పాఠ్యపుస్తకాల చివరన గణితంలోని వివిధ పాఠ్యాంశాల ద్వారా సాధించవలసిన విద్యా ప్రమాణాలైనటువంటి సమస్యా సాధన, కారణాలు చెప్పడం, నిరూపణ చేయడం, వ్యక్తపరచడం, అనుసంధానం, దృశీకరణ, ప్రాతినిధ్యపరచడం లాంటివి చేర్చబడ్డాయి.

పిల్లలు చేయవలసిన ప్రాజెక్టు పనులకు పాఠ్యగ్రంథాలలో స్థానం కల్పించారు. మొత్తం మీద సెకండరీ స్థాయి గణిత పాఠ్యపుస్తకాలు విద్యార్థుల ఉన్నత గణిత అధ్యయనానికి దోహదపడేలా నిజజీవిత అవసరాలకు అనుగుణంగా రూపొందాయి.

అర్థవంతమైన పాఠ్యపుస్తకాలను రూపొందించడానికి (APSCF - 2011) చేసిన ప్రతిపాదనలు :

- అన్ని సబ్జక్టులలో పాఠ్యపుస్తకాలు రూపొందించడానికి సబ్జక్టువారీగా ఆధారపత్రాలు ఉండాలి.
- పాఠ్యపుస్తకాలు పిల్లల్ని ఆలోచింపచేసేలా, పిల్లలు తమకున్న సహజమైన శక్తి సామర్థ్యాలను వినియోగించి నేర్చుకోవడానికి దోహదపడాలి.
- పాఠ్యపుస్తకాలు సమాచారంతో బరువెక్కకుండా, పిల్లలే సమాచారాన్ని విశ్లేషించేలా, నిర్ధారణలు చేసేలా అవకాశం ఉండాలి.
- పిల్లలు జ్ఞానాన్ని నిర్మించుకోవడానికి పాఠ్యపుస్తకాలు తోడ్పడాలి. ఆ జ్ఞానాన్ని నిత్య జీవితంలో వినియోగించడానికి అవకాశం ఉండాలి.
- పిల్లలు కేవలం పాఠ్యపుస్తకాలకే పరిమితం కాకుండా, అదనపు అభ్యసనం కోసం సంప్రదింపు గ్రంథాలు, మ్యాగజైన్లు, పత్రికలు, సామాగ్రి, సహజ సభ్యులతో పరస్పర ప్రతిచర్యలు జరిగేలా పాఠ్యపుస్తకాలు అవకాశం కల్పించాలి.
- పాఠ్యపుస్తకాలలోని భాష సరళంగా ఉండాలి. నేర్చుకోవడానికి భాష ఒక అవరోధంగా ఉండరాదు. బహుభాషత్వాన్ని (Multilinguality) పరిగణనలోకి తీసుకోవాలి.
- పాఠ్యపుస్తకాలలోని పాఠ్యాంశాలు లింగ వివక్షతకు తావివ్వకూడదు. పిల్లల ఆత్మవిశ్వాసం పెంచేలా, ఆలోచింపజేసేలా, మానవ హక్కులపట్ల స్పృహ పెంచేవిగా ఉండాలి. ఇందుకోసం ఆలోచనా నైపుణ్యాలు అనగా ప్రతిస్పందించడం

(Reflection), విమర్శనాత్మకంగా ఆలోచించడం (Critical Thinking), బహుకోణాల్లో ఆలోచించడం (Dialectical Thinking), సృజనాత్మకంగా ఆలోచించడం (Creative Thinking), భావప్రసార నైపుణ్యాలు (Communication Skills) వంటివి పెంపొందించాలి.

- స్థానిక కళలు, సంస్కృతి, ఉత్పాదక కార్యకలాపాలు, స్థానిక అంశాలు మొదలగునవి పాఠ్యాంశాలుగా ఉండాలి.
- ఆయా సబ్జెక్టులకు నిర్ధారించిన విద్యాప్రమాణాలు (Academic Standards), ఆశించిన అభ్యసన ఫలితాలు (expected learning outcomes) సాధించడానికి వీలుగా అభ్యాసాలు ఉండాలి.
- కృత్యాలు, ప్రాజెక్టు పనులు, అన్వేషణలు, ప్రయోగాలు, బహువిధములైన సమాధానాలు వచ్చే ప్రశ్నలు (open ended questions), క్రీడలు, పజిల్స్ మొదలగువాటి రూపంలో ఆలోచింపజేసే అభ్యాసాలు ఉండాలి.
- పిల్లలు వ్యక్తిగతంగా నేర్చుకొనేలా, జట్టు పనుల్లో పాల్గొనేలా, పూర్తి తరగతి ద్వారా నేర్చుకొనేలా అభ్యాసాలు ఉండాలి. (Individual, group, whole class activities)
- పిల్లలు సహపాఠ్యాంశాలైన మానవతా విలువలు, నైతికత, కళలు, ఆరోగ్యం, పని మొదలగు అంశాలను కూడా గ్రహించడానికి వీలుగా పాఠ్యపుస్తకాలలోని పాఠ్యాంశాలు, అభ్యాసాలు ఉండాలి.
- పాఠ్యపుస్తకాలు కింది తరగతులకు చెందిన కనీస సామర్థ్యాలు పునశ్చరణకు అవకాశం కల్పిస్తూనే, తరగతి సామర్థ్యాలు సాధించడానికి, పై తరగతులకు చెందిన అంశాలకు అనుసంధానించేలా ఉండాలి.
- పాఠ్యపుస్తకాలు ఆకర్షణీయంగా, అందంగా ఉండాలి. నాణ్యమైన పేపరు, ముద్రణ, చిత్రాలతో కూడి ఉండాలి.

ఆలోచించండి – నమూనాలలో చర్చించండి : ప్రాథమికోన్నత స్థాయి గణిత పాఠ్యపుస్తకాలను పరిశీలించి వాటి రూపకల్పనలోని తాత్వికతను, వాటి లక్షణాలను చర్చించి, రాయండి.

నూతన గణిత పాఠ్యపుస్తకాల తయారీకి ఆధారమైన కీలక సూత్రాలు :

- పిల్లల సహజసిద్ధమైన శక్తి సామర్థ్యాలు
- పిల్లల భాష, అనుభవాలు
- పాఠ్యాంశాలలో బడి బయట జీవితంతో అనుసంధానం
- బట్టీపద్ధతికి స్వస్తి చెప్పే ప్రతిచర్యలు
- పాఠ్యపుస్తకాలకే పరిమితం కాని అంశాలు
- ప్రాజెక్టుల ద్వారా అన్వేషణలు
- నిరంతర సమగ్ర మూల్యాంకనం
- సామాజిక, నిర్మాణాత్మక విధానాలు
- విద్యార్థికి స్వేచ్ఛ, ప్రశ్నించే తత్వం
- నిర్ధారించిన విద్యా ప్రమాణాలు
- సృజనాత్మకత, కల్పనాశక్తి
- విభిన్నమైన సమస్యా సాధన ప్రక్రియలు

ప్రాథమికోన్నత స్థాయి గణిత పాఠ్యపుస్తకాలు – యూనిట్ నిర్మాణం, అభ్యాసాల స్వభావం, పాఠ్యపుస్తకాన్ని సమర్థవంతంగా

ఉపయోగించడంలో ఉపాధ్యాయుని పాత్ర :

ఆంధ్రప్రదేశ్ విద్యాప్రణాళిక చట్రం (APSCF - 2011)లో సూచించిన అనేక సిఫార్సులలో ప్రధానమైనది. "పాఠశాలలో విద్యార్థుల అభ్యసనం పాఠశాల బయటి జీవితం (నిజజీవితం)తో ముడిపడి ఉండాలి." దీనికి అనుగుణంగా మన రాష్ట్ర ప్రభుత్వం అన్ని తరగతులకు దశలవారీగా అన్ని సబ్జెక్టులలోను విద్యాప్రణాళికను సవరించింది. అందులో భాగంగా గణిత విద్యాప్రణాళికను కూడా సవరించింది. అలాగే సిలబస్ (విషయ ప్రణాళిక) ద్వారా సామర్థ్యాలు పెంపొందించుటకు వీలుగా విద్యాప్రమాణాలను కూడా నిర్దేశించారు. వాటిని దృష్టిలో ఉంచుకొని ప్రాథమికోన్నత స్థాయి గణిత పాఠ్యపుస్తకాలు రూపొందించబడ్డాయి.

అంతేకాకుండా పాఠ్యపుస్తకం నిర్మాణంలో పాఠ్యాంశాల నిర్మాణం, పాఠ్యపుస్తకంలో వాడిన భాష, చిత్రాలు, ముద్రణ మొదలైనటువంటి అంశాలపై కూడా ఆంధ్రప్రదేశ్ విద్యాప్రణాళికా పరిధి పత్రం అవి ఎలా ఉండాలో చర్చిస్తూ ప్రత్యేకమైన సూచనలు కూడా చేసింది. వాటిని ఇదివరకే మనం చర్చించాం. వీటిని దృష్టిలో ఉంచుకొని ప్రాథమికోన్నత స్థాయి పాఠ్యపుస్తకాలు పిల్లలకు ఆనందంగా, గణితాన్ని అర్థవంతంగా, సులభంగా అవగాహన చేసుకొని అందరూ అభ్యసించడానికి వీలుగా రూపొందించే ఉద్దేశంతో తయారుచేయబడాలి.

ప్రతి యూనిట్ రూపకల్పనలో పాటించాల్సి సోపానాలు / యూనిట్ నిర్మాణం :

- ప్రతి యూనిట్ తయారీకి ముందు దానిలో పొందుపరచవలసిన అంశాల (టాపిక్స్)ను, ఉపఅంశాలను ఎన్నుకోవాలి.
- నూతన భావనలను నిత్యజీవితంలోని సంఘటనలను, ఉదాహరణల ద్వారా ప్రవేశపెట్టడం జరగాలి. ఆ అంశాన్ని ఎందుకు నేర్చుకోవాలో ఆవశ్యకత (Need)ను పొందుపరచాలి.
- కొన్ని అమరికల (patterns) ద్వారా అన్వేషణ పద్ధతిలో పిల్లలే గుర్తించి సాధారణీకరించే (Generalise) పద్ధతిని ప్రవేశపెట్టాలి.
- సాధనా పద్ధతులను సమస్యా సాధన క్రమాల (Algorithms) ద్వారా ఎలా సాధించవచ్చో ఇవ్వాలి.
- ప్రతి యూనిట్‌లో పిల్లలు నేర్చుకొనే అంశాల అనువర్తనాలు (Applications) ఇవ్వబడాలి.
- ప్రతి భావన నిర్మాణం తర్వాత పునర్బలనం కొరకు కొన్ని ప్రశ్నలను "ఇవి చేయండి" అనే శీర్షికతో ఇవ్వాలి.
- వివిధ అంశాలను మరింత లోతుగా అవగాహన కల్పించడానికి వీలుగా "ఆలోచించి, చర్చించండి" (Think & Discuss) శీర్షికలో కొన్ని ప్రశ్నలు ఇవ్వాలి.
- అలాగే "ప్రయత్నించండి" (Try these) లో కొన్ని ప్రశ్నల ద్వారా విద్యార్థుల అన్వేషణా సామర్థ్యాన్ని, ప్రత్యుదాహరణలను కనుగొనే అవకాశాన్ని కల్పించబడాలి.
- ఇలా కొన్ని భావనల, అభ్యసనం తర్వాత పునర్బలనం కొరకై అభ్యాసాన్ని ఇవ్వాలి.
- అవసరమైన / అవకాశమున్న అధ్యాయాలలో ప్రాజెక్టు పనులు, పజిల్స్ సూచించబడాలి.
- ప్రతి పాఠ్యాంశం చివర మనం ఏం నేర్చుకున్నాం / మనం ఏం చర్చించాం / మనం నేర్చుకొన్నవి అనే శీర్షిక పేరుతో ఆ పాఠంలోని ముఖ్యాంశాలను ఇవ్వడం జరిగింది.

ప్రస్తుత ప్రాథమికోన్నత స్థాయి గణిత పాఠ్యపుస్తకాలలో యూనిట్ నిర్మాణంపై అంశాల ఆధారంగా ఉంది.

ఆలోచించండి – చర్చించి రాయండి : ప్రాథమికోన్నత స్థాయిలో ఏదైనా ఒక తరగతిలో గణిత విషయంలోని ఒక యూనిట్ తీసుకొని, ఆ యూనిట్ నిర్మాణాన్ని చర్చించి, రాయండి.

ఇప్పుడు "ఇవి చేయండి, ప్రయత్నించండి, ఆలోచించండి, చర్చించండి" అనే శీర్షికలు "ఎందుకోసం ఇవ్వబడాలి?" వాటిని బోధనాభ్యసన ప్రక్రియల్లో ఉపాధ్యాయులు ఎలా ఉపయోగించాలో పరిశీలిద్దాం!

ఇవి చేయండి :

- విద్యార్థి తాను నేర్చుకున్న భావనలు, అవగాహన ఎంతమేరకు జరిగిందనే విషయాన్ని వెంటనే తెలుసుకోవడం కోసం ఉద్దేశించబడింది.
- ఒక భావనకు మాత్రమే పరిమితమై ఉంటుంది.
- వీటిని విద్యార్థులు స్వంతంగా సాధించవలసి ఉంటుంది. ఇవి వారి ఆత్మవిశ్వాసాన్ని పెంపొందించే విధంగా ఉంటాయి.
- పిల్లలు వాటిని సమర్ధవంతంగా సాధించగలిగితే ఆ భావన వారికి అర్థమైనట్లు భావించాలి.
- కాబట్టి ప్రతీ ఉపాధ్యాయుడు "ఇవి చేయండి" శీర్షిక కింద సమస్యలను పిల్లలచే వ్యక్తిగతంగా / జట్టుకృత్యంగా నిర్వహించి, వారి అభ్యసనకు సహకరించాలి.

ప్రయత్నించండి :

- ఇందులో ఇచ్చిన సమస్యలు, ప్రవచనాలు, భావనల అవగాహన తరువాత విద్యార్థులు వాటిపై కలిగి వున్న అవగాహనను సాధారణీకరించుకోవడానికి, మరింత లోతుగా అవగాహన పొందడానికి, భావనల స్థిరీకరణను పరీక్షించడానికి ఉద్దేశించబడినవి. ఇవి కొంచెం కాఠిన్యత కలిగి ఉంటాయి.
- ఇవి స్వంతంగా సాధించాల్సి ఉంటుంది. ఎక్కడైనా సందేహాలు వస్తే ఉపాధ్యాయునితో గాని, తోటి విద్యార్థులతో గాని చర్చించి, సందేహ నివృత్తి చేసుకోవాలి.
- ఇవి విద్యార్థులలో ఆలోచనా శక్తిని రేకెత్తింపజేసి, సవాళ్ళను స్వీకరించే విధంగా ఉంటాయి.

ఆలోచించండి - చర్చించండి :

- నేర్పినటువంటి భావనల పరిధిని దాటి, విద్యార్థుల స్థాయిని పరీక్షించడానికి ఈ శీర్షిక ఉద్దేశించబడింది.
- ఇది జట్టు కృత్యంగా నిర్వహించాల్సిన అంశం.
- ఇది పిల్లల్లోని సృజనాత్మకతను వెలికి తీయడానికి దోహదపడుతుంది.
- ఇది పిల్లలకు అదనపు అభ్యసనాంశంగా దోహదపడుతుంది. భావనల పట్ల విస్తృత అవగాహన కోసం తోటి విద్యార్థులతో చర్చించడానికి ఇది ఉపకరిస్తుంది.

ఆలోచించండి - చర్చించి, రాయండి : ఎంపిక చేయబడిన అంశంలో "ఇవి చేయండి", "ప్రయత్నించండి", "ఆలోచించి - చర్చించండి" అనే అంశాలపై విద్యార్థులను ఇంటర్వ్యూ చేసి జవాబులు నమోదు చేయండి. లక్ష్యాలు సాధింపబడ్డాయో లేదో పరిశీలించండి.

అభ్యాసాలు స్వభావం :

ప్రాథమికోన్నత స్థాయి గణిత పాఠ్యపుస్తకాలలో

- ప్రతీ భావనపై పూర్తి అవగాహన జరగడానికి తగినంతగా అభ్యాసాలు ఇవ్వబడాలి.
- అధ్యాయం లక్ష్యాలన్నింటిని దృష్టిలో పెట్టుకొని లక్ష్యాలు / విద్యాప్రమాణాలు ఆధారంగా అభ్యాసంలో

సమస్యలివ్వబడాలి.

- భావనలపై అవగాహన కల్పించిన తరువాత వాటికి సంబంధించిన "ఇవి చేయండి", "ప్రయత్నించండి" లాంటి అభ్యాసాలు విస్తృతంగా ఇవ్వాలి.
- అభ్యాసంలోని సమస్యలు నిత్యజీవితంలోని, ఇతర సబ్జక్టులలోని అంశాలతో సంబంధం కలిగిఉండాలి.
- అభ్యాసంలోని సమస్యలు పిల్లల్లో ఆలోచనాశక్తిని, హేతువాదాన్ని పెంపొందించేవిగా ఇవ్వబడాలి.
- ప్రతీ ఉదాహరణను అనుసరించి అభ్యసనం కోసం సమస్యలు తగినన్ని ఇవ్వబడాలి.
- మూల్యాంకనం కోసం పునఃశ్చరణ అభ్యాసాలు ఇవ్వబడాలి.
- పిల్లలు తార్కికంగా ఆలోచించడం, వేగంగా చేయడానికి ఉపయోగపడు మౌఖిక అభ్యాసాలకు తగిన స్థానం కల్పించాలి.
- సమస్యలు "సరళత నుండి క్లిష్టతకు" అనే సూత్రాన్ని పాటించి, ఇవ్వబడాలి.
- ప్రతీ సమస్య సాధించుటకు అనుకూలంగా ఉండాలి.
- సమస్యలు స్వంతంగా చేసుకోవడానికి వీలైన అభ్యాసాలు ఇవ్వబడాలి.
- ప్రతిభావంతులైన పిల్లలకోసం "ఆలోచించి – చర్చించి, రాయండి" అనే శీర్షిక పేరుతో కష్టమైనవి – సవాలుగా నిలిచే అభ్యాసాలు ఇవ్వబడాలి.
- అభ్యాసాలలోని సమస్యలు ఇతర సబ్జక్టులతో సహసంబంధాన్ని కలిగిఉండాలి.
- పాఠ్యపుస్తకం చివర, అభ్యాసాలు ఇచ్చిన ప్రశ్నలకు జవాబులు ఇవ్వబడాలి.
- ప్రస్తుత ప్రాథమికోన్నత స్థాయి గణిత పాఠ్యపుస్తకాలలోని అభ్యాసాల స్వభావంపై అంశాలకు అనుగుణంగా ఉంది.

ఆలోచించండి – చర్చించండి : ప్రాథమికోన్నత స్థాయిలో ఒక్కొక్క తరగతిలోని ఒక్కొక్క పాఠ్యాంశాన్ని ఎంపిక చేసి, అందలి అభ్యాసాల స్వభావాన్ని చర్చించండి.

పాఠ్యపుస్తకాన్ని సమర్థవంతంగా ఉపయోగించడంలో ఉపాధ్యాయుని పాత్ర :

ప్రస్తుత గణిత పాఠ్యపుస్తకాల ఆధారంగా చేపట్టబోయే బోధనా విధానంలో ఉపాధ్యాయుడు ఈక్రింది విధమైన పాత్రను పోషించాలి.

- శాస్త్రీయంగా రూపొందించిన చట్రంలో సిలబస్‌కు కేటాయించిన పీరియడ్ల (పాఠ్యపుస్తక కవర్ పేజీ వెనుక ఉన్నది) ప్రకారం అధ్యాయాన్ని అనువైన విధంగా విభజించుకొని పథకాలు తయారుచేసుకోవాలి.

- విద్యార్థికి సంబంధించిన నిత్యజీవిత సందర్భాన్ని అధ్యాయంతో జోడించి, రాయబడిన పరిచయ సన్నివేశాలను చర్చింపజేస్తూ విద్యార్థి పూర్వజ్ఞానాన్ని ప్రశ్నల ద్వారా పరిశీలించి, అభ్యసనకు ప్రేరణ కలిగించాలి.

- ప్రతీ ఉప అంశాన్ని విద్యా ప్రమాణాల దృష్టిలో ప్రశ్నిస్తూ, చర్చింపజేస్తూ ఉదాహరణలతో అవగాహనపరచాలి. తగు కృత్యాలతో విద్యార్థులలో అనుభవం కలిగించి చిన్నచిన్న అభ్యాసాలైన 'ఇవి చేయండి', 'ప్రయత్నించండి' శీర్షికల కింద ఇవ్వబడిన ప్రశ్నలకు సమాధానాలను మౌఖికంగా, రాతపూర్వకంగా చెప్పించాలి.

- అభ్యాసాలను చిన్నవిగా చేసినందున, ప్రతీ అభ్యాసంలో లెక్కలు అన్నింటినీ విద్యార్థులందరూ గ్రూపులలో

చేయగలిగేటట్లు ఉపాధ్యాయుడు ప్రోత్సహించాలి. చురుకైన విద్యార్థులకు ఉపాధ్యాయుడు స్వయంగా సమస్యలు తయారుచేసి ఇవ్వాలి.

- పిల్లలు సాధించిన సమస్యలలో ఏమైనా తప్పులు ఉంటే గ్రూపులలో చర్చింపజేసి, వారు సరిదిద్దుకునేలా ప్రయత్నించాలి.

- 'ఇంటిపని', నియోజనాల రూపంలోనూ, ప్రాజెక్ట్‌ల రూపంలోనూ బృందాలలో ఇచ్చి, ఆహ్లాదకరంగా పూర్తి చేయడానికి అవకాశం కల్పించాలి.

- విద్యార్థి తరగతి గదిలో అభ్యసన కృత్యాల ద్వారా సాధించిన సామర్థ్యాలను (విద్యాప్రమాణాలను) నిర్మాణాత్మక మూల్యాంకనం ద్వారా నిరంతరం అంచనా వేయాలి.

- విద్యార్థి ప్రతీ అధ్యాయంలో వివిధ దశలలో బోధనాభ్యసన ప్రక్రియలో పాల్గొన్న విధానాలు, ఇంటిపని, నియోజనాలు, ప్రాజెక్ట్ పనులు మొ॥వి. వాటితోపాటు సమగ్ర మూల్యాంకనా పరీక్ష (ఎస్.ఎ.)ల ద్వారా అంచనావేసి విద్యాప్రమాణాల ఆధారంగా గ్రేడింగ్ ఇవ్వాలి.

- నూతన పాఠ్యపుస్తక అధ్యాయాల చివర పొందుపర్చిన గణిత శాస్త్రజ్ఞుల చరిత్ర, ఆహ్లాదం కొరకు వ్రాసిన కొన్ని తమాషాలు విద్యార్థులలో గణిత భయాన్ని పోగొట్టి ఆనందాన్ని కలుగజేస్తాయి. కాబట్టి ఉపాధ్యాయుడు మరిన్ని మెరుగైన కార్యక్రమాలు రూపొందించుకోవాలి.

- ప్రతీ గణిత ఉపాధ్యాయుడు తన తరగతి గదిలో బోధనా వ్యూహాన్ని అనుసరించడానికి ముందు ప్రతి అధ్యాయాన్ని సమగ్రంగా అధ్యయనం చేయాలి.

- విద్యార్థులను ఎన్ని విధాలుగా చర్చలలోనూ, కృత్యాలలోనూ, సూత్రీకరణలోనూ భాగస్వాములను చేయవచ్చో, ఆలోచించాలి.

- ఉపాధ్యాయుడు మార్గదర్శకునిగా ఉంటూ, విద్యార్థులు తమంతట తాముగా గణితాన్ని నేర్చుకునే విధంగా ప్రోత్సహించాలి.

పాఠ్యపుస్తక అధ్యాపన ఉద్దేశము – అవగాహన :

- స్వయం అభ్యసనాన్ని ప్రోత్సహించేలా ఉండుట.
- పూర్వజ్ఞాన పరిశీలనానంతరం నూతన జ్ఞానాన్ని అందించుట.
- స్థానిక కళలు, సంస్కృతి, ఉత్పాదక కార్యకలాపాలు, స్థానిక అంశాలకు పాఠ్యాంశాలలో చోటు కల్పించుట.
- సమస్యా సాధన, తార్కికత – కారణాలు చెప్పడం, వ్యక్తీకరించడం, ప్రాతినిధ్యపరచడం, అనుసంధానం వంటి మౌలిక అంశాల మూలంగా గణిత విద్యాప్రమాణాల మదింపు.
- 'ఇవి చేయండి', 'ప్రయత్నించండి', 'ఆలోచించి చర్చించండి' వంటి శీర్షికల ద్వారా నిరంతర సమగ్ర మూల్యాంకనం.
- బట్టీ నుండి విముక్తి కల్పించి, జ్ఞాన నిర్మాణానికి ప్రాధాన్యత.
- స్వేచ్ఛగా వ్యక్తీకరించేదిగా, ప్రశ్నించే స్థాయి పెంపొందించుట.
- వివిధ రకాల సమస్యల సాధన కొరకు అనేక ప్రత్యుదాహరణలు / అర్థవంతంగా, ఆనందంగా నేర్చుకోవడానికి వీలైనన్ని సమస్యలు.

- గణితాంశాలను ఇతర సబ్జక్టులలోని విషయాలతోను, నిత్యజీవిత అంశాలతోను అనుసంధానం చేయండి.
- వివేచన, విచక్షణతో కూడిన హేతుబద్ధమైన జ్యామితీయ నిర్మాణాలు, సిద్ధాంతాల నిరూపణ.
- తరగతి గదిలో సమస్యలను సమర్థవంతంగా సాధించటం వల్ల నిత్యజీవితంలో ఎదురయ్యే సమస్యలను కూడా సాధించే శక్తిని కలిగించుట.

తరగతి గదిలో పాఠ్యపుస్తక బోధన / ప్రసరణను నేర్చుకోవడం :

బట్టీపట్టడం, వల్లెవేయడం, పుస్తకాలలోని, గైడ్లు, ప్రశ్నల బ్యాంకులలోని అంశాలను ఎత్తిరాయడం, లేదా యాంత్రికంగా చదవడం వంటి యాంత్రికమైన విధానాలకు బదులు బోధనాభ్యసన ప్రక్రియలు పిల్లలు అర్థవంతంగా నేర్చుకోవడానికి దోహదపడాలి. ఇందుకోసం APSCF-2011 కింది ప్రతిపాదనలు చేసింది.

- పరస్పర ప్రతిచర్యలు (Interactions), స్వీయవ్యక్తీకరణ (Self Expression), ప్రశ్నించడం (Questioning) వంటివి బోధనాభ్యసన ప్రక్రియలలో కీలకం కావాలి.
- ప్రయోగాలు, అన్వేషణలు, కృత్యాలు, ప్రాజెక్ట్ పనులు, క్రీడలు మొదలగునవి బోధనాభ్యసన ప్రక్రియల్లో అంతర్భాగం కావాలి.
- బోధనాభ్యసన ప్రక్రియలంటే ఉపాధ్యాయుడు వివరించడం లేదా చదివి వినిపించడం కాదు. ఉపాధ్యాయులు పిల్లలు నేర్చుకోవడాన్ని ప్రేరేపించేలా, పాల్గొనేలా చేయాలి. అవసరమగు సామాగ్రిని ఉపయోగించాలి. అందుబాటులో ఉంచాలి. అభ్యసన వాతావరణాన్ని కల్పించాలి.
- పిల్లలు వ్యక్తిగతంగా, తోటివారితో, ఉపాధ్యాయుల ద్వారా, సామగ్రి ద్వారా అభ్యసించేలా బోధనాభ్యసన ప్రక్రియల నిర్వహణ ఉండాలి. పిల్లల అభ్యసన సమయం పూర్తిగా సద్వినియోగం కావాలి.
- పిల్లలందరు తమ ఇంటి భాషలో నేర్చుకోవడానికి అనువైన ఏర్పాట్లు / వాతావరణం ఉండాలి.
- ఉపాధ్యాయులు పిల్లల భాషను వినియోగించాలి.
- బోధనాభ్యసన ప్రక్రియల నిర్వహణ పిల్లల అనుభవాలు, పూర్వజ్ఞానం ఆధారంగా ప్రారంభం కావాలి.
- స్థానిక కళలు, ఉత్పాదక అంశాలు, శ్రమజీవుల అనుభవాలను బోధనాభ్యసన ప్రక్రియల్లో వనరులుగా ఉపయోగించాలి.

నూతన పాఠ్యపుస్తకాలకు అనుగుణంగా అనుసరించాల్సిన బోధనా వ్యూహాలు :

చెప్పబోయే పాఠ్యాంశం / భావనలకు చెందిన పూర్వ భావనలు / నిత్యజీవిత సందర్భాలు / కీలక ప్రశ్నల ఆధారంగా పిల్లలతో మాట్లాడించడం / చర్చించడం ద్వారా సంసిద్ధులను చేయడం.

భావనలు / సందర్భాలు / ఉదాహరణ చదివించడం / పరిశీలించడం ద్వారా వివరించడం.

జట్లలో ఉదాహరణను పరిశీలిస్తూ చర్చింపజేయడం ద్వారా పద్ధతి ప్రకారం సమస్యను సాధించడం తెలుసుకొనేలా చేయడం.

గ్రూపులలో / స్వంతంగా ప్రయత్నించండి, ఇవి చేయండి శీర్షికలో ఇచ్చిన సమస్యలు సాధించడం.

తప్పులను గుర్తింపజేయడం, చర్చింపజేయడం ద్వారా స్వంతంగా గ్రూపులలో తప్పులను సరిదిద్దుకునేలా చేయడం

'ఇవి చేయండి' శీర్షికలోని సమస్యలు / అభ్యాసాలు / మరిన్ని అదనపు సమస్యలు / సేకరించిన వాటినుండి ఇచ్చి

సొంతంగా సాధింపజేయడం.

పిల్లలు ఏవి సరిగా చేయగల్గుతున్నారో, ఏవి సరిగా చేయలేకపోతున్నారో మూల్యాంకనం నిర్వహించడం.

ఆలోచించి, చర్చించి, రాయండి : 6, 7, 8 తరగతులలో ఒక్కొక్క తరగతి నుండి ఒక్కొక్క పాఠ్యాంశాన్ని ఎన్నుకొని, బోధనా వ్యూహాలను సూచించండి.

4.6. గణిత ప్రయోగశాల / వనరుల గది; గణిత క్లబ్, గణిత పేటిక (Maths Laboratory / Resource Room ; Mathematics Club, Maths Kit)

గణితశాస్త్ర అభ్యసన సక్రమంగా జరుగుటకు వనరుల అవసరం ఎంతైనా కలదు. అవి విద్యార్థులలో గణితంపట్ల ఆసక్తి పెంచడమేగాక, వారి అభ్యసనా పటిమను వృద్ధిపరుస్తాయి. గణిత ప్రయోగశాల / వనరుల గది, గణిత సంఘం, గణిత పేటిక మొదలైన వాటి నుండి విద్యార్థులు ఏవిధంగా ప్రేరణ పొందుతారో, గణిత సామర్థ్యాలు పెంపొందించుకుంటారో తెలుసుకుందాం.

4.6.1 గణిత ప్రయోగశాల (Mathematics Laboratory) / వనరుల గది (Resource Room)

గణితశాస్త్ర బోధనాభ్యసన ప్రక్రియలు పాఠశాల స్థాయిలో సమర్థవంతంగా నిర్వహించుటకు గణిత ప్రయోగశాల అత్యవసరము. ఈ ప్రయోగశాల వలన అభ్యసనం త్వరగా, శాశ్వతంగా జరిగే అవకాశం ఉంది. విజ్ఞానశాస్త్ర ప్రయోగశాలవలె, గణిత ప్రయోగశాలను ఏర్పరిస్తే అది బోధనాభ్యసన ప్రక్రియలో కీలకపాత్రను నిర్వహిస్తుంది. కనుక గణిత ఉపాధ్యాయుడు తాను బోధించే పాఠ్యాంశాన్ని బట్టి గణిత ప్రయోగశాలను ఉపయోగించాలి. కనుక గణిత ప్రయోగశాలను ప్రాథమికోన్నత పాఠశాలల్లో తప్పనిసరిగా ఏర్పరచాలి.

గణిత ప్రయోగశాల ఆవశ్యకత, ప్రాముఖ్యం

గణిత ప్రయోగశాలకు రెండు ప్రయోజనాలున్నాయి.

1. విషయ అభ్యసనానికి సంబంధించిన అన్ని పరికరాలు పదిలపరిచే స్థలం.
2. చక్కని అభ్యసనానుభవాలకు ప్రయోగాలకు అవసరమైన వసతులను అవకాశాలను పొందుపరుస్తుంది.

- చేయడం ద్వారా అభ్యసనం అను సూత్రం గణితానికి కూడా వర్తిస్తుంది.

గణితం కష్టమని, నిర్జీవమైనదని, అమూర్తమని, ఆసక్తిరహిత, ప్రేరణ రహితమని భావించే విద్యార్థులు గణిత ప్రయోగశాలలో ప్రాయోగిక పనిని చేస్తూ నేర్చుకోవడం ద్వారా గణిత విషయంలో తగినంత ఆసక్తి, ప్రేరణ పొందుతారు.

గణిత ప్రయోగశాలలోని పరికరాలు :

గణిత ప్రయోగశాలలో ఈ వస్తువును ఉంచవచ్చు, ఆ వస్తువు ఉండకూడదు అనే సమస్యే లేదు. గణిత బోధనకు ఉపయోగించే ఏ వస్తువునైనా సరే గణిత ప్రయోగశాలలో ఉంచవచ్చు.

వివిధ సూత్రాలకు సంబంధించిన చార్టులు, బార్‌గ్రాఫ్స్, చిత్రపటాలు, సంఖ్యా నమూనాలు, జ్యామితీయ, క్షేత్ర గణిత ఉపకరణాలు, రకరకాల బోర్డులు, వాటిలో నల్లబల్ల, ఫ్లానెల్ బోర్డ్, గ్రాఫ్‌బోర్డ్, జియోబోర్డ్, పెగ్‌బోర్డ్ మొ., ఫ్లాష్‌కార్డులు, ఫిలింస్ట్రిప్స్, ప్రొజెక్టరు, జ్యామితి నిర్మాణాలు పరికరాలు, మాజిక్ స్క్వేర్స్, వెన్‌చిత్రాలు, టాన్‌గ్రామ్స్, టి.వి., రేడియో, గణిత పేటిక, డ్రాయింగ్ బల్లలు, డ్రాయింగ్ పిన్నులు, రాళ్ళు, గోళీలు, మొదలైన సామగ్రిని

సమీకరించి ప్రయోగశాలలో క్రమంగా అమర్చుకోవాలి. సాధ్యమైనంత వరకు ఉపాధ్యాయుడు ధరలేని లేదా తక్కువ ధర (No Cost or Low Cost) గల పరికరాలు ప్రయోగశాలలో ఉండేలా జాగ్రత్త వహించాలి.

గణిత ప్రయోగశాల నిర్వహణలో ఉపాధ్యాయుని పాత్ర :

గణిత ఉపాధ్యాయుడు విద్యార్థులను ప్రయోగశాలకు తీసుకువెళ్ళడానికి ముందే వారితో చేయించవలసిన కృత్యం, దానికి అవసరమైన ఉపకరణాలు, వస్తు సామగ్రిని, ఒక సూచనా కార్డు రూపంలో పొందుపరచి నల్లబల్లపై రాయాలి.

ఎ) ప్రయోగ లక్ష్యాలు
బి) పూర్వజ్ఞానం
సి) కావలసిన సామాగ్రి
డి) గణిత సూత్రం
ఇ) ప్రయోగం చేసే విధానం
ఎఫ్) తీసుకోవలసిన జాగ్రత్తలు
జి) ప్రయోగ ఫలితం
హెచ్) ఫలితం నమోదు చేయడం
ఐ) ముగింపు

గణిత ప్రయోగశాల ప్రయోజనాలు :

1. గణితం పట్ల / విషయం పట్ల ఆసక్తి, అవగాహన, సృజనాత్మక శక్తి పెంపొందుతాయి.
2. గణితాలోచన, వైజ్ఞానిక దృష్టిలను అభివృద్ధి పరచవచ్చు.
3. విద్యార్థులు గణిత విషయాలను, సూత్రాలను తమ జీవితంలో అనువర్తన చేస్తారు.
4. విద్యార్థులలో సంఘీభావం పెరుగుతుంది.
5. విద్యార్థులలో సరిచూసుకునే స్వభావం పెరుగుతుంది.
6. గణిత ప్రయోగశాలల్లో ఏర్పడిన భావనలు విద్యార్థులలో సుస్థిరంగా ఉంటాయి.
7. గణిత ప్రయోగశాల వలన అభ్యసనం అర్థవంతం అవుతుంది.
8. విద్యార్థులలో శాస్త్రీయ వైఖరి, సమస్యా పరిష్కారం, అన్వేషణ దృక్పథాలు పెంపొందుతాయి.
9. విద్యార్థులలో గీసే నైపుణ్యాలు, గణనా నైపుణ్యాలు, గ్రాఫ్ నైపుణ్యాలు అభివృద్ధి చెందుతాయి.
10. ప్రయోగశాలలోని సామాగ్రితో అమూర్త అంశం కూడా మూర్తంగా అర్థం అవుతుంది.

గణిత ప్రయోగశాల – పరిమితులు

1. అభ్యసనకు ఎక్కువ సమయం పడుతుంది.
2. గణిత విద్యా ప్రణాళికలోని అన్ని అంశాలను ప్రయోగశాలలో బోధించలేం.
3. బోధనాభ్యసనకు అవసరమైన పరికరాలను విద్యార్థులకు అందుబాటులో ఉంచుటకు ఎక్కువ సమయం అవసరమగును.
4. ఉపాధ్యాయునికి పనిభారం ఎక్కువ.
5. విద్యార్థుల సంఖ్యకు అనుగుణంగా ఉపకరణాల సంఖ్య అందుబాటులో ఉండకపోవచ్చు.

4.6.2 గణిత సంఘం (Mathematics Club)

సాధారణంగా 'పరీక్షే' గమ్యంగా బోధన జరుగుతోంది. "ప్రేరేపించే ఉపాధ్యాయుడే వాస్తవమైన విద్యా జీవనాడి" అని అంగీకరిస్తాం. కాని తరగతి గది, కాలవ్యవధి, నియమ నిబంధనలు అనే అంశాల పరిధిలో గణితం 'చెప్పడం'

నుంచే 'నేర్పడం', అంతకుమించి 'చేయడం'గా మార్చటం లేదు. గణితాన్ని ఒక క్రీడగా భావించి స్వేచ్ఛగా పాల్గొనే స్థితిలోకి విద్యార్థులు రావాలంటే కొన్ని అనియత పద్ధతుల ద్వారా గణిత సహ పాఠ్య కార్యక్రమాలు నిర్వహింపబడాలి. ఇందుకుగాను పాఠశాల గణిత సంఘం (మాథమెటిక్స్ క్లబ్) ఒక సాధనం. ఒక గణిత సంఘాన్ని ఎలా ప్రారంభించాలి, నిర్వహించాలి, ఎటువంటి కార్యక్రమాలు చేపట్టాలి అని తెలిసిన ఉపాధ్యాయుడు తనకు లేదా తన పాఠశాలకు ఉన్న వనరులు, ఇతర కారకాల దృష్ట్యా మాథమెటిక్స్ క్లబ్‌కు రూపకల్పన చేసుకుని, ప్రారంభించి కార్యక్రమాలు నిర్వహించాలి.

గణిత సంఘం ఆవశ్యకత

NCERT, SCERT, భారతీయ గణితశాస్త్ర ఉపాధ్యాయల సంఘం గణిత విద్యాభివృద్ధికి ఎన్నో చర్యలు చేపట్టారు. ఈ క్లబ్బులలో ఎన్నో విధాలైన కృత్యాలు నిర్వహించవచ్చు.

- విద్యార్థుల చేత గణిత నమూనాలు సిద్ధం చేయించవచ్చు.
- మాథమెటికల్ ఒలింపియాడ్స్ లాంటి పోటీలలో విద్యార్థులు పాల్గొనడానికి గాను వారిని సంసిద్ధ పరచవచ్చు.
- గణిత సంబంధిత జ్ఞానం కొరకు అదనంగా కొన్ని గణితశాస్త్ర అంశాలను / బోధించాలి. (తరగతిలో బోధించుటకు అవకాశం లేని)
- ప్రతి అధ్యాపకుడు సవాళ్ళను ఎదుర్కొనే సమస్యల జాబితాను తన దగ్గర ఉంచుకోవాలి.

జాతీయ విద్యా పరిశోధనా శిక్షణా సంస్థవారు ప్రచురించిన "జాతీయ స్థాయిలో ఉపాధ్యాయ శిక్షణా కార్యక్రమం బోధన సామాగ్రి" పుస్తకాలలోని "ప్రాథమికోన్నత / ఉన్నత పాఠశాల స్థాయిలో గణితశాస్త్ర బోధన" అనే 'మాడ్యూలు' లోనివి పైన పేర్కొన్న కొన్ని అంశాలు. ఇవి ప్రస్తుత గణిత బోధన పరిస్థితి, మెరుగుపరచవలసిన అవసరం. గణిత ఉపాధ్యాయుల పాత్ర, గణిత సంఘాల ప్రయోజనం, పాఠశాలలో గణిత సంఘం ఆవశ్యకత గురించి సూచనప్రాయంగా తెలియజేస్తున్నాయి.

ఉద్దేశాలు – ప్రయోజనాలు

పాఠశాలలో గణిత సంఘం.

1. విద్యార్థులలో గణితంపట్ల ఆసక్తి, అభిరుచిని పెంచేందుకు ఒక భూమికగా ఉపయోగపడుతుంది.
2. సమస్య సాధనా నైపుణ్యం, అన్వేషణ, పరిశోధనా దృక్పథం అలవడటానికి దోహదం చేస్తుంది.
3. గణిత ఉపాధ్యాయులకు సమిష్టిగా ఆలోచించి, మంచి ఫలితాలు సాధించడానికి వేదిక అవుతుంది.
4. బోధనోపకరణాల తయారీ, వాటిని ఉపయోగించడం, గణిత నమూనాల ప్రదర్శనలు జరిగితే అందులో పాఠశాల పాల్గొనడం వంటి అంశాల నిర్వహణ చేస్తుంది.
5. స్వయం అధ్యయనానికి మార్గాలను చూపుతుంది.
6. గణిత క్విజ్‌లు, పోటీ పరీక్షలకు విద్యార్థులు తగిన సమాచారం, సంసిద్ధతతో పాల్గొనే పథకాలను ఇస్తుంది.
7. గణిత సంబంధ సమావేశాలు, ప్రసంగాలలో విద్యార్థులు తమ గణిత జ్ఞానాన్ని సుసంపన్నం చేసుకోవడానికి అవకాశం ఇస్తుంది.
8. గణితంలో అదనపు అంశాల సమాచారాన్ని ఇస్తుంది.
9. విద్యార్థులలో సమిష్టి కృషి, నిర్వహణ సామర్థ్యం, పరస్పర సహకారం, సర్దుబాటు మనస్తత్వం, సృజనాత్మకత,

ఉపాధ్యాయులతో అవగాహన, చక్కని సాన్నిహిత్యం వంటి అంశాలకు ఉపకరిస్తుంది.

10. గణిత విషయానికి సంబంధించిన అభివృద్ధి, శాస్త్రజ్ఞుల జీవితచరిత్రలు, కృషి, ఉపయోగాలు వంటి అంశాలు విద్యార్థులు చదవడం, వినడం, చర్చించుటకు వీలు కల్పిస్తుంది.

11. గణితాన్ని ఒక దినచర్యగా భావించడానికి సహకరిస్తుంది.

గణిత సంఘం నిర్వహణ :

గణిత సంఘ స్థాపనకు, నిర్వహణకు ప్రత్యేకించి కొన్నినియమ నిబంధనలు రూపొందించడం జరిగింది. అవి పాఠశాల స్థాయిలో ప్రధానమైనవేమి కాదు. నిర్వహణలో విద్యార్థులకు అనుగుణంగా సవరణలు చేస్తారు.

'గణిత క్లబ్' స్వభావం, ఏర్పాటు, నిర్వహణలు ఆ పాఠశాల విద్యార్థులు, ఉపాధ్యాయుల సంఖ్యపై ఆధారపడి ఉంటుంది.

1. గణిత సంఘం పేరు : ప్రసిద్ధులైన గణిత శాస్త్రజ్ఞుల జీవిత చరిత్ర, వారి గణిత సేవలు విద్యార్థులు సదా గుర్తుంచుకునేట్లు గణిత సంఘానికి వారి పేర్లుపెట్టవచ్చు. ఆర్యభట్ట, భాస్కరాచార్య, బ్రహ్మగుప్త, మహావీరాచార్య, పావులూరి మల్లన, శ్రీనివాస రామానుజన్, యూక్లిడ్, పైథాగరస్, ఆయిలర్, న్యూటన్, జార్జికాంటర్, హైపాటియా, ఎమ్మీనెథోర్, లక్కోజు సంజీవ రాయశర్మ ఇలా ఎందరో మహానుభావుల గుర్తుగా పాఠశాల గణిత సంఘాన్ని వారి పేర్లతో కలిపి పిలవచ్చు.

2. సభ్యత్వం : గణిత సంఘంలోని సభ్యులను నాలుగు విధాలుగా నిర్వచిస్తాం

1) సాధారణ సభ్యులు, 2) గౌరవ సభ్యులు, 3) ప్రాథమిక సభ్యులు, 4) పోషక సభ్యులు

1) సాధారణ సభ్యులు : సభ్యత్వం రుసుంతో నిమిత్తం లేకుండా పాఠశాల విద్యార్థులు అందరిని సాధారణ సభ్యులు అంటారు.

2) ప్రాథమిక సభ్యులు : గణితం పట్ల ఆసక్తి, ప్రతిభ, కార్యక్రమాల నిర్వహణకు ఉత్సుకత, సభ్యత్వ రుసుం చెల్లింపు, గణిత సంఘం నిర్వహణకు అదనపు నిధుల సమీకరణకు తోడ్పాటు వంటి అంశాలకు సానుకూలంగా స్పందించేవారిని "ప్రాథమిక సభ్యులు" అంటారు.

3) గౌరవ సభ్యులు : సమాజంలో ఆర్థికంగా, ఉన్నత స్థితిలో ఉన్నవారిలో పాఠశాలతో సాన్నిహిత్యం, గణితం పట్ల ఆసక్తి, అభిరుచులను కనబరిచే వారిని 'గౌరవ సభ్యులు'గా చేర్చుకుంటారు.

4) పోషక సభ్యులు : విద్యార్థుల తల్లిదండ్రులు, ఆసక్తి గల పెద్దలు, గణిత శాస్త్ర బోధకులను 'పోషక సభ్యులు'గా చేర్చుకుంటారు.

3. కార్యవర్గం : గణిత సంఘం కార్యవర్గాన్ని ఉపాధ్యాయ, విద్యార్థి అనే రెండు భాగాలుగా ఒకదానితో మరొక దానికి సంబంధం ఉండేట్లుగా ఏర్పాటు చేయాలి. దీనికి ప్రధానోపాధ్యాయుడు గౌరవ అధ్యక్షులుగా, సీనియర్ గణితోపాధ్యాయుడు లేదా ఔత్సాహిక గణితోపాధ్యాయుడు కార్యదర్శిగా ఉంటారు. గణిత సంఘాన్ని వివిధ రకాల శాఖలుగా విభజించి, వాని నిర్వహణకు మిగిలిన గణితోపాధ్యాయులు వారి అభిరుచి, సమర్థత బట్టి కార్యదర్శులుగా వ్యవహరిస్తారు. గణిత సంఘ నిర్వహణలో కార్యవర్గం ప్రధాన బాధ్యత వహిస్తుంది

ఉపాధ్యాయ కార్యదర్శి నిర్వహించే పనులు :

- ప్రతి సంవత్సరం విద్యార్థుల నుంచి ప్రాథమిక సభ్యుల ఎంపిక, నమోదు.

* ఉపాధ్యాయ సభ్యులు, విద్యార్థి సభ్యులతో చర్చించి, వార్షిక కార్యాచరణ పథకం తయారుచేయడం దాని అమలును పర్యవేక్షించడం.
* గౌరవ సభ్యులు, పోషక సభ్యులను నమోదు చేయడం, వారితో సాన్నిహిత్యం కలిగి ఉండడం.
* ఉపాధ్యాయుల నుండి, విద్యార్థుల నుండి కార్యవర్గం ఎంపిక.
* గణిత సంఘంలోని వివిధ శాఖలు సమర్థవంతంగా పనిచేసేటట్లు నిర్వహించుట.
* ఉపాధ్యాయ సమావేశాలు, పునశ్చరణ తరగతులు, గణిత ఉత్సవాలు, విద్యార్థులచే సభలు మొ॥ వాటిని నిర్వహించడం.
* గణిత సంఘం కార్యక్రమాల నమోదు, సమాచార నిర్వహణ, జమా ఖర్చులు నమోదు.

గణిత సంఘం కార్యకలాపాలు

గణిత సంఘం నిర్వహించదగిన కార్యకలాపాలను కొన్ని శీర్షికలుగా వర్గీకరించారు.

ఎ) సమావేశాలు :

ఒక గణిత సంఘం ఏర్పాటు చేసుకుని ఏవో కొన్ని కార్యక్రమాలు నిర్వహించినంత మాత్రాన ఆ సంఘం బాగా పనిచేస్తోందని, ఆశించిన లక్ష్యాలను సాధిస్తోందని చెప్పలేం. ఒక నిర్ణీత కాల వ్యవధిలో జరిగే అంతర్గత సమావేశాలు, సాధారణ సమావేశాలు, ప్రత్యేక సమావేశాలు లేనిదే ఒక సంఘం పనిచేస్తోందని కూడా చెప్పలేని పరిస్థితులు ఏర్పడతాయి. ఇటువంటి సమావేశాలు సంఘ సభ్యులను ఉత్తేజపరచి, కార్యోన్ముఖులను చేయడానికి, తాము చేయవలసినవి సక్రమంగా చేయడానికి ఎంతో ఉపకరిస్తాయి.

ప్రత్యేక సమావేశాలు :

* ప్రసిద్ధ గణిత శాస్త్రజ్ఞుల గణిత సేవలు, గణితం ప్రయోజనం మొదలైన అంశాలపై ప్రముఖుల ప్రసంగాలు
* గణిత శాస్త్రంలోని వివిధ అంశాలపై ఉపాధ్యాయుల, విద్యార్థుల స్వల్ప వ్యవధి చర్చలు లేదా ప్రసంగాలు
* పాఠ్య ప్రణాళిక, పాఠ్య గ్రంథాలు మారినప్పుడు ఆయా అంశాలపై అవగాహనకు పునశ్చరణ తరగతులు.
* క్విజ్, టాలెంట్ పోటీ పరీక్షలు, గణిత ప్రదర్శనలు మొదలైన పోటీలలో విజేతలైన విద్యార్థులకు అభినందనలు.
* సంఖ్యాశాస్త్ర విశేషాలు, మనోరంజక గణిత అంశాలపై పరిచయం ప్రసంగాలు.

బి) బులెటిన్ బోర్డు

గణిత సంఘ ప్రాథమిక ప్రాధాన్యతలలో బులెటిన్ బోర్డు నిర్వహణ చాలా ముఖ్యమైంది. దీని కొన్ని ఉపయోగాలను పరిశీలిద్దాం.

* గణిత పదజాలం, సాంకేతికాలు, వీటిని పలికే విధానం లేదా పునశ్చరణ నిమిత్తం తరగతి గదిలో కూడా ఉపయోగించవచ్చు.
* పేపరు కటింగులు, బొమ్మలు, ఫొటోలు, వివిధ రంగులలో రాసిన 'చార్టు' ముక్కలను దానిపై ఉపయోగించవచ్చు.
* ప్రత్యామ్నాయ నిరూపణలు మొదలైన అంశాలు, ప్రతిపాదన లేదా వివరణలను ఆకర్షణీయమైన పద్ధతిలో బులెటిన్ బోర్డు మీద ప్రదర్శిస్తారు.
* ప్రధాన అంశాలు, సిద్ధాంతాలు, ఉప సిద్ధాంతాలు, ఫలితాలు, సూత్రాలు కూడా ప్రదర్శించవచ్చు.

* గణిత సూక్తులు లేదా గణిత సుభాషితాలను ప్రదర్శించవచ్చు.

సి) పోటీ పరీక్షలు

పాఠశాలలో జరిగే పరీక్షల పరిధికి మించి విద్యార్థులలో ఉండవలసిన నిశితమైన, సమగ్రమైన విషయ పరిజ్ఞానం, విమర్శనాత్మక దృష్టి, అంతర్నిహిత శక్తి, తార్కికమైన ఆలోచనా పద్ధతి, సమస్యల సాధనకు తెలిసిన జ్ఞానాన్ని అనువర్తనం చేయగలిగిన సామర్థ్యం, ఆ తరగతి స్థాయికి చెందిన పరిపక్వత, సాంప్రదాయేతర పద్ధతులను ఊహించగలిగి, ఉపయోగించే నేర్పు మొదలైన వానికి ప్రతీకగా పోటీ పరీక్షలను భావించవచ్చు. మాథమేటిక్స్ ఒలింపియాడ్, నేషనల్ టాలెంట్ సెర్చ్ పరీక్షలకు విద్యార్థులను ప్రోత్సహించాలి.

డి) గణిత క్విజ్

"నిర్ణీత స్వల్పకాల వ్యవధిలో సమాధానాలు చెప్పే విధంగా ఉండే ప్రశ్నలు అడిగే పద్ధతి లేదా పరీక్షా విధానం"గా క్విజ్‌ను భావించవచ్చు. క్విజ్ ప్రధానంగా విషయజ్ఞానం, సమయస్ఫూర్తి, వేగం, కచ్చితత్వం, సంసిద్ధత, ఏకాగ్రత, గ్రహణ నైపుణ్యం, శ్రవణ సామర్థ్యం, ధారణ, వివేచన మొదలైన అంశాలపై ఆధారపడి ఉంటుంది.

సాధననికష మనకు ఎంత తెలుసు అనే విషయాన్ని, కొంత ఆలస్యంగా తెలియచేస్తే, క్విజ్ అంతకు మించి మనకు ఏమి తెలియాలో కూడా వెంటనే చెప్తుంది. క్విజ్‌ను మౌఖికంగా నిర్వహిస్తే ప్రయోజనం ఎక్కువగా ఉంటుంది.

గణిత క్విజ్‌ను పాఠశాలలో ఒక యూనిట్ అయిన వెంటనే, త్రైమాసిక, అర్థ సంవత్సర, వార్షిక పరీక్షలకు ముందు నిర్వహించాలి.

ఇ) ఇతర సంబంధిత వ్యాసంగాలు

గణితాన్ని మనోరంజకం, జనరంజకం చేసేందుకు గణిత సంఘం మనోరంజక గణితాంశాలతో పాటు సాహిత్య ప్రక్రియలు, రంగస్థల ప్రదర్శనలు కూడా నిర్వహించవచ్చు. వీటికి నిర్దిష్టంగా ఎటువంటి నేపథ్యం, ప్రాతిపదిక లేకపోయినా సృజనాత్మకత ఉన్న ఉపాధ్యాయులు, వ్యక్తులు ఈ అంశాలలో గణితాన్ని సమ్మిళితం చేసి చూపుతున్న ప్రయత్నాలను, కార్యక్రమాలను అనుసరించవచ్చు.

1) సాహిత్య వ్యాసాంగాలు

పాఠశాల స్థాయిలో గణిత – సాహిత్య వ్యాసంగాలుగా గణిత వ్యాసరచన, వక్తృత్వ పోటీలు, స్క్రాప్‌బుక్, లిఖిత పత్రిక, గణిత నేపథ్యంతో సాహిత్య, కవిత్వ రచనలు నిర్వహించవచ్చు.

గణితం – భాష, ఇతర శాస్త్రాల సహసంబంధాలను వ్యక్తీకరించే ఒక చక్కని ప్రక్రియగా ఈ వ్యాసంగాన్ని ఉపయోగించవచ్చు.

'బులెటిన్ బోర్డు'పై గల పేపర్ కటింగ్స్‌ని మేథమేటిక్స్ స్క్రాప్ బుక్‌గా తయారుచేయవచ్చు.

గణితపరంగా విద్యార్థులను పద్య రచనకు ప్రోత్సహించవచ్చు.

2. ఇతర ప్రసంగాలు

'సినిమా' పాటలకు మాత్రమే ప్రచారంలో ఉన్న 'అంత్యాక్షరి'ని గణితానికి వర్తింప చేయవచ్చు.

ఉదా : Triangle - Equation - Number - Ray - Yard Etc.,

భాషాపరంగా ప్రచారంలో ఉన్న 'క్రాస్ వర్డ్ పజిల్స్' అందరికీ తెలిసినవే. పదబంధ ప్రహేళికలు కాలక్షేపానికే గాక, బాహ్య తదితర విషయ సముపార్జనకు సాధనాలు.

ఎఫ్) గనితోపన్యాసాలు :

నిష్ణాతులైన ఉపాధ్యాయులను కానీ, డిగ్రీ, ఇంటర్, ఇంజనీరింగ్ అధ్యాపకులను గానీ, గణిత జ్ఞానం గల పౌరులని ఆహ్వానించి వారికి సంబంధించిన గణిత అంశాలపై ఉపన్యాసాలను పాఠశాలలో నిర్వహించాలి. పాఠశాల స్థాయిని బట్టి ఉపన్యాస అంశాన్ని ఎన్నుకోవాలి.

ఈ క్రింది అంశాలపై గణితోపన్యాసములు చేపట్టాలి.

1) సంఖ్యా విధానము, సంఖ్యాన్యాయాలు, సంబంధిత సిద్ధాంతాలు

2) క్షేత్ర గణితం, నిత్య జీవిత ఉపయోగం

3) జ్యామితీయ సిద్ధాంతాలు – వాటి ప్రయోజనాలు

జి) గణిత చర్చ గోష్టులు, ప్రసంగాలు (Mathematics, Debates, Lecturers)

విద్యార్థులు పాల్గొనే ఒక మంచి గణిత కార్యక్రమం, గణిత సంబంధిత అంశాలను వారం వారం చర్చాగోష్టుల ద్వారా నిర్వహించడం అవసరం. ఏ వారం ఏ అంశానికి ప్రాధాన్యత నివ్వాలో నిర్ణయించుకొని విద్యార్థులు ఆ అంశం నందు సంసిద్ధులై చర్చాగోష్టిని కొనసాగించడం వల్ల విద్యార్థులలో తెలియని అంశాలు తెలుసుకోవడం, గణిత అధ్యయనాన్ని అభివృద్ధి పరచుకోవడం జరుగుతుంది. గణిత ఉపాధ్యాయుల సలహామేరకు ఏ వారం ఏ అంశంపై చర్చా గోష్టి కొనసాగాలో నిర్ణయించుకోవాలి.

విద్యార్థులు చర్చా గోష్టిలో, ప్రసంగాల్లో శ్రద్ధగా పాల్గొనేట్లు గణిత ఉపాధ్యాయులుగా మీరు వారిలో తగిన ప్రేరణను కల్పించడం అవసరం. ఒకసారి ప్రేరేపించారంటే విద్యార్థులు క్రమం తప్పకుండా చర్చాగోష్టులు, ప్రసంగాలు కొనసాగిస్తారు. తద్వారా వారిలో గణిత పాఠ్యాంశాలపై శ్రద్ధ పెరుగుతుంది. గణిత అధ్యయనంలో అభిరుచి, ఆసక్తి ఏర్పడి అన్వేషణ వైఖరిని అలవాటు చేసుకుంటారు. ఆత్మవిశ్వాసం, ధైర్యంగా సమస్యలను ఎదుర్కొనే స్వభావం, వేదికపై సునాయాసంగా చర్చించే మనస్తత్వం అభివృద్ధి చెందుతుంది.

4.6.3. గణిత బోధనా పేటిక

జాతీయ విద్యావిధానం 1986లో భాగంగా 1987వ సంవత్సరంలో జాతీయ స్థాయిలో ప్రాథమిక పాఠశాలలన్నింటికి ఆపరేషన్ బ్లాక్‌బోర్డు పథకం అమలు చేయడం జరిగింది.

ఇందులో మౌలిక అంశాలు మూడు

1. భౌతిక సదుపాయం కల్పించడం.
2. ఏకోపాధ్యాయ పాఠశాలలకు, రెండవ ఉపాధ్యాయుని నియమించడం.
3. అత్యవసర బోధనాభ్యసన సామాగ్రిని అందించడం.

అత్యవసర బోధనా సామగ్రి కింద గణితబోధన కోసం గణిత పేటికను అందించడం జరిగింది.

ప్రాథమిక పాఠశాలలకు అందజేసిన గణిత పేటికలోని సామాగ్రి ప్రాథమికోన్నత స్థాయిలోగల అనేక గణిత బోధనాంశాలను చక్కగా బోధించుటకు ఎంతగానో ఉపయోగపడును.

గణిత పేటికలో ప్రధానంగా ఉన్న సామగ్రి.

1. పూసల చట్రం
2. డామినోలు
3. ఘనాకారపు కడ్డీలు
4. క్యూసెనేయర్ పట్టీలు
5. నేపియర్ పట్టీలు
6. భిన్నాల చట్రం
7. జ్యామితీయ ఘనాకారాలు

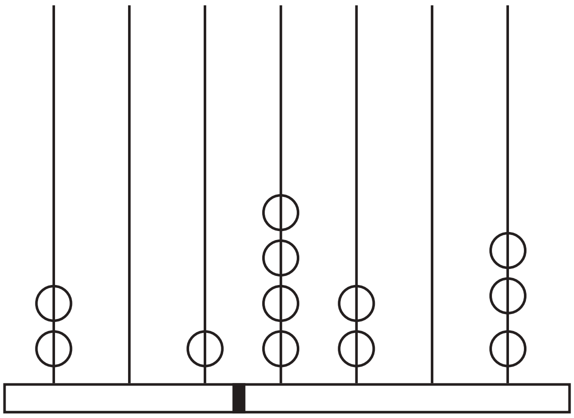
వీనిలో ప్రాథమికోన్నత స్థాయిలో ఉపయోగించే అంశాల గూర్చిన వివరణను పరిశీలిద్దాం.

1. పూసల చట్రం :

పూసల చట్రంలో పూసలు వేయడానికి తీయడానికి వీలుగా 5 లేక 6 విడి, విడి కడ్డీలుగా ఈ కడ్డీలకు పూసలను వేయవచ్చు, తీయవచ్చు. ఒక్కొక్క కడ్డీని ఒక స్థానంగా భావించవచ్చు. రంగులలో వంద పూసలుంటాయి.

చేయదగిన కృత్యాలు

- పూసల చట్రంలో పూసలు వేసి విద్యార్థులతో స్థాన విలువలను చెప్పించవచ్చు.
- దశాంశ సంఖ్యలను ఏర్పాటు చేయించవచ్చు.
- చట్రపు పీఠంపై గుర్తునుంచి పూర్ణసంఖ్య స్థానాలను దశాంశ స్థానాలను వేరుచేసి చూపవచ్చు.
- దశాంశ సంఖ్యల కూడికలను, తీసివేతలను చేయించవచ్చు.



దశాంశ సంఖ్య 201.4203

2. ఘనాకారపు కడ్డీలు :

ఈ కడ్డీలు ఒక యూనిట్ మొదలు 10 యూనిట్లు పొడవుదాకా వివిధ కొలతలలో ఉంటాయి. ప్రతి కొలతకు పది చొప్పున ఉంటాయి.

చేయదగు కృత్యాలు

- పెద్ద, చిన్న సైజులను పోల్చవచ్చు.
- ఆరోహణ, అవరోహణ క్రమాలను అవగాహన పరచవచ్చు.
- 1/2, 1/5, 1/10 భాగాలు ప్రదర్శించి అవగాహన పరచవచ్చు.
- దశాంశ భాగాలు, 1/10, 2/10, 3/10, శతాంశ భాగాలు అంటే, 1/100, 2/100, 3/100 బోధించవచ్చు.
- క్రమభిన్నాలు, అపక్రమ భిన్నాలు, మిశ్రమ భిన్నాలు ప్రదర్శించవచ్చు.
- సజాతి భిన్నాలు 1/5, 2/5, 3/5, ... ప్రదర్శించవచ్చు.

- సమాంతర రేఖలు, సరళరేఖలు గీయడానికి ఉపయోగించవచ్చు.
- సమబాహు, సమద్విబాహు విషమబాహు త్రిభుజాల ఆకారాలను ఏర్పరచవచ్చు.

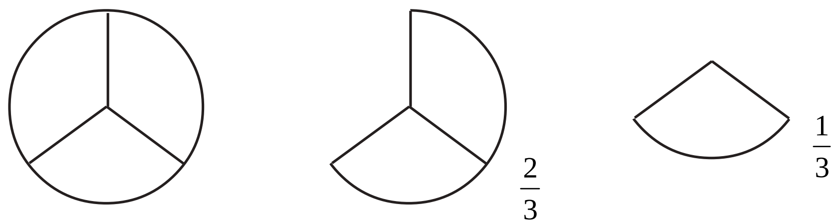
3. భిన్నాల చట్రం :

భిన్నాల చట్రంలో ఒక పూర్తి వృత్తం ఉంటుంది. ఇది వృత్తాకారం గాడిలో అమర్చడానికి, తీయడానికి వీలుగా ఉంటుంది. ఇలాంటి గుండ్రటి ఆకారాన్ని రెండు భాగాలు, మూడు భాగాలు, 4 భాగాలుగా 10 వరకు చేయబడిన ముక్కలుంటాయి. వీటిని వృత్తాకారపు గాడిలో అమర్చి, భిన్నాలకు సంబంధించిన కృత్యాలు ప్రదర్శించవచ్చు.

చేయదగు కృత్యాలు :

క్రమ, అపక్రమ, మిశ్రమ భిన్నాలను ప్రదర్శించటం, వాటిని భిన్నాలుగా రాయించటం.

1/3, 2/3, 2/5 భిన్నాల ముక్కలను వాటి మొత్తం భాగాల నుండి తీసుకొని చూపుతూ, వీటిలో చేసిన భాగాల కంటే తీసుకున్న భాగాలు తక్కువని వీటిని క్రమభిన్నాలంటారని చూపవచ్చు.



1/3 ముక్కలను భిన్నాల చట్రంలో ఉంచి, 1/3కు సమానమైన మరి రెండు ముక్కలను అట్టనుంచి తీసుకొని మొత్తం 5 భాగాలను చూపుతూ దీన్ని భిన్నంగా 5/3 అని రాస్తారని, ఇక్కడ చేసిన భాగాలకంటే కావలసిన భాగాలు ఎక్కువని దీనిని అపక్రమ భిన్నమంటారని అవగాహన చేయించవచ్చు. పూర్ణ వస్తువు ఒకటి అని, భిన్నభాగం 2/3, అని $1^2/_3$ను మిశ్రమ భిన్నమంటారని గుర్తింపజేయవచ్చు.

సజాతి భిన్నాలు 1/5, ముక్కలను భిన్నాల చట్రంలో అమర్చి దీని నుంచి ఒక భాగం తీసుకుంటే భిన్నం 1/5, దీని నుంచి రెండు భాగాలు తీసుకుంటే భిన్నం 2/5. దీని నుంచి మూడు భాగాలు తీసుకుంటే భిన్న, 3/5 అని, 1/5,2/5, 3/5 వీటిని సజాతి భిన్నాలంటారని గుర్తింపజేయవచ్చు.

సజాతి భిన్నాల కూడికలో లవాలను మాత్రమే కలిపి, హారాన్ని అట్లాగే ఉంచాలని, ఇట్లాగే తీసివేతలో లవాలను మాత్రమే తీసివేసి హారం అట్లాగే ఉంచాలని అవగాహనపరచవచ్చు.

భిన్నాలని పోల్చడం, పెద్దచిన్న భిన్నాలను గుర్తించడం.

సహజంగా విద్యార్థులు భిన్నాలలో 1/3 పెద్దదా 1/5 పెద్దదా అంటే 1/5 పెద్దదనే అంటారు. పూర్ణ సంఖ్యలను పోల్చడంలో ఉన్న పోలికను ఇక్కడ ఆపాదిస్తుంటారు. హారం ఎక్కువ ఉంటే భిన్నం విలువ తగ్గుతుందని గుర్తింపజేయాలి. 1/3 భాగాన్ని 1/5 భాగాన్ని, ఒకదానిపై ఒకటి ఉంచి ఏది పెద్దదో గుర్తింపజేయాలి. వివిధ భాగాలను పోల్చి పెద్ద, చిన్న భిన్నాలను గుర్తింపజేయవచ్చు.

4. జ్యామితీయ ఘనాకారాలు :

దీనిలో దీర్ఘఘనం, సమఘనం, శంఖం, గోళం, స్థూపం మొదలైన ఘనాకారాలు ఉంటాయి. సమఘనం, దీర్ఘఘనాల్లో ఎన్ని తలాలున్నాయి, అంచులున్నాయి అవి ఏ ఆకారంలో ఉన్నాయో గుర్తింపజేయవచ్చు.

స్థూపాకారం, శంఖాకారాల బేధాలను గుర్తింపజేయడం ఇంకా ఇట్లాంటి ఆకారాలను నిత్యజీవిత సందర్భాలలో గుర్తింపజేయడం గోళాకారాన్ని పోలిన ఉదాహరణలను చెప్పించడం చేయవచ్చు.

.....

4.7 గణిత విద్యా ప్రణాళికను సమర్ధవంతంగా బోధన చేయుటకు అవసరమైన అభ్యసన వనరులు (Learning Resources for Effective Transaction of Mathematical Curriculum)

బోధనాభ్యసన ప్రక్రియలు విజయవంతం కావడానికి అందులో వాడబడిన వనరులు ప్రముఖ పాత్ర వహిస్తాయి. వనరులు బోధన జరిగే సమయంలోనే ఉపయోగించాల్సినవి అని అనుకోవడం ఒక అపోహ మాత్రమే. గణిత భావనలను అవగాహనపరిచే క్రమంలో తరగతి గదికి వెళ్ళేముందు సంసిద్ధుడు కావడానికి, బోధన తర్వాత కూడా భావన స్థిరీకరణ కావడానికి వనరులను ఉపయోగించుకోవలసిన అవసరాన్ని తెలియజేయాలి.

ఉపాధ్యాయుడు పాఠ్యపుస్తకంలోని సమాచారాన్ని అందచేసే విధంగా కాకుండా వివిధ భావనల మధ్యగల సంబంధాన్ని విద్యార్థులకు అవగాహన పరిచేలా అదనపు సమాచారాన్ని సేకరించుకోవాలి.

గణిత విద్యాప్రణాళికను సమర్ధవంతంగా బోధన చేయుటకు గణిత ప్రయోగశాల, గణిత క్లబ్, గణిత పేటికలు మాత్రమేకాక క్రింద సూచించిన సహపాఠ్య ప్రణాళికా వ్యాసక్తులు నిర్వహించవలసిన అవసరం ఎంతైనా ఉన్నది. వాటి గురించి సవివరంగా చర్చిద్దాం.

1. గణిత పత్రికలు (Maths Journals)
2. గణిత గ్రంథాలయము (Maths Library)
3. గణిత ప్రదర్శనలు (Maths Fairs)
4. గణిత సంఘాలు (Maths Associations)
5. గణిత ఫోరం (Maths Forum)
6. గణిత యాప్‌లు (Maths Apps)
7. గణిత వెబ్‌సైట్లు (Maths Websites)
8. గణిత ఇ-పుస్తకములు (Maths E-books)

4.7.1 గణిత పత్రికలు (Maths Journals) :

గణితంలో పత్రికలు ప్రత్యేకంగా చదవడం విద్యార్థి లోకానికి ఇంకా పూర్తిగా అలవాటు కాలేదు. అందుబాటులో లేకపోవడం, తెలుగు మాధ్యమంలో లభించినా, గణిత పత్రికలు బహుళ ప్రాచుర్యానికి నోచుకోవడం లేదు. అందుకై మీరు గణిత పత్రికలను చదివి ఏఏ పత్రికలు ఏఏ విద్యార్థులకు అవసరమో వారికి తగిన సలహాలు అందజేయడం జరగాలి.

గణిత పత్రికల ఉద్దేశ్యాలు :

1. జిజ్ఞాసగల, గణితజ్ఞానంగల పౌరులకు, విద్యార్థులకు, ఉపాధ్యాయులకు అపారమైన గణిత విజ్ఞానాన్ని అందజేస్తాయి.
2. గణిత విజ్ఞాన సంపద పెంచుకోవడానికి తోడ్పడతాయి.

3. పోటీపరీక్షలలో పాల్గొనే ఔత్సాహికులకు తగిన సమాచారాన్ని అందజేస్తాయి.

4. ప్రతిభావంతులైన విద్యార్థులకు, ఉపాధ్యాయులకు జ్ఞాన నిధిగా ఉపయోగపడతాయి.

5. గ్రంథాలయాల్లోను, గ్రంథాలలోను లభించని కొన్ని గణిత విషయాలను గణిత పత్రికలు అందజేస్తాయి.

6. మనం చదవని, ఊహించని గణిత విషయాలను మనకు అందుబాటులోకి తెస్తాయి.

గణిత పత్రికల వల్ల లభించే సమాచారం :

- గణిత చారిత్రికాంశాలు
- గణితాంశాలపై ప్రశ్నానిధి
- సామాజిక, సాంకేతిక, శాస్త్రీయ రంగాలలో గణిత ప్రాముఖ్యత
- సంఖ్యా సామర్థ్య, మానసిక సామర్థ్య పరీక్షాంశాలు
- గణిత ఒలంపియాడ్ సమాచారం
- ప్రతిభావంతులకు సలహాలు, సూచనలు
- గణిత క్విజ్ సమస్యలు – గణిత క్రాస్‌వర్డ్ పజిల్స్ – ప్రహేళికలు – పద అన్వేషణలు మొదలగునవి.
- ఐఐటి, ఎంసెట్ మరియు ఇతర అన్ని స్థాయిలలో స్క్రీనింగ్ పరీక్షలు

వివిధ గణిత పత్రికలు – చిరునామాలు :

- Mathematics Today - New Delhi
- The Maths Teacher - Madras
- Mathematics Teaching - England
- గణిత చంద్రిక – Vijayawada
- Mathematical Education - Madras
- The Maths Education - Bihar
- గణిత వాహిని, రామచంద్రాపురం – East Godavari District
- గణిత – Rayachoti

4.7.2 గణిత గ్రంథాలయము (Maths Library) :

పాఠశాల ముఖ్య ఉద్దేశ్యం విద్యార్థులను విశాల దృక్పథం కలవారిగా, సృజనాత్మకత కలవారిగా, అదనపు పఠనాశక్తి కలవారిగా తయారుచేయడం. ప్రజ్ఞావంతులైన అభ్యాసకులకు కేవలం పాఠ్యపుస్తక జ్ఞానం, తరగతి బోధన సరిపోదు. ఇటువంటి వారి కోసం ప్రాథమికోన్నత పాఠశాలలో తప్పనిసరిగా గణిత గ్రంథాలయాన్ని ఏర్పాటు చేయాలి.

గణిత గ్రంథాలయము నందు గణిత పాఠ్యపుస్తకములు, సంప్రదింపు గ్రంథాలు (Reference Books), మనోరంజక పుస్తకాలు, మేగజైన్లు ఉండాలి. అప్పుడు గ్రంథాలయము పాఠకుల్ని ఆకర్షించే అవకాశం కలదు. పఠనానికి అనుకూల వాతావరణం ఉన్నపుడు గణిత అధ్యయనానికి అవకాశం ఉంటుంది. మంచి పుస్తకాలు అనేక ప్రతులు గ్రంథాలయంలో అందుబాటులో ఉన్నట్లయిన, అవి ఉపాధ్యాయులకు విద్యార్థులకు చక్కగా ఉ

పయోగపడతాయి. ఏ పుస్తకాలు చదవాలో, ఏ పుస్తకాలు ఏవిధంగా ఉపయోగపడతాయో తరగతి ఉపాధ్యాయులు తెలియజేస్తూ మార్గదర్శకులుగా ఉండాలి. ఇలా చేయడం వలన విద్యార్థులు సులభంగా, త్వరితంగా మంచి పుస్తకం ఎంపిక చేసుకునే అవకాశం ఉంటుంది.

గణిత గ్రంథాలయం ఉపయోగాలు :

- విద్యార్థికి, ఉపాధ్యాయునికి వారి జ్ఞానాన్ని పెంపొందించుకునేందుకు, ఆధునిక జ్ఞానాన్ని సముపార్జించేందుకు ఉపయోగపడుతుంది.
- ఉపాధ్యాయులకు కలుగు సందేహాల నివృత్తికి సంప్రదించు గ్రంథాలు (Reference Books) చక్కగా ఉపయోగపడతాయి.
- విద్యార్థులలో పఠనాసక్తి పెంపొందించబడును.
- విద్యార్థుల జ్ఞానాన్ని పెంపొందించుకునేందుకు మ్యాగజైన్లు చక్కగా ఉపయోగపడతాయి.
- గణిత శాస్త్రవేత్తల జీవిత విశేషాలు తెలుసుకొనుట ద్వారా విద్యార్థులలో నూతనోత్సాహం పెంపొందింపబడుతుంది.
- మనోరంజక గణిత పుస్తకాల అధ్యయనం ద్వారా విద్యార్థులలో గణిత పఠనం నందు ఆసక్తి పెంపొందుతుంది.

పాఠ్యపుస్తకములు :

- 6, 7, 8 తరగతుల గణిత పాఠ్యపుస్తకాలు, ఆంధ్రప్రదేశ్
- 6, 7, 8 తరగతుల గణిత పాఠ్యపుస్తకాలు, సిబిఎస్ఇ
- పూర్వ పాఠ్యపుస్తకాలు (6, 7, 8 తరగతులు)

సంప్రదింపు గ్రంథాలు :

- వేదగణితం – భారతీకృష్ణ తీర్థాజి
- లీలావతి గణితం – భాస్కరాచార్య
- సార సంగ్రహ గణితం – పావులూరి మల్లన్న
- వేదగణితం, లీలావతి గణితం, పావులూరి గణితం (7 పుస్తకాలు) – డా॥ రేమెళ్ళ అవధానులు
- సరళ వేదగణితం – దవళ్ బథియా
- వేదగణితం × వేదగణితం – చైతన్య
- శ్రీనివాస రామానుజన్ గణితజీవితం – డా॥ యన్.భాస్కర్‌రెడ్డి
- వేదగణితం–1,2,3 – శ్రీమతి యస్.ఉషాదేవి
- సంఖ్యా శాస్త్రము – బోదరాజు శ్యాంసుందర్
- గణిత భారతం – డా॥ ప్రఖ్యా సత్యనారాయణశర్మ
- ప్రాచీన గణితశాస్త్ర వైభవం – వి.శారదాదేవి
- Dictionary of Mathematics
- Mathematics for All - UNESCO
- How to solve it? - George Polya

◆ గణిత విజ్ఞాన సర్వస్వము - డా॥ ప్రఖ్యా సత్యనారాయణ శర్మ

◆ గణితము-సహ పాఠ్య కార్యక్రమాలు - డా॥ డి.యస్.యన్.శాస్త్రి

వినోద గణిత గ్రంథాలు

✳ సులభంగా గణిత సూత్రాలు - సి.యస్.ఆర్.యన్.మూర్తి

✳ మాథ్స్ మ్యాజిక్ - దేవినేని జగన్మోహనరావు

✳ వింత చదరాలు - శకుంతలాదేవి

✳ గణితంతో గారడీలు - డా॥ మహీధర నళినీమోహన్

✳ అంకెలతో ఆటలు - డా॥ టి.సత్యనారాయణరాజు

✳ అంకెల గారడీలు - గాజుల పద్మ

✳ గణితంలో గమ్మత్తులు - డా॥ మహీధర నళినీమోహన్

✳ అంకెలు-ఆటలు - శారదాదేవి

✳ వినోద గణితం - పి.ఆర్.రావు

ఇతరములు :

గణిత క్లబ్ - డా॥ డి.యస్.యన్.శాస్త్రి

4.7.3 గణిత ప్రదర్శనలు (Mathematics Fairs) :

గణిత సంఘం కార్యక్రమాలన్నింటిలో పాఠశాల గణిత శక్తి, ఆసక్తి ఏమిటో నిర్దిష్టంగా వ్యక్తీకరించే సాధనంగా గణిత ప్రదర్శన ప్రముఖ పాత్ర వహిస్తుంది. విద్యార్థులు ప్రదర్శనా వస్తువులను అవగాహనపరంగా తయారు చేయడానికి అవసరమైన పథకరచన గణిత ప్రదర్శనకు ఆయువుపట్టు. గణిత ప్రదర్శన అనేది విద్యార్థుల, ఉపాధ్యాయుల సమిష్టి కృషిని సమాజానికి చూపిస్తుంది. కొన్ని సందర్భాలలో వైజ్ఞానిక ప్రదర్శనల కంటె, విలక్షణమైనవిగా గణిత ప్రదర్శనలు ఉంటాయి.

గణిత ప్రదర్శన ఆవశ్యకత, ప్రయోజనాలు :

గణిత ప్రదర్శన పాఠశాలలో ఎందుకు అవసరం అంటే ఇది ప్రతిభావంతులైన విద్యార్థులకు

1. పరీక్షా పద్ధతులు విసరలేని సవాళ్ళను వారి ముందుంచి ఆ దిశలో తగిన మార్గదర్శనం, స్వయం సాధనకు ఉపకరిస్తుంది.
2. గణిత నమూనాలను తయారుచేయడంలో ప్రణాళికాబద్ధమైన అవగాహన, ప్రయత్నం, కుతూహలం, సాహసంతో కూడిన సంసిద్ధతకు దారితీస్తుంది.
3. పరిశీలనా శక్తి, అన్వేషణ, పరిశోధనా దృక్పథానికి సూచిక అవుతుంది.

సాధారణ స్థాయి, మందాభ్యాసకులైన విద్యార్థులు:

1. ఉపాధ్యాయులతో నమూనాల తయారీలో పాల్గొనడం ద్వారా కొంత చురుకుదనం పొందుతారు.
2. నమూనాల ప్రదర్శన, వివరణ ద్వారా గణిత భావాలను బాగా అవగాహన చేసుకుని స్థిరపరచుకుంటారు.
3 సంగీతం, నృత్యం వంటి ఇతర విషయాలలో సాధ్యంకానీ పోటీ, నైపుణ్య ప్రదర్శనను ప్రతిభావంతులైన విద్యార్థులతో

సమానంగా చేయవచ్చు.

గణిత ప్రదర్శన లక్ష్యాలు :

1. గణితాభ్యసనం ఒక ఆనందకరమైన, సృజనాత్మక వ్యాసంగంగా రూపొందించడం.
2. విద్యార్థులను గణితం దిశగా ఉత్తేజపరచడం
3. విద్యార్థులలో అన్వేషణ, పరిశోధనాత్మక దృక్పథాన్ని కలగచేయడం
4. విద్యార్థులలో, సమాజంలో గణితం పట్ల అనుకూల వైఖరులు కలిగేట్లు చేయడం.

గణిత ప్రదర్శన నిర్వహణ

గణిత ప్రదర్శన నిర్వహణను రెండు స్థాయిలలో నిర్వహిస్తారు.

ఎ) పాఠశాల స్థాయిలో గణిత ప్రదర్శన

బి) ఇతర స్థాయిలో గణిత ప్రదర్శన

ఎ) పాఠశాల స్థాయిలో గణిత ప్రదర్శన :

"గణిత సంబంధమైన చార్టులు, నమూనాలు, చలనచిత్రాలు, కేసెట్లు, మనోరంజకమైన గణిత వ్యాసక్తులతోను నిండిన ప్రత్యేక గణిత ప్రదర్శనలను ఏర్పాటు చేయడానికి ఆ సంస్థకు సంబంధించిన గణిత సంఘం ప్రయత్నించాలి."
– జె.యన్.కపూర్, 1988

ఏర్పాటుకు కొన్ని సూచనలు :

1. గణిత ప్రదర్శన ఎప్పుడు, ఎన్ని రోజులు జరపాలో విద్యాసంవత్సర ప్రారంభంలోనే నిర్ణయించాలి.
2. విద్యార్థులు నిర్ణయించుకున్న (లేదా వారికి నిర్ణయించిన) అంశాలను, తగిన రీతిన వర్గీకరించాలి. **ఉదా :** బోధనోపకరణాలు, పజిల్స్
3. అవకాశమున్నంత వరకు అంశాలకు వివిధ రకాల నమూనా ఉపకరణాలు చేయాలి. తప్పనిసరైనప్పుడే చార్టులు ఉపయోగించాలి.
4. గణిత ప్రముఖులను న్యాయనిర్ణేతలుగా పిలిచి, ప్రదర్శించిన అంశాలలో ఉత్తమమైన వాటిని ఎంపిక చేయాలి.

బి) ఇతర స్థాయిలలో గణిత ప్రదర్శన

వివిధ స్థాయిలలో నిర్వహించే గణిత ప్రదర్శనలలో పాల్గొనే పాఠశాలలకు (1) ప్రదర్శన స్థలం, చిరునామా (2) జరిగే సమయం, తేదీలు, నెల, (3) నిర్ణయించిన అంశాల వర్గీకరణ (4) ఒక్కో పాఠశాల నుంచి ఎన్ని అంశాలు, ఎందరూ, ఎలా ప్రదర్శించవచ్చు అనే పరిమితి, వివరాలు (5) తగినంత ముందుగానే సమాచారం, ఆహ్వానపత్రాల పంపిణీ (6) ప్రదర్శకులకు వివరాలు నమోదు సమయం, రావలసిన సమయం, వసతి, భోజన సదుపాయాల ఏర్పాటుకు సంబంధించి పూర్తి వివరాలు అందజేయడం, పొందడం చేయాలి.

గణిత ప్రదర్శన ప్రత్యేకతను చాలా చోట్ల సమాజం గుర్తించి, ఆదరిస్తోందనడంలో ఏమాత్రం సందేహం లేదు.

4.7.4 గణిత సంఘాలు (Mathematics Associations) :

పాఠశాల స్థాయిలోనే గాక పట్టణ, ప్రాంత లేదా మండలం, జిల్లా, రాష్ట్ర, దేశ, అంతర్జాతీయ స్థాయిలలో అనేక ప్రసిద్ధ గణిత సంఘాలు ఉండటం గమనించవచ్చు. ఈ స్థాయిలలో అవి అకాడమీ, అసోసియేషన్ అని సాధారణంగా

సొసైటీస్ రిజిస్ట్రేషన్ యాక్టు లేదా మరి ఏ అంతర్జాతీయ పద్ధతి ననుసరించో రిజిస్టర్ చేయబడి ఉపాధ్యాయ కేంద్రంగా పని చేస్తుంటాయి. ఇవి ప్రతిభా పరీక్షలు, మాథమేటిక్స్ ఒలింపియాడ్స్, పరిశోధనా వ్యాసక్తులు, జర్నల్స్, సదస్సులు, వార్షిక సమావేశాలు, జనరంజక గ్రంథాల ప్రచురణ, ప్రాంతీయ స్థాయిలో పనిచేసే సంఘాలకు సహకారం మొదలైన అనేక అంశాలను నిర్వహిస్తుంటాయి. వాటిలో కొన్ని సంస్థలు

1) ఆంధ్రప్రదేశ్ అసోసియేషన్ ఆఫ్ మ్యాథ్స్ టీచర్, (Andhra Pradesh Association of Maths Teachers, APAMT), హైదరాబాద్.
2) అసోసియేషన్ ఆఫ్ మాథమేటిక్స్, టీచర్స్ ఆఫ్ ఇండియా (Association of Mathematics, Teachers of India), (AMTI) చెన్నై.
3) ఇండియన్ సొసైటీ ఫర్ హిస్టరీ ఆఫ్ మాథమేటిక్స్ (Indian Society for History of Mathematics, ISHM), ఢిల్లీ.
4) అసోసియేషన్ ఫరం ఇంప్రూవ్‌మెంట్ ఆఫ్ మ్యాథ్స్ ఎడ్యుకేషన్ (Association for Improvement of Maths Education, A.I.M.Ed.), విజయవాడ.
5) రామానుజన్ మ్యాథ్స్ అకాడమి (Ramanujan Maths Academy), రామచంద్రాపురం, తూ.గో.జిల్లా.
6) మాథమెటికల్ సైన్స్ ట్రస్ట్ సొసైటీ (Mathematical Science Trust Society), ఢిల్లీ.
7) సొసైటీ ఫర్ మాథమెటికల్ సర్వీసెస్ అండ్ స్టాండర్డ్స్ [Society for Mathematical Services and Standards (SOMASS)], విశాఖపట్టణం
8) ఢిల్లీ అసోసియేషన్ ఆఫ్ మాథమెటిక్స్ టీచర్స్ [Delhi Association of Mathematics Teachers (D.A.M.T.)], ఢిల్లీ

గణిత ఫోరం (Maths forum)

గణిత అభివృద్ధికి చర్చలు, సమాచార మార్పిడి చాలా ముఖ్యమైనది. గణిత ఫోరమ్స్, గణిత ఉపాధ్యాయులకు మాత్రమే అనుకోరాదు. విద్యార్థులకు, గణిత ఉపాధ్యాయులకు, గణిత అభిరుచి గల వారందరికీ వారి స్థాయికి అనుగుణంగా చర్చలు జరిపి న్యాయబద్ధమైన సత్యాలను అందరూ అంగీకరింపచేయడానికి దోహదపడతాయి. (ఫోరమ్ అనగా న్యాయస్థానం).

రజిత $5-2 = 3$ అనే వ్యవకలనంలో ‘3’ భేదం అయితే 5, 2లను ఏమంటారు అని ప్రశ్నించింది.

అందరికీ ఇది వ్యవకలనం అని తెలుసు కాని, వాటికి గల పేర్లు చాలామందికి తెలియకపోవచ్చు. (5 - Minarend, 2-Subtrahend) (వ్యవకలనం) ఇలాంటి విషయాల చర్చల నిమిత్తం ‘గణితఫోరం’ తన ప్రత్యేకతను చాటుతుంది.

గణితం అభిరుచి గల విద్యార్థుల, ఉపాధ్యాయుల సమూహమే ‘గణిత ఫోరం’.

గణిత ఫోరం ఆవశ్యకత :

సాంకేతిక పరిజ్ఞానాన్ని సమర్థంగా ఉపయోగించుకోగలిగితే విద్యా కార్యక్రమాలను పలువురికి అందుబాటులోకి తీసుకురావచ్చు. వ్యవస్థ నిర్వహణను సులభతరం చేయవచ్చు. అభ్యాసకుల ప్రత్యేక అవసరాలు తీర్చవచ్చు. ప్రసార మాధ్యమాలను తరగతి గదిలో ఉపయోగించుకొని స్వీయ అభ్యసనం, ద్విముఖ అభ్యసనం, కాలనియమితి లేకుండా

బోధన, అభ్యసనలలో పాల్గొనవచ్చు.

అంతర్జాలం విస్తరిస్తున్న ఈ కాలంలో సమాచార మార్పిడి కోసం, వైవిధ్య సమస్యల విశ్లేషణల కోసం, గణిత ఫోరంల అభివృద్ధికి మార్గం చేసుకోవచ్చు.

గణిత ఫోరంలో ఎలా చేరవచ్చు :

రాష్ట్రంలోని ప్రతి జిల్లాలో కూడా గణిత ఫోరంలు నిర్వహించబడుతున్నాయి. ఇవి గణితంపై చర్చలు, సెమినార్‌లు, గణిత శాస్త్రజ్ఞుల జన్మదినోత్సవాలు జరుపుతున్నారు. అదేవిధంగా పోటీపరీక్షలు నిర్వహించి ప్రతిభ కనబరిచిన వారికి ప్రోత్సాహకాలు అందచేస్తున్నారు.

రాష్ట్రవ్యాప్త గణిత ఫోరంను 'AP Maths Forum' పేరు మీదుగా నిర్వహిస్తున్నారు. ఇందులో ఉపాధ్యాయులకు, విద్యార్థులకు, SRG లకు వేర్వేరుగా ప్రవేశాలు కలవు. గణిత ఫోరంలో చేరడానికి http:/www.apmathsforum.com ని వెబ్‌సైట్‌లో open చేయ్యాలి.

ఉపాధ్యాయులకు :

'AP Maths Forum' website మొదటి పేజీలో security code అని కనిపిస్తుంది. Security Code బాక్స్‌లో '5544332211' నంబరు టైపు చేయగానే Teacher details అని వస్తుంది.

ఇందులో టీచర్ యొక్క వ్యక్తిగత విషయాలను పూర్తి చేయవలెను. ఇందులోనే ఉపాధ్యాయుడు ఏ విషయంలో నిష్ణాతుడు అన్న విషయం కూడా తెలుపవచ్చు, వారి ఫొటోని కూడా (JPG mode) లో upload చేసుకోవచ్చు.

విద్యార్థుల కొరకు :

విద్యార్థులు చేరడానికి స్టూడెంట్ జాయిన్‌పై క్లిక్ చేయాలి. విద్యార్థులకు ఎలాంటి 'సెక్యూరిటీ కోడ్' ఉండదు. కాని 'నియమ నిబంధనలకు లోబడి ఉంచగలము' అని అంగీకారం తెలుపవలసి ఉంటుంది. వీరు ప్రశ్నలను అడగడానికి మాత్రమే అవకాశం కలదు.

లాగిన్ అయిన ఉపాధ్యాయులు కూడా వారి పాఠశాలలోని విద్యార్థులను వారి ఎకౌంట్స్‌లో చేర్చవచ్చు.

ప్రయోజనాలు :

'AP Maths Forum' నందు గణితంలో వివిధ రంగాలలో నిష్ణాతులైనవారు, SRG లు, పుస్తక రచయితలు, కరదీపిక రచయితలు ఉంటారు. కావున మనకు ఎలాంటి సందేహాలు ఉన్ననూ నివృత్తి చేసుకోవడానికి అవకాశం కలదు.

- SCERT వారు ఆమోదించిన పుస్తకాలు, ఆర్టికల్స్, పరిశోధనలు ఇందులో అందుబాటులో ఉంటాయి.
- గ్రంథాలయంలో గణితానికి సంబంధించిన పుస్తకాలు, గణిత జర్నల్స్, గణిత పత్రికలు అందుబాటులో ఉంటాయి.

నమూనాలు, పుస్తకములు, జర్నల్స్‌లను ఉపాధ్యాయులు కూడా upload చేసుకొనే వెసులుబాటు కలదు. అందువల్ల మన పరిశోధనలు, నమూనాలు మిగిలినవారితో పంచుకోవడానికి గణిత ఫోరం సాయపడుతున్నది. దీనివల్ల మనకు కూడా గుర్తింపు లభిస్తుంది.

- గణితానికి సంబంధించిన అన్ని పోటీపరీక్షలు, వాటి క్లిష్టతలను ఎప్పటికప్పుడు తెలుసుకోవచ్చు.
- రాష్ట్రవ్యాప్తంగా నిర్వహించే గణిత విద్యాసదస్సులు, ప్రదర్శనలకు సంబంధించిన విషయాలు కూడా

మరిన్ని 'APPS' మీకోసం :

❋ Maths Formulae Free

❋ Time Tables Games

❋ Math Flash Cards

❋ Formulae Expert

❋ Math Duel

❋ Mental Arithmetic

❋ Freaking Math

❋ 600+ Math Word Problem

❋ Math Puzzle

❋ Know Abacus

❋ Math for Kids

❋ Fun Maths

❋ Kids Math Game

Photo Math మొదలగునవి

'గణిత ఫోరం' సభ్యులతో సందేశాలు ఇచ్చిపుచ్చుకోవడం :

అంతర్జాలం విరివిగా ప్రాచుర్యం పొందుతూ 2G, 3G, 4G అని పోటీపడుతున్న కాలంలో మనం కూడా అంతే వేగంగా సమాచార మార్పిడి చేసుకోవలసిన అవసరం ఉంది. ముఖ్యంగా సామాజిక మాధ్యమాలకు బానిసలుగా మారుతున్న సమాజంలో తల్లిదండ్రులు, విద్యార్థులను అదే దారిలో గణితంలో అభివృద్ధిపరచడం కూడా ముఖ్యం.

ఇందుకోసం Mail Account Open చేయడం, చరవాణిలలో వేగంగా సందేశాలు పంపడం తెలిసి ఉండాలి.

1. Mail Account Open చేయడం : అంతర్జాలంలో Google Chrome open చేసుకొని Login పై క్లిక్ చేయగా Login (or) New User ID అని వస్తుంది. New User ID పై క్లిక్ చేసి మన వ్యక్తిగత వివరాలను పూర్తిచేసి submit చేయడంతో Account Open అవుతుంది.

సందేహాలు పంపడం : Account Open చేసిన తర్వాత 'Compose Mail' పై క్లిక్ చేసి To: వద్ద పంపవలసిన వారి Mail ID ని, Sub: వద్ద విషయం భావనను, Mail: వద్ద మొత్తం సందేశం టైపు చేసి పంపవలెను. ఏవైనా చిత్రాలు, వీడియోలు పంపవలసి వస్తే Attachments పై క్లిక్ చేసి పంపవలసిన చిత్రం లేదా వీడియోను సెలక్ట్ చేసి పంపవచ్చు.

2. Way 2 SMS : సమూహంలోని సభ్యులందరికీ ఒకేసారి సమాచారాన్ని పంపడానికి, ముందస్తుగా పంపుటకు Way 2 SMS ఉపయోగపడుతుంది. దీనిలో చిత్రాలు, వీడియోలు పంపలేము. సందేశం పంపుటకు Way 2 SMS లో Login ID, Password కలిగి ఉండాలి.

3. Whats App : నేటి ప్రపంచంలో చాలామంది 'Android' Phone లను ఉపయోగిస్తున్నారు. ఇటువంటి చరవాణిలలో సందేశాలు, చిత్రాలు, వీడియోలు పంపడానికి Whats App, Messenger, IMO, Hike, Skipe

మొదలగు Apps అందుబాటులో కలవు. What App ని ఎక్కువమంది ఉపయోగిస్తున్నారు.

Whats App ని కలిగిఉండటం :

ప్రస్తుత తరం ఆండ్రాయిడ్ చరవాణిలలో అంతర్జాల సదుపాయం ఉండాలి. Play Store నుండి 'Whats App' ని Download చేసుకొని మన Phone No. కు అనుసంధానించుకోవాలి.

గ్రూప్‌ను ఏర్పరచటం :

'Whats App' open చేసుకున్న తర్వాత పైన కుడివైపుగల search, ... భాగాలతో ..... పై నొక్కగా 'Create New Group' అని వస్తుంది. దీనిద్వారా గ్రూప్‌ను Create చేసి అందులో ఒకే ఆలోచన గల మిత్రుల Phone Number లను Join into the group లో చేర్చవలెను.

గ్రూప్ Create చేసినవారిని Admin లు అందురు. వీరికి మాత్రమే ఇతరులను చేర్చుకొనే వెసులబాటు ఉంటుంది. ఒకే గ్రూప్‌నకు ఎక్కువమంది Admin లు కూడా ఉండవచ్చు. గణితం అభివృద్ధికి గ్రూప్‌ను ఏర్పాటుచేసి ఎక్కువమందిని చేర్చుకోవడానికి 'Admin' ల సంఖ్య పెంచడం మంచిది.

సందేశం ఎలా పంపవచ్చు? :

పంపవలసిన గ్రూప్‌ను ఎన్నుకొని సమాచారం ముద్రించి పంపవచ్చు. చిత్రాలు, వీడియోలు పంపడానికి Attachments (.....) పై క్లిక్‌చేసి ఫోన్‌లో నిక్షిప్తం అయిన చిత్రం, వీడియోలు ఎన్నుకొని పంపవచ్చు.

4.7.7 గణిత వెబ్‌సైట్లు (Maths Websites) :

General :

The mathforum@Drexel University (http://www.mathforum.org)

The Centre for Innovation in Mathematics Teaching (CIMT) (http://cimt.plymouth.ac.uk)

Math cats - Fun math for kids (http://www.mathcats.com), count on (http://www.counton.org)

1. Illuminations - Resources for teaching maths (http://illuminations.nctm.org) Interactive (http://www.shodor.org/interactivate)

Gadsen Mathematics Initiative (http://www.2gisd.k12.nm.us/GMIWebsite/ImathResources.html)

2. Mathematical Interactivities - Puzzles, games and other online educational resources (http://mathematics.hellam.net)

3. National Library of Virtual Manipulatives (http://mlvm.usu'.edu/en/nav/vlibrary.html)

4. Mathnet - Interactive mathematics in education (http://www.mathsnetnet)

NewZealand maths (http://www.nzmaths.co.nz)

The Mactutor History of Mathematics archive (http://www.history.mcs.st-and.ac.uk/history)

Math cartoons (http://www.trottermath.net/humor/cartoons.html)

Math Com is (http://home.adelphi.edu/-stemkoski/mathematrixlcom ics.html)

Mathematical quotation server (http://math.furman.edu/-mwoodard/mQs/mQuots.html)

Wolfram Mathword - The web's most extensive mathematical resource (http://mathworld.wolftam.com)

Optical illusions and visual phenomena (http://www.michaelbach.de/ot)

Optical illusions gallery (http://www.unoriginal.co.uk/optical5.html)

Teachers resources online (http://www.cleavebooks.co.uk/trol/index.html)

Interactive:Activities (http://www.shodor.org/interactive/activities/#fun)

Maths articles (http://www.mathgoodies.com/articles)

Math words and some other words of interest (http://www.pballew.net/etvindex.html)

Portraits of scientists and mathematicians

(http://www.sil.si.edu/digitalcollections/hst/scientific-identity/CF/displayresults.cfm?alphasort-R)

Let epsilon<0 (http://epsilon.komplexifv.com)

Grand illusion (http://www.grand-illusions.com)

Portrait gallery - Mathematicians (http://mathdl.maa.org/mathDL/46?pa=content&sa=view

Document&nodeid=2437&bodyld=2241

Maths teaching ideas (http://www.teachingideas.co.uk/maths/contents.html)

4.7.8 Maths E-Books గణిత **e -** పుస్తకములు :

Illustrated maths formulas - salim (http://www.arvindguptatoys.com/arvindguptamathformulas.pdf)

Ramanujan - the man behind the mathematician Sundaresan and Padmavijayam (http://gyanpedia.in/tft/Resources/books/ramanujan.doc)

A mathematician's apology - G.H.Hardy (http://math.boisestate.edu/-holem/holmes/A%20Mathematician%27s%20Apology.pdt)

Puzzle maths - G.Gamov and stem (http://www.arvindguptatoys.com/arvindguptalpuzzlemath.pdf)

1000 uses of a hundred square - Leah Mildred Beardsley (http://www.mediafire.com/download.php?detnoirueie)

Geometry comic book - Jeane Pierre Petit (http://www.mediafire.com?udOnnnuizyy)

Elements - Eucid (http://www.mediafire.coml?udOnnnuizyy)

How children learn mathematics (http://gyanpedia.in/tft/Resources/books/mathsliebeck.pdt)

Suggested experiments in school mathematics - J.N.Kapur (http://www.arvindguptatoys.com/arvindguptalinkapur.pdt)

Primary resources - Maths (http://www.primaryresources.co.uk/maths/maths.html)

Proteacher! Maths lesson plans for elementary school teachers (http://www.proteacher.com/100000.html)

Maths activities (http://www.trottermath.net/contents.html)

Maths powerpoints (http://www.worldofteaching.com mathspowerpoints.html)

Maths is fun - maths resources (http://www.mathsisfun.com)

Middle school portal for maths and science teachers (http://www.msteacher.org/math)

Maths games, maths puzzles and maths lessons designed for kids and fun (http://www.coolmath4kids.com)

Numbers

Magic, squares, magic stars & other patterns (http://recmath.org/Magic%20squares)

Number recreations (http://www.shyamsundergupta.com)

Broken calculator - Maths investigation (http://www.woodlands-iunior-kent.sch.uk/maths/broken-calculator/index.html)

Calculator chaos (http://www.mathplayground.com/CalculatorChaos.html)

Primary school numeracy (http://durham.schooliotter.com/coxhoe/Curriculam+Links1Numeracy)

Quarks to Quasars, powers of 10 (http://www.wordwizz.com/pwrsof10.html)

Algebra :

Algebra puzzle (http://www.mathplayground.com/Algebra Puzzle.html)

Albebra tiles (http://mathbits.com/MathBits/AlgebraTiles/AlgebraTiles/MathBitss07ImpFree.html)

Geometry (http://www.cvffredin.co.uk)

The Factory : An interactive tool for creating and exploring fractals (http://library.thinkquestorg/3288/fractals.html)

Tessellate (http://www.shodor.org/interactivate/activities/Tessellate)

MathSphere-Freegraphpaper (http://www.mathsphere.co.uk/resourcesMathSphereFreeGraphPaper.html)

Paper models of polyhedral (http://www.korthalsaltes.com)

Problem Solving :

Mathpuzzle (http://www.mathpuzzle.com)

Puzzling world of polynedral dissections (http://iohnrausch.com/PuzzlingWorld?contents.html)

Interactive mathematics miscellany and Puzzles (http://www.cut-the-knotorg)

Puzzles and projects (http://www.delphiforfun.org/Programs/Indices/projectsIndex.html)

10ticks daily puzzle page (http://www.IOticks.co.uk/sdailyPuzzle.aspx)

Archimedes laboratory - teachers' resource : Improve problem solving skills (http://www.archimedes-lab.org/indexteachers.html)

Brain teasers (http://www.pedagonetcomfbrain/brainers.html)

Gymnasium for Brain (http://www.gymansiumforbrain.com)

Puzzles and games (www.thinks.com)

Miscellaneous :

Mathematical imagery (http://www.ioslevs.com)

4.7.8. గణిత బోధనలో సామాజిక వనరుల ఉపయోగం :

మనం చుట్టూ చూసే సమాజంలో ఎన్నో విషయాల్లో గణితం అంతర్లీనంగా ఉంది. ఒక తెలివైన ఉపాధ్యాయుడు, విద్యార్థులకు తాము నిత్యం చూసే ప్రతి వస్తువును గణితపరంగా చూడటం, తాము నిత్యం కలిసే వ్యక్తుల యొక్క పని పాటలలో గణితంలో గల అనుబంధం, సంబంధం లాంటి అంశాలను గురించి సమాచారాన్ని అందించగలడు. అప్పుడే ఏ విద్యార్థికైనా ఏ విషయాన్నయినా గణితపరంగా అధ్యయనం చేయడం, అర్థం చేసుకోవడం, విచక్షణ చేయడం, గణితపరంగా ఆలోచన చేయడం, తర్కం చేయడం, హేతుబద్ధంగా ఆలోచించడం అలవడుతుంది. ఉపాధ్యాయుడు అన్ని వేళలా విద్యార్థులను గణితం పట్ల సదభిప్రాయంతో ఉండేలా తయారుచేయాలి.

దర్జీ, వడ్రంగి, తోటమాలి మొదలైన మానవ వనరుల వినియోగం :

విద్యార్థి తన జీవితంలో చూసే ఎన్నో రకాల వృత్తి పనివాళ్ళకు గణితం ఎంత ఉపయోగమో, దాన్ని వారు ఎలా అనునిత్యం వినియోగిస్తారో గమనించే అవకాశాలు ఉపాధ్యాయుడు కలుగజేయాలి.

.... సహాయంతో కొలతలు తీసుకుని ఒక దర్జీ దుస్తులు ఎలా కుడతాడో విద్యార్థికి అర్థం కావాలి. కొలతలను బట్టి కుట్టిన దుస్తులు ఎంత అందంగా శరీరం మీద అమరిపోతాయో విద్యార్థికి అవగతం కావాలి. దర్జీ ఒక బట్టని కుట్టాలంటే ఎన్ని రకాల కొలతలు తీసుకుంటాడో విద్యార్థిని గమనించాలి. కొలతను ఎంత కచ్చితంగా తీసుకుంటాడో కూడా గమనించాలి. అపుడే విద్యార్థికి దర్జీ పనివారి గణిత జ్ఞానం, గణితం దర్జీకి ఎంత ప్రయోజనకారి లాంటి వివరాలు తెలుస్తాయి.

అదేవిధంగా ఒక వడ్రంగి ఒక వమేజాబల్లను తయారు చేయాలన్నా, నల్లబల్లను తయారుచేయాలన్నా ఏవిధంగా కొలతలు తీసుకుంటాడు, చెక్కని ఏవిధంగా సమతలంగా తీర్చిదిద్దుతాడో తెలుస్తుంది. సమతలంగా లేని నల్లబల్లపైగాని, మేజాబల్లపైగాని రాయడం అసౌకర్యమని కూడా అర్థం అవభుతుంది. ఒక మేజాబల్లకు గల నాలుగు కాళ్ళు అన్నీ ఒకేలాగా సమానంగా లేని బల్ల ఎలా నిలబడదో కూడా తెలుస్తుంది. తోటమాలి నారును వరుసగా

లైనుల్లో ఎలా వేస్తాడో, మొక్కలన్నీ గజిబిజిగా అయిపోకుండా అన్నింటినీ ఏవిధంగా క్రమంలో పాతి పెడతాడో అతని తోట చూస్తేనే అర్థం అవుతుంది. కొమ్మలన్నింటినీ క్రమంగా కత్తిరించడం, ప్రతీ మొక్కకూ సరిపడినంత మాత్రమే నీరు, ఎరువు వేయడం లాంటి అంశాలన్నీ గణిత భావనలే అని విద్యార్థి తెలుసుకుంటాడు. నేపథ్యం అవసరమని తెలుస్తుంది. అన్ని వృత్తుల పట్ల గౌరవం పెరుగుతుంది. అన్ని వృత్తుల వారిని మర్యాదగా చూడటం నేర్చుకుంటాడు. తద్వారా సంస్కారం అలవడుతుంది.

సంస్థాపరమైన వనరుల వినియోగం :

ఇప్పుడు గణితాన్ని నిత్యం తమ రోజూవారీ లావాదేవాల్లో వాడుకునే కొన్ని సంస్థల గురించి తెలుసుకుందాం. ఈ సంస్థల అన్ని కార్యక్రమాలు, దినవారీ పద్ధతులు గణిత మాధ్యమంలోనే సాగుతాయి.

1. బ్యాంక్ :

బ్యాంకుల్లో నిత్యం ఇచ్చే రుణాలు, వసూలు చేసే రుణాలు, వాటికి లెక్కించే వడ్డీలు వగైరా అన్ని పనులు సూటిగా గణితంతో సంబంధమున్న కార్యక్రమాలు. విద్యార్థులు బ్యాంకులకు వెళ్ళి వారిని గమనించి వారు సంకలనం, వ్యవకలనం, గుణకారం, భాగహారం ఎలా చేస్తారో, వడ్డీని ఎలా లెక్కిస్తారో, సంఖ్యలను ఏవిధంగా రాస్తారో నమోదు చేస్తారో తెలుసుకునే అవకాశం ఉపాధ్యాయుడు కలిగించాలి.

2. తపాలా ఆఫీసు :

తపాలా ఆఫీసుల్లో కేవలం ఉత్తరాల బట్వాడానే కాక వాటి అమ్మకం, పొదుపు పథకాలు లాంటి పనులు కూడా నిర్వహిస్తారు. స్టాంపులు ఏయే నగదులకు లభ్యం అవుతాయి, రిజిస్టర్ పోస్ట్‌లో ఎంత బరువుకి ఎంత సొమ్ము చెల్లించాలి, కార్డు కొలతలు ఎలా ఉంటాయి, పొదుపు పథకంపై వడ్డీని ఎలా లెక్కిసార్తు లాంటి అంశాలను తెలుసుకోవచ్చు. ఉపాధ్యాయుడు ముందుగా తపాలాశాఖ వారి అనుమతి పొంది విద్యార్థులను వారి వద్దకు ఒకరోజు క్షేత్ర పర్యటనకు తీసుకుని వెళ్ళవచ్చు.

3. మార్కెట్ (బజారు, సంత) :

మార్కెట్‌లో ఏమేమి దుకాణాలు ఉంటాయి. వాటిలో ఏయే వస్తువులు అమ్ముతారు లాంటి అంశాలను గమనించాలి. ఒక కూరల వ్యాపారి అన్ని కూరలను అమ్మిన తరువాత అవసరాన్ని బట్టి గుణకారం, భాగహారం, సంకలనం, వ్యవకలనం ఏవిధంగా త్వరితంగా, కచ్చితంగా చేయగలుగుతున్నాడు? ఆ వ్యక్తికి ఈ గణిత ప్రక్రియలను ఉపయోగపడతాయి లాంటి అంశాలపై విద్యార్థులకు జ్ఞానాన్ని ఉపాధ్యాయుడు కలుగజేయాలి. తాము గణితపరంగా సమస్యా సాధనకు తీసుకున్న సమయం కంటే త్వరితంగా ఒక వ్యాపారి సమస్య సాధన చేసే పద్ధతిని విద్యార్థులను గమనించనివ్వాలి. "సాధనమున పనులు సమకూరు ధరలోన" అన్నట్లు వారికి అది నిత్యసాధన అన్న విషయం విద్యార్థి గుర్తించాలి. ఇటువంటి ప్రతి వృత్తిలో గణితం ఏవిధంగా సమ్మిళితమై ఉందో విద్యార్థికి తెలియజేయాలి.

4.8 వార్షిక, యూనిట్, పీరియడ్ (పాఠ్య) పథకాల అర్థం, ఉద్దేశం వాటి నమూనా పథకాలు :

ఉపాధ్యాయుడు ప్రతి విద్యా సంవత్సర ప్రారంభంలో విద్యార్థుల్లో సాధించవలసిన సామర్థ్యాలు, బోధనాంశాలు, తగిన బోధనా పద్ధతులు, వాటికి పట్టే సమయం, కావలసిన బోధనాభ్యసన సామాగ్రి, అభ్యసన మూల్యాంకనం తదితర అంశాలను రూపొందించుకోవాలి. ఈ రూపకల్పననే 'ప్రణాళిక రచన' లేదా 'పథక రచన' అంటారు.

ప్రణాళిక రచన చేసుకోవడం వల్ల ప్రయోజనాలు :

✱ బోధనా కార్యక్రమం సులభతరం అవుతుంది.

✱ సకాలంలో అన్ని అంశాలు మెరుగైన పద్ధతిలో బోధన చేయవచ్చు.

✱ సకాలంలో బోధనాభ్యసన సామగ్రిని సిద్ధం చేసుకోవచ్చు.

✱ అభ్యసనా ఫలితాలను ఎప్పటికప్పుడు మూల్యాంకనం చేయవచ్చు.

✱ బోధనాభ్యసన ప్రక్రియల్లో కావలసిన మార్పులు, చేర్పులు చేయవచ్చు.

✱ లక్ష్యాత్మక విద్యను నిర్ణీత సమయంలో అందించవచ్చు.

ఉపాధ్యాయుడు బోధనకు ముందు చేసే ఆలోచనల రాత రూపాలే వార్షిక పథకం (Year Plan), పాఠ్య విభాగ పథకం (Unit Plan), పాఠ్యపథకం (Lesson Plan) లేదా పీరియడ్ పథకం (Period Plan).

4.8.1 వార్షిక పథకం (Year Plan) **:**

ఒక తరగతికి ఒక సంవత్సరంలో బోధించవలసిన గణిత పాఠ్యప్రణాళికను, అందుబాటులో ఉండే బోధనా సమయం దృష్ట్యా కొన్ని పాఠ్య విభాగాలుగా విభజించి, ప్రతి పాఠ్య విభాగ బోధనకు పట్టే సమయం, తద్వారా సాధించవలసిన లక్ష్యాలను / విద్యా ప్రమాణాలను సూచించే పట్టికే "వార్షిక పట్టిక" లేదా "వార్షిక పథకం".

వార్షిక పథక రచనకు గుర్తుపెట్టుకోవలసిన అంశాలు :

1. ఆ విద్యా సంవత్సరంలో సాధించవలసిన లక్ష్యాలు / విద్యా ప్రమాణాలు.
2. పాఠశాల పని దినాల సంఖ్య.
3. గణిత శాస్త్రాన్ని బోధించడానికి ఆ సంవత్సరంలో కేటాయించిన పీరియడ్ల సంఖ్య.
4. ఒక్కొక్క యూనిట్‌ను బోధించడానికి పట్టేకాలం.
5. ఉపాధ్యాయుడు తీసుకునే సెలవు దినాల సంఖ్య.
6. పరీక్షలు నిర్వహించడానికి అవసరమయ్యే దినాల సంఖ్య.
7. ప్రత్యేక సెలవు దినాలు.
8. ఉపాధ్యాయుడు వృత్యంతర శిక్షణ పొందే దినాల సంఖ్య, ఉపాధ్యాయ సమావేశ దినాల సంఖ్య.

పాఠశాల మొత్తం పని దినాల నుంచి పై 5,6,7,8 అంశాల మొత్తం దినాలను తీసివేసి మిగిలిన దినాలకు వార్షిక పథకం రూపొందించాలి.

వార్షిక పథక ప్రయోజనాలు :

ఉపాధ్యాయుడు...

∗ విద్యాసంవత్సరంలో సాధించవలసిన విద్యాప్రమాణాలు తరగతివారీగా నిర్ణయించుకొనుటకు అవకాశం కలదు.

∗ విద్యా సంవత్సరమునకు అవసరమైన బోధనాభ్యసన సామాగ్రిని సిద్ధం చేసుకోవచ్చు.

∗ ఏ యూనిట్‌ను, ఏ నెలలో, ఎంతమేరకు బోధించాలో తెలుసుకుంటాడు.

∗ ప్రణాళికాబద్ధంగా బోధించడాన్ని అలవాటు చేసుకుంటాడు.

∗ సరియైన విధంగా మూల్యాంకనం చేయడానికి అవసరమైన సాధనాలను రూపకల్పన చేసుకోవచ్చు.

వార్షిక ప్రణాళిక సోపానాలు

1. తరగతి :

2. విషయం :

3. అవసరమైన పీరియడ్ల సంఖ్య :

1. బోధనాభ్యసనకు అవసరమైన పీరియడ్ల సంఖ్య :

2. అభ్యసనానికి అవసరమైన పీరియడ్ల సంఖ్య :

3. ప్రాజెక్టు ప్రదర్శనకు అవసరమైన పీరియడ్ల సంఖ్య :

మొత్తం పీరియడ్లు :

4. విద్యాసంవత్సరం పూర్తయ్యేసరికి పిల్లలు సాధించవలసిన సామర్థ్యాలు :

1. సమస్యాసాధన :
2. కారణాలు-నిరూపణలు చేయడం :
3. వ్యక్తపరచటం : విద్యాసంవత్సరం పూర్తిఅయ్యేసరికి పిల్లలు ఏమేమి సాధించ
4. అనుసంధానం చేయటం : వలెనో సామర్థ్యాలవారీగా నిర్ణయించి రాయాలి.
5. దృశ్యీకరణ - ప్రాతినిధ్యపరచడం :

5. మాసవారీ విభజన ప్రణాళిక :

మాసం	యూనిట్ పేరు	అవసరమైన పీరియడ్ల సంఖ్య	బోధనా వనరులు	నిర్వహించవలసిన కార్యక్రమాలు

6. వార్షిక ప్రణాళిక అమలుపై ఉపాధ్యాయుని ప్రతిస్పందనలు :

మాసవారీగా ఉపాధ్యాయులు రూపొందించుకున్న ప్రణాళిక అమలు తీరుపై ఫలితాలపై స్వీయ ప్రతిస్పందనలను రాసుకోవాలి.

7. వార్షిక ప్రణాళిక అమలుపై ప్రధానోపాధ్యాయుని సలహాలు, ప్రతిస్పందనలు :

వార్షిక ప్రణాళికలోని 6, 7 సోపానాలనుబట్టి ఉపాధ్యాయుల నిష్పాదన (పెర్ఫామెన్స్) స్థాయిని లెక్కగట్టవచ్చు. ఇవి ప్రతి సంవత్సరం తప్పనిసరిగా మాసవారీగా నమోదు చేయాలి.

నమూనా వార్షిక ప్రణాళిక

1. తరగతి : 6

2. విషయం : గణితం

3. అవసరమైన పీరియడ్ల సంఖ్య :

1. బోధనా పీరియడ్లు : 187

2. అభ్యాసం పీరియడ్లు : 63

మొత్తం పీరియడ్లు : 250

4. సంవత్సరం పూర్తయ్యేసరికి పిల్లలు సాధించవలసిన సామర్థ్యాలు :

1. సమస్యాసాధన :

- ఐదంకెల సంఖ్యల వరకు చతుర్విధ ప్రక్రియలలో పదసమస్యలు సాధిస్తారు.
- రెండు లేదా అంతకంటే ఎక్కువ బ్రాకెట్లు కలిగిన సంఖ్యా ప్రవచనాలను సూక్ష్మీకరిస్తారు.
- పూర్ణాంకాలు, పూర్ణసంఖ్యలను చతుర్విధ ప్రక్రియలలో సాధిస్తారు.
- సజాతి, విజాతి భిన్నాల సంకలనము, వ్యవకలనం చేయును.
- దశంశ భిన్నాలకు సంబంధించిన పదసమస్యలను సాధించును.
- సరళ మార్గములలో చరరాశి విలువలను కనుగొనును (ప్రతిక్షేపణ పద్ధతి ద్వారా).
- ఏకవస్తు మార్గములో పదసమస్యలను సాధించును.
- నిష్పత్తికి విలోమనిష్పత్తులను కనుగొనుము.
- నచ్చిన రేఖాఖండమును కొలుచును.
- జ్యామితీయ ఆకృతుల సౌష్టవాలను కనుగొనును.
- చతురస్ర, దీర్ఘచతురస్ర చుట్టుకొలతలు, వైశాల్యాల సమస్యలను సాధించును.
- అవర్గీకృత దత్తాంశమును వర్గీకృత దత్తాంశముగా నిర్మించును.
- క.సా.గు., గ.సా.భా.లకు సంబంధించిన సమస్యలు చేయును.
- భాజనీయతా సూత్రాలను సమీకరించును.

2. కారణాలు – నిరూపణలు :

- సంఖ్యా ప్రక్రియలలో ఫలితాన్ని అంచనా వేయటం.
- స్థానవిలువల భావనతో పెద్ద సంఖ్యలను పోల్చడం.
- ఇచ్చిన సంఖ్యలతో సంఖ్యలు తయారుచేసి చిన్న పెద్ద అంకెలను ఎన్నుకోవడం, ఆరోహణ, అవరోహణ క్రమాలలో రాయటం.
- సంఖ్యా ధర్మాలను చతుర్విధ ప్రక్రియల పరంగా సరిచూడటం.
- భాజనీయతా సూత్రాల వెనుకగల తార్కికతను కనుగొనటం.
- క.సా.గు., గ.సా.భా.లు సంఖ్యల సంబంధాన్ని సరిచూచును.
- N, W, Z ల మధ్య తేడాలు చెప్పును.
- ఇచ్చిన క్రమాలను సాధారణీకరించి బీజీయ సమాసాలుగా వ్యక్తపరచును.
- నిష్పత్తుల ప్రమాణాలు ఎందుకుండాలో వివరించును.
- నిష్పత్తుల అనుపాత ధర్మాన్ని సరిచూచును.

- ప్రాథమిక జ్యామితీయ భావనలలోని వైవిధ్యాలను గుర్తించును.
- త్రిభుజము, చతుర్భుజాలను పోల్చును.
- కోణాల కొలతలను అంచనావేసి, సరిచూచును.
- కోణాలను వర్గీకరించును, పోల్చును.
- సౌష్ఠవ, అసౌష్ఠవ ఆకారాల మధ్య తేడాలను వివరించును.
- రేఖల జతలను పరిశీలించి, లంబాలో కాదో అంచనావేయును.
- క్రమ బహుభుజి, సాధారణ బహుభుజుల మధ్య తేడాలను వివరించును.
- త్రిమితీయ ఆకృతులను వర్గీకరించును (పట్టకాలు, పిరియడ్‌లు).
- పటాలలో చుట్టుకొలత, వైశాల్యానికి గల తేడాను వివరించును.
- చుట్టుకొలత, వైశాల్యాలు కనుగొనుటలో దోషాలను గుర్తించి, సవరించును.
- ఇచ్చిన పటాల చుట్టుకొలత, వైశాల్యాలను అంచనా వేయుటకు ప్రయత్నించును.

3. వ్యక్తపరచటం :

- ఐదంకెల సంఖ్య వరకు, సంఖ్యారూపాన్ని సంజ్ఞారూపంలోకి, సంజ్ఞారూపాన్ని సంఖ్యారూపంలోకి మార్చును.
- సంఖ్యలను >, <, = వంటి గుర్తులతో పోల్చును.
- N, W, Z లను అవగాహన చేసుకొని, వాటి ఆవశ్యకతను వివరించును.
- కుండలీకరణాలను ఉపయోగించును.
- నిత్యజీవిత సందర్భాలను బీజీయ సమాసాలుగా, బీజీయ సమాసాలను నిత్యజీవితంలో వచ్చే సందర్భాలుగా మార్చును.
- నిష్పత్తులను సంజ్ఞారూపంలో రాయును. గుర్తులను గుర్తించును.
- ప్రాథమిక జ్యామితీయ భావనలకు నిత్యజీవిత ఉదాహరణలిచ్చును.
- జ్యామితి చరిత్రను, ఆవశ్యకతను వివరించును.
- ద్విమితీయ పటాలలో పరావర్తన సౌష్ఠవాన్ని వాటి సౌష్టవ అక్షాలతో వివరించును.
- చతురస్ర, దీర్ఘచతురస్ర వైశాల్యము, చుట్టుకొలతల సూత్రాలను, సంజ్ఞలను వివరించును.
- దిమ్మ చిత్రాలు, పటచిత్రాల గుణ-దోషాలను వివరించును.

4. సంధానం చేయడం :

- నిత్యజీవితంలో పెద్దసంఖ్యల వినియోగాన్ని అర్థం చేసుకోవటం.
- N, W, Z ల మధ్య సంబంధాన్ని అవగాహన చేసుకోవటం.
- క.సా.గు, గ.సా.భాలను నిజజీవిత సందర్భాలలో వినియోగించుకొనును.
- చరరాశులను వాడటం ద్వారా బీజీయ సమాసాలను ఏర్పరచి, నిజజీవిత సమస్యలను సాధించును.
- సంఖ్యా వ్యవస్థను, బీజీయ వ్యవస్థను పరస్పర సంధానించును.

– కాలము–పని, కాలము–దూరము, నిష్పత్తి అనుపాతములకు సంబంధించి సమస్యలను అనుపాత ధర్మాన్ని అనుసరించి సాధించును.

– పరిసరాలలో జ్యామితీయ ఆకారాలను దృగ్గోచరం చేయును.

– వృత్తం, వృత్తంలోని వివిధ భాగాలమధ్య గల సంబంధాన్ని అవగాహన చేసికొనును.

– పరిసరాలలో పరావర్తన సౌష్ఠవాన్ని గుర్తించును.

– పరిసరాలలో ఉన్న త్రిమితీయ ఆకారాలను గుర్తించి పేరుతో పిలుస్తారు. త్రిమితీయ ఆకారాల మధ్యగల సంబంధాలను, భేదాలను అవగాహన చేసుకుంటారు.

– వైశాల్యాల ప్రమాణాల మధ్య సంబంధాన్ని నెలకొల్పును.

– నిజజీవితంలో పటచిత్రాలు, దిమ్మచిత్రాల వినియోగాన్ని అవగాహన చేసుకుంటారు.

5. ప్రాతినిధ్యపరచటం :

– సంఖ్యలను విస్తరణ రూపం, సంక్షిప్తరూపంలో తెలుపటం.

– పూర్ణాంకాలు, పూర్ణసంఖ్యలను సంఖ్యారేఖపై సూచించటం.

– పూర్ణాంకాల, పూర్ణసంఖ్యల సంకలన వ్యవకలనాలను సంఖ్యారేఖపై చూపును.

– భిన్నాలను పటరూపంలో ప్రాతినిధ్యపరచటం.

– సరి, బేసి సంఖ్యల సాధారణ రూపాలను తెల్పటం.

– ప్రాథమిక జ్యామితీయ ఆకారాలను పటరూపంలో ప్రదర్శించును.

– ఇచ్చిన ద్విమితీయ పటాలకు సౌష్ఠవ అక్షాలను గీయును.

– కోణ, లంబ సమద్విఖండన రేఖలు గీయును.

– త్రిమితీయ ఆకృతులను ద్విమితీయ ఆకృతులుగా కాగితంపై ప్రదర్శించును.

– బహుభుజి వైశాల్యాన్ని షేడ్ చేయుట ద్వారా సూచించును.

– దత్తాంశాన్ని పటచిత్రాలు, దిమ్మచిత్రాలలో సూచించును.

– పటచిత్రాలు, దిమ్మచిత్రాలను చదువును.

5. మాసవారీగా విభజన ప్రణాళిక :

మాసం	యూనిట్ పేరు	పీరియడ్లు		బోధనా వనరులు
		బోధనకు	అభ్యాసానికి	
జూన్	మన సంఖ్యలను తెలుసుకుందాం	11	4	ప్రమాణాల చార్టు అంకెలు (0–9 వరకు) 6 సెట్లు హిందూ సంఖ్యామానం బ్రిటీష్ సంఖ్యామానం చార్టులు, పెద్దసంఖ్యలను సూచించే సేకరణ శ్రీనివాస రామానుజన్ ఫొటో

				ఇంటర్‌నెట్ మరియు యాప్స్
జూన్–జూలై	పూర్ణాంకాలు	10	3	సంఖ్యారేఖ ఛార్టు <, >, = ఫ్లాష్‌కార్డులు ధర్మాలకోసం కృత్యానికి కావలసిన కార్డుబోర్డు, చార్టు, చింతగింజలు, అంతర్జాలం, యాప్స్
జూలై	సంఖ్యలతో ఆడుకుందాం	17	6	సంఖ్యాపట్టిక యొక్క చార్టు, భాజనీయతా సూత్రాలు సూచించే చార్టు, చింతగింజలు
జూలై–ఆగస్టు	ప్రాథమిక జ్యామితీయ భావనలు	15	5	రేఖ, రేఖాఖండం, కిరణాలను వివరించే ఛార్టు, త్రిభుజం ఆకారాలు, అగ్గిపుల్లలు, వృత్త ఆకారాల సేకరణ వృత్తాన్ని రకరకాలుగా విభజించి, అర్ధవృత్తం, సెక్టారు వంటివాటిని తయారు చేసుకోవటం
ఆగస్టు–సెప్టెంబరు	రేఖలు, కోణముల కొలతలు	15	4	పాత గడియారం, కత్తెర, స్ట్రాలు, కోణమానిని, కోణము, కొలతల ఛార్టు, జ్యామెట్రిక్ బాక్స్ రేఖలు, కోణాలు సూచించే నిత్యజీవితంలో ఉపయోగించే వస్తువులు
సెప్టెంబర్	పూర్ణసంఖ్యలు	11	3	– పూర్ణసంఖ్యల ఛార్టు – ఋణపూర్ణ సంఖ్యల ఉనికిని తెలిపే చిత్రాల ఛార్టులు, బొమ్మలు – పూర్ణసంఖ్యలను సూచించే బీకరు (తయారు చేసుకున్నది) – కూల్‌డ్రింక్ సీసా మూతలు – పూర్ణసంఖ్యల సంకలన వ్యవకలనానికి సంబంధించిన కృత్యాలు
సెప్టెంబర్–అక్టోబర్–	భిన్నాలు–దశాంశ భిన్నాలు	17	7	– భిన్నాలను సూచించే రకరకాల వస్తువులను కత్తిరించి ఉంచు

నవంబర్				కోవటం – అపక్రమ, మిశ్రమ భిన్నాలను సూచించే పటాలు – భిన్నాలను సూచించే సంఖ్యా ఛార్టు – సమాన భిన్నాలను సూచించే ఫ్లాష్‌కార్డులు – దశాంశ భిన్నాల ఆవశ్యకతను తెలిపే బొమ్మలచార్టు – అంతర్జాలం, యాప్స్
నవంబర్	దత్తాంశ నిర్వహణ	10	3	– 6వ తరగతి విద్యార్థులకు అవసరమైన దత్తాంశ సేకరణ ప్రాజెక్టుల సేకరణ – వివిధ దినపత్రికల నుండి కమ్మీ చిత్రాలు, రేఖాచిత్రాల సేకరణ – పి.సి.మహాలనోబీస్ చిత్రం – రేఖాచిత్రాలలో బార్ చిత్రాలను గీచి యుంచుకోవటం
నవంబర్– డిసెంబర్	బీజగణిత పరిచయం	15	5	– అగ్గిపుల్లలు, బొట్టుబిళ్లలు – సాధారణ త్రాసు – సమాసానికి, సమీకరణానికి తేడా తెలిపే వివరణ ఛార్టు – స్థిరరాశి, చరరాశికి గల తేడాలు
డిసెంబర్	చుట్టుకొలతలు, వైశాల్యాలు	16	6	– చుట్టుకొలతలు, వైశాల్యానికి సంబంధించిన ఛార్టులు – త్రిభుజాలు, చతుర్భుజాల పటాల సేకరణ – గ్రాఫ్ కాగితం – జ్యామితీయ పెట్టె – అక్రమాకార వస్తువులు
జనవరి–	నిష్పత్తి, అనుపాతము	16	4	– నిష్పత్తి ఆవశ్యకతను తెలిపే

ఫిబ్రవరి				ఉదాహరణలు కలిగిన చార్టు – ప్రమాణాల మార్పును తెలిపే అంశాల ఛార్టు – అనుపాతాన్ని అవగాహనపరిచే వివిధ ఫొటోలు
ఫిబ్రవరి	సౌష్ఠవం	7	4	– రకరకాల చిత్రాలు – ఇంగ్లీషు, తెలుగు అక్షరాలు – త్రిభుజం, వృత్తం, చతురస్రం పటాల సేకరణ – కత్తెర – జ్యామితీయ పెట్టె
మార్చి	ప్రాయోగిక జ్యామితి	20	7	– జ్యామితీయ పెట్టె, స్కేలు, కోణమానిని, విభాగిని, మూలమట్టాలు, వృత్తలేఖిని – నిర్మాణాలను వివరించే ఛార్టు
మార్చి–ఏప్రిల్	త్రిమితీయ–ద్విమితీయ ఆకారాల అవగాహన	7	2	ప్రాచీన, వివిధ రకాల త్రిమితీయ వస్తువులు, పట్టకం, పిరమిడ్ ద్విమితీయ ఆకారాల ఛార్టు క్రమ బహుభుజులను సూచించే ఛార్టు

6. వార్షిక ప్రణాళిక అమలుపై ప్రధానోపాధ్యాయుని సలహాలు, ప్రతిస్పందనలు :

ప్రధానోపాధ్యాయులు కూడ వారి అభిప్రాయాలను నమోదు చేయాలి.

సూచన : SCERT, AP, Amaravati వారు సూచించిన విధముగా మార్పులు, చేర్పులు చేసుకొనవలయును.

4.8.2 యూనిట్ పథకం (Unit Plan) :

ఒక తరగతిలో ఒక పాఠ్యవిషయానికి చెందిన పాఠ్యప్రణాళికలోని అంశాలన్నింటిని విడివిడి అంశాలుగా భావించకుండా ఒక సామాన్య సూత్రం లేదా నియమం ఆధారంగా ఒకచోట చేర్చి బోధించవలసిన శీర్షికలు లేదా అంశాల కూటమినే "పాఠ్య విభాగం (యూనిట్)" అంటాం.

ఒక యూనిట్‌కు సంబంధించి రాసిన విషయ విశ్లేషణ, పిల్లల్లో అభివృద్ధిపరచవలసిన సామర్థ్యాలను, వాటిని అభివృద్ధిపరచడానికి కావలసిన పీరియడ్ల సంఖ్యను సూచించే పట్టికను తయారుచేసుకోవాలి. దీన్నే "యూనిట్ పథకము" అంటారు.

యూనిట్ లక్షణాలు :

1. సారూప్యత కలిగి, సంబంధం కలిగి ఉన్న వివిధ గణిత భావనల సమన్వయమే యూనిట్.

2. విషయ విభాగంలో వివిధ భాగాలున్నప్పటికీ వాటిని కూర్చి, సమన్వయపరిచి ఒక అంతిమ ఉద్దేశంతో ఇవ్వడం జరిగి ఉంటుంది.

3. దానిని బోధించడానికి కాలం ఒక పీరియడ్ కంటే ఎక్కువ ఉంటుంది.

4. నిర్దేశిత లక్ష్యాలను నెరవేర్చడానికి అనుకూలంగా ఉంటుంది.

5. వివిధ అభ్యసనా కృత్యాలకు అవకాశముంటుంది.

యూనిట్ పథకంలోని సోపానాలు :

1. సంగ్రహ విషయ విశ్లేషణం

ఎ. అధ్యాయ ప్రాధాన్యం, ఈ యూనిట్‌లోని విషయ భాగానికి నిత్యజీవితంలో ఎటువంటి సంబంధం ఉందో రాయాలి.

బి. యూనిట్ కీలక భావనలు, ఉపభావనలు, మూల సూత్రాలు, గుర్తులు, సాంకేతికాలు, న్యాయాలు మొదలైనవి.

2. యూనిట్‌ను బోధించడానికి విద్యార్థి పూర్వజ్ఞానం.

3. యూనిట్‌కు సంబంధించిన కాలనిర్ణయ పట్టిక.

4. యూనిట్‌ను బోధించడంలో ప్రత్యేక బోధనాభ్యసన సామాగ్రి.

5. యూనిట్‌ను బోధించడం ద్వారా నెరవేరే లక్ష్యాలు.

6. యూనిట్‌లో కల్పించే బోధనాభ్యసన కృత్యాలు.

7. యూనిట్‌లోని వివిధ భాగాలను మూల్యాంకనం చేసే విధానం.

యూనిట్ పథకం వల్ల ప్రయోజనాలు :

1. యూనిట్‌లోని సమైక్య లక్ష్యాలను ఏర్పరచడానికి వీలవుతుంది.

2. నిర్ణీత సమయంలో యూనిట్ పూర్తిచేయడానికి వీలవుతుంది.

3. యూనిట్‌ను బోధించే సమయంలో కల్పించే వివిధ కృత్యాలను ఏర్పరచడానికి ఉపాధ్యాయుడు ముందుగానే సంసిద్ధత పొందుతాడు.

4. కావలసిన బోధనాభ్యసన సామాగ్రిని సమకూర్చుకోవడానికి వీలవుతుంది.

6. ఉపాధ్యాయుడు అన్ని పాఠ్యాంశ విషయాలను వరుసక్రమంలో బోధించగలుగుతాడు.

7. ఒక యూనిట్ పూర్తిచేసిన తరువాత, యూనిట్ పరీక్ష ద్వారా విద్యార్థులు పొందిన సామర్థ్యాలను మదింపు చేయగలుగుతాడు.

యూనిట్ ప్రణాళిక సోపానాలు

1. తరగతి :

2. పాఠము పేరు / యూనిట్ పేరు :

3. కావలసిన పీరియడ్లు : బోధనా పీరియడ్‌లు – అభ్యాసం కొరకు పీరియడ్‌లు

4. పాఠ్యబోధన పూర్తగుసరికి పిల్లలు సాధించవలసిన విద్యాప్రమాణాలు :

1. సమస్యా సాధన :

2. కారణాలు – నిరూపణలు :

3. వ్యక్తపరచడం :

4. అనుసంధానం :

5. ప్రాతినిధ్యపరచటం – దృశ్యీకరణం :

5. బోధనాభ్యసన సామాగ్రి :

6. పీరియడ్ల వారీగా పాఠ్యాంశ విభజన :

పీరియడ్ల సంఖ్య	బోధనాంశం	బోధనా వ్యూహాలు	వనరులు	మూల్యాంకనం

గమనిక : ఈ పట్టికలో బోధనా వ్యూహాలకు సంబంధించి అది వ్యక్తిగత కృత్యమో/జట్టు కృత్యమో/ పూర్తి తరగతి కృత్యమా అని రాసి, పాఠ్యాంశ అవగాహనకు మన వ్యూహాలను వీలైనంత క్లుప్తంగా రాసుకోవాలి. ఉదాహరణకు పూర్తి తరగతిలో బ్రెయిన్ స్టార్మింగ్ ద్వారా భావనల పరిచయం. ఇక్కడ బ్రెయిన్ స్టార్మింగ్ అనునది మన వ్యూహం.

నమూనా యూనిట్ ప్రణాళిక

1. తరగతి : 7వ తరగతి

2. యూనిట్ పేరు : పూర్ణ సంఖ్యలు

3. పీరియడ్ల సంఖ్య : 15

4. సాధించాల్సిన విద్యా ప్రమాణాలు :

1. సమస్యాసాధన :

1) పూర్ణసంఖ్యల చతుర్విధ ప్రక్రియలకు సంబంధించిన సమస్యలను సాధించగలరు.

2) పూర్ణసంఖ్యలపై పదసమస్యలను సాధించగలరు.

2. కారణాలు చెప్పడం – నిరూపణలు చేయడం :

1) సున్నాతో భాగహారం ఎందుకు అర్ధరహితమో వివరించగలరు.

2) పూర్ణసంఖ్యలను, సహజ సంఖ్యలతో పోల్చి, తేడాలు చెప్పగలరు.

3) సంఖ్యల ధర్మాలను (పూర్ణసంఖ్యల) ఉదాహరణలతో వివరించగలరు.

3. వ్యక్తపరచడం :

1) పూర్ణసంఖ్యల ధర్మాలను గణిత పరిభాషలో వ్యక్తపరచగలరు.

4. అనుసంధానం :

1) పిల్లలు నిత్యజీవితంలో అనగా వస్తువుల ధరలలో పూర్ణసంఖ్యలు ఉపయోగించగలరు.

2) పిల్లల యొక్క ఆటలలో పూర్ణసంఖ్యలను ఉపయోగించగలరు.

5. ప్రాతినిధ్యపరచడం – దృశ్యీకరణం :

1) పిల్లలు పూర్ణసంఖ్యలను సంఖ్యారేఖపై చూపగలరు.

5. బోధనాభ్యసన సామగ్రి :

1) సంఖ్యారేఖని సూచించే చార్టు, 2) సీసా మూతలు, 3) సంఖ్యలు రాసిన చార్టు (1–100),

4) ఫ్లాష్‌కార్డులు,

5) పూర్ణసంఖ్యల సంకలన, వ్యవకలన, గుణకార, భాగహారరాలను సంఖ్యారేఖపై సూచించే చార్టులు, వైడ్ టేబుల్స్ .

4.8.3 పీరియడ్ పథకం (Period Plan) :

"A Lesson plan is actually a plan of action"

("పాఠ్య పథకం వాస్తవంగా ఒక కార్యచరణ ప్రణాళిక) - Lester B. Sands

యూనిట్‌లోని సబ్ యూనిట్ నందు ఒక పీరియడ్‌లో బోధించడానికి తగిన విషయంపై తయారుచేసే పథకాన్ని "పాఠ్యపథకం" లేదా "పీరియడ్ పథకం" అంటాం.

Bining and Bining ప్రకారం "రోజువారీ పాఠ్యపథకంలో లక్ష్యాలను నిర్వచించడం, విషయాన్ని ఎంపికచేసి క్రమంలో ఉంచడం, పద్ధతిని, విధానాన్ని నిశ్చయించడం ఇమిడి ఉంటాయి."

పాఠ్యపథకం అనేది ఉపాధ్యాయుని కార్యక్రమం. ఇది ఉపాధ్యాయుని నైపుణ్యం, వివేకం, సామర్థ్యం, అతని మూర్తిమత్వాన్ని ప్రతిబింబిస్తుంది.

పీరియడ్ పథకం పాఠ్యాంశాన్ని గాని, యూనిట్‌ను గాని ఏకీకృతంగా దృష్టిలో ఉంచుకొని తయారుచేయాలి. అంటే ఒక పాఠ్యాంశాన్ని గాని, యూనిట్ గాని 10 పీరియడ్‌లలో పూర్తి చేయాలనుకున్నప్పుడు ప్రతి పీరియడ్‌లో సాధించే లక్ష్యాలు, పాఠ్యాంశ ముగింపునకు సాధించవలసిన బోధనా లక్ష్యాలను దృష్టిలో ఉంచుకొని పాఠ్యపథకం తయారుచేయాలి.

పీరియడ్ పథకం (పాఠ్య పథకం) ప్రయోజనాలు :

1. పాఠ్యాంశాల ద్వారా సాధించాల్సిన లక్ష్యాలను విద్యా ప్రమాణాలు ముందుగా స్పష్టంగా ఏర్పరచుకోవచ్చు.
2. ఆ లక్ష్యాల సాధనకు కావలసిన సంసిద్ధతను ఉపాధ్యాయుడు మానసికంగా పొందగలడు.
3. బోధనాభ్యసనకు కావలసిన సామాగ్రిని తయారుచేసుకోగలరు.
4. సేకరించవలసిన సామగ్రిని విద్యార్థులు పరిసరాల నుంచి సేకరించడం వల్ల వారికి అభ్యసన పట్ల ఆసక్తి ఏర్పడుతుంది.
5. ఆటంకం లేకుండా బోధనాభ్యసన కార్యక్రమం జరుగుతుంది.
6. పాఠ్యబోధన ఆసక్తికరంగా ఉంటుంది.
7. బోధనా సమయం వినియోగం సరైన విధంగా జరుగుతుంది.
8. బోధనలో కచ్చితమైన గమ్యాన్ని, లక్ష్యాల్ని చేరుకోవడానికి ఉపయోగపడుతుంది.

9. బోధనాభ్యసన ప్రక్రియలో పాఠ్యపథకం ఉపాధ్యాయునికి మార్గదర్శకాలను ఇస్తుంది.

10. సరైన విధంగా మూల్యాంకనం చేయడానికి కావలసిన సామగ్రి (కృత్య పత్రాలు, నియోజన పత్రాలు)ని ఏర్పాటు చేసుకోగలడు.

పాఠ్యపథక రచనలోని సోపానాలు :

పాఠ్యపథక రచనలోని ప్రాముఖ్యం 'హెర్బార్టు' (Herbart) అనే విద్యావేత్త కృషివల్ల గుర్తించబడింది. పాఠ్యపథక రచనలో ఈ కింది సోపానాలు అనుసరించాలని అతడు సూచించాడు. వీటినే "హెర్బర్ట్ పాఠ్యబోధనా దశలు" అని అంటారు.

ఈ విధానంలోని పాఠ్యపథక రచన ఈ క్రింది అభ్యసన సూత్రాలపై ఆధారపడింది.

1. అంతకుముందే పొందిన అభ్యసనంపై ఆధారపడి నూతన అభ్యసనం జరుగుతుంది.
2. ప్రస్తుతం ఉన్న జ్ఞానం ఆధారంగా నూతన జ్ఞానం ఏర్పడుతుంది.

సోపానాలు :

1. సన్నాహం (Preparation)
2. విషయ విశదీకరణం (Presentation)
3. సంసర్గం (Association)
4. సాధారణీకరణం (Generalisation)
5. అన్వయం (Application)
6. పునర్విమర్శ (Recapitulation)

పైన సూచించిన సోపానాలు కాలానుగుణంగా మార్పు చెంది తరువాత కాలంలో అమలులో ఉన్న పాఠ్యపథకంలో బోధనా దశలు లేదా సోపానాలు మూడు

1. **ప్రవేశ వ్యాసక్తులు** (Introductory Activities)
   1. పూర్వజ్ఞాన మూల్యాంకనం / పరీక్షించడం
   2. ప్రేరణ (Motivation) / ఉన్ముఖీకరణ
   3. శీర్షికా ప్రకటన
2. **వికాస వ్యాసక్తులు** (Developmental Activities)
   1. బోధనా పద్ధతుల ద్వారా విషయ సమర్పణ / ప్రదర్శన (Presentation)
   2. విశదీకరణ (Explanation)
   3. ప్రత్యక్ష నిరూపణ (Demonstration)
3. **అంత్య వ్యాసక్తులు** (Culminating Activities)
   1. పర్యవేక్షణాధ్యయనం
   2. సమీక్ష / పునర్విమర్శ
   3. మూల్యాంకనం

   ఎ) పరీక్షించడం

   బి) నిర్దేశాలు

ప్రస్తుతం పాఠశాలల్లో అమలుపరుస్తున్న పీరియడ్ ప్రణాళిక సోపానాలు

1. పాఠం పేరు :

2. పీరియడ్ సంఖ్య :

బోధనా సమయం / కాలం :

3. బోధనాంశము :

4. పీరియడ్ బోధన ద్వారా సాధించవలసిన విద్యా ప్రమాణాలు :

1. సమస్యా సాధన :
2. కారణాలు – నిరూపణలు :
3. వ్యక్తపరచడం :
4. అనుసంధానం :
5. ప్రాతినిధ్యపరచటం – దృశ్యీకరణం :

5. పరిచయం :

1. పిల్లలను పలకరించటం (Greeting)
2. పూర్వభావనల పరిశీలన :

– పిల్లల గత అనుభవాలను / సంఘటనలను / కృత్యాలు / ఆటలద్వారా

- Mind Mapping / Brain Storming

- Concept Mapping ద్వారా

3. శీర్షికా ప్రకటన
4. పాఠ్యాంశ ప్రాధాన్యత
5. బోధనాభ్యసన సామాగ్రి

6. ప్రదర్శన – చర్చ :

1. చదవడం (Reading) :

– పాఠ్యపుస్తకంలోని పాఠ్యాంశాన్ని పిల్లలచే చదివించాలి. అందులోని కీలకపదాలు / సాంకేతిక పదాలు / అర్థం కాని పదాలు / గుర్తులను పిల్లలచే గుర్తింపజేసి వాటిని ఉపాధ్యాయుడు నల్లబల్లపై రాసి పిల్లలతో చర్చింపజేస్తూ అవగాహన పరచాలి.

2. భావన పరిచయం :

కృత్యాలద్వారా / చర్చలద్వారా / ఉదాహరణలు / నిత్యజీవిత సందర్భాల ద్వారా భావనలను విస్తృతంగా అవగాహన కలిగించటం.

3. సమస్యా సాధన :

అవగాహన చేసుకున్న భావనలకు సంబంధించిన సమస్యలను చర్చిస్తూ అవగాహనపరుస్తూ, నల్లబల్ల ద్వారా సోపానాలను (Concept Ladder Process) అనుసరించి ఏవిధంగా సాధించాలో పిల్లలకు నేర్పాలి. ఈవిధంగా పిల్లలందరికి అర్థమయ్యే వరకు అవగాహన కలిగించాలి.

7. మాదిరి సమస్యా సాధన :

– పిల్లలు నేర్చుకున్న సమస్యను పోలిన సమస్యలను పిల్లలచే చదివించాలి.

– ప్రతి సమస్యను గూర్చి చర్చించాలి. సమస్యలో ఏఏ అంశాలున్నాయి, ఏఏ భావనలున్నాయి, ఏమి కనుగొనాలి, ఏ పద్ధతిని ఎంచుకోవాలి, సమస్యలో ఉన్న తర్కాలేమిటి వంటి ప్రశ్నలతో విద్యార్థులను ప్రశ్నించి చర్చా పద్ధతి ద్వారా అవగాహనపరచాలి.

– తర్వాత సమస్యను వ్యక్తిగతంగా నోట్ పుస్తకాలలో సాధింపజేయాలి.

– తర్వాత పిల్లలను ముగ్గురు / నలుగురు చొప్పున గ్రూపులుగా చేసి వారు చేసిన సమస్యా సాధనను గ్రూపులలో చర్చింపచేయాలి.

– గ్రూపులలో పిల్లలు చర్చిస్తున్న విధానాన్ని ఉపాధ్యాయుడు పరిశీలించాలి.

– ఏవైనా చిన్నచిన్న తప్పులుంటే తప్పును సరిదిద్దుకొనేలా అవగాహనపరచాలి.

– ఒకవేళ తప్పులు ఎక్కువగా ఉంటే, ఆ సమస్యను ఉపాధ్యాయుడు నల్లబల్లపై పిల్లలతో చర్చిస్తూ అవగాహన పరచాలి.

8. పునశ్చరణ :

పిల్లలు ఈరోజు నేర్చుకున్న విషయాలను చర్చద్వారా / ప్రశ్నించుట ద్వారా రాబట్టి నల్లబల్లపై రాసి మరొకసారి పునశ్చరణ గావించాలి.

9. ఇంటిపని :

ఈరోజు నేర్చుకున్న భావనలకు సంబంధించిన అభ్యాసంలోని లెక్కలు (చర్చిచబడినవి) ఇచ్చి స్వంతంగా పిల్లలనే చేయమనాలి. సాధ్యమైనంతవరకు సమస్యలు తరగతిగదిలోనే చేయించాలి. ఒకవేళ సమయం చాలకపోతేనే ఇంటిదగ్గర చేయమనాలి.

సూచన :

1) ఉపాధ్యాయుడు వీలైనంతవరకు భావనల అవగాహనకు అధిక ప్రాధాన్యత ఇవ్వాలి. చక్కగా భావనలు అవగాహన చేసుకున్న విద్యార్థి అభ్యాసాలను స్వయంగా చేసుకోగలుగుతాడు.

2) Concept Ladder Process గురించి ప్రథమ సంవత్సరము D.El.Ed గణిత బోధనా పద్ధతులు నందు చర్చించడమైనది.

నమూనా పీరియడ్ పథకము

1. ప్రాథమిక సమాచారం :

ఎ) ఛాత్రోపాధ్యాయుని పేరు :

బి) క్రమసంఖ్య :

సి) పాఠశాల పేరు :

డి) తేది :

ఇ) సమయం :

ఎఫ్) తరగతి : 7వ తరగతి

జి) విషయం : గణితము

హెచ్) పాఠం పేరు : పూర్ణసంఖ్యలు

ఐ) బోధనాంశం : పూర్ణసంఖ్యలను సంఖ్యారేఖపై చూపుట (ఆరోహణ, అవరోహణ క్రమంలో రాయటం)

జె) పర్యవేక్షకుని పేరు :

2. సాధించాల్సిన విద్యాప్రమాణాలు :

ఎ) సమస్యాసాధన :

బి) కారణాలు చెప్పుట : నిరూపణలు చేయడం, విద్యార్థి పూర్ణ సంఖ్యలను ఆరోహణ, అవరోహణ క్రమంలో రాయగలడు.

బి) ప్రాతినిధ్యపరచుట : విద్యార్థి పూర్ణసంఖ్యలను సంఖ్యారేఖపై చూపగలడు.

3. బోధనాపద్ధతి : కృత్యాధార పద్ధతి, చర్చా పద్ధతి

4. బోధనాభ్యసన కృత్యాలు :

i) ప్రవేశ వ్యాసక్తులు (Introductory Activities)

ఎ) ప్రేరణ / ఉన్ముఖీకరణ : సంఖ్యల పాట ద్వారా విద్యార్థులతో ప్రేరణ కలుగజేస్తాను.

బి) పూర్వజ్ఞాన పరిశీలన : క్రింది ప్రశ్నల ద్వారా విద్యార్థుల పూర్వజ్ఞానాన్ని పరిశీలిస్తాను.

1) వస్తువులను లెక్కించడానికి ఉపయోగించు సంఖ్యలనేమందురు?

2) ఒక సంఖ్య నుండి అదే సంఖ్యను తీసివేస్తే ఎంత?

3) సహజ సంఖ్యలకు 'సున్న'ను చేరిస్తే ఏర్పడు సంఖ్యలేవి?

4) పూర్ణాంకాలకు, ఋణ సంఖ్యలు కలుపగా ఏ సంఖ్యలేర్పడతాయి?

(సందర్భానుగుణంగా మరిన్ని ప్రశ్నలు అడుగుతాను)

సి) శీర్షికా ప్రకటన : ఈరోజు మనం పూర్ణసంఖ్యలను సంఖ్యా రేఖపై చూపుట, పూర్ణ సంఖ్యలను ఆరోహణ, అవరోహణ క్రమంలో రాయుట గురించి చర్చిద్దాం.

ii. **వికాస వ్యాసక్తులు (Developmental Activities) :**

ఎ) చదవడం, చర్చ (Read & Discuss) :

విద్యార్థులను పాఠ్యపుస్తకంలోని 1వ పేజీ నందుగల సంఖ్యారేఖ క్రిందగల ప్రశ్నలను చదివి, సంఖ్యారేఖతో పోల్చుకుంటూ సమాధానాలు రాయునట్లు చూస్తాను. అర్థంకాని వాటిని గుర్తించమంటాను.

(అర్థంకాని వాటిని నల్లబల్లపై రాసి, పూర్తి తరగతిలో పిల్లలతో చర్చించి అవగాహనపరుస్తాను)

బి) సమస్యాసాధన & విశదీకరణ : 2 లేక 3 సమస్యలను నల్లబల్లపై రాసి విద్యార్థులతో చర్చిస్తూ, విశదీకరిస్తాను. సమస్యాసాధనను అవగాహనపరుస్తాను.

నల్లబల్ల పని :

1) 5-10 మధ్యగల అన్ని పూర్ణసంఖ్యలు రాసి, కనిష్ఠ, గరిష్ఠ సంఖ్యలు తెల్పండి.

2) −5, 2, 1, −8లను ఆరోహణ, అవరోహణ క్రమంలో రాయండి.

iii. **అంత్యవ్యాసక్తులు (Culminating Activities) :**

ఎ) నమూనా సమస్యాసాధన : విద్యార్థులను 3 లేక 4 గ్రూపులుగా విభజిస్తాను. ప్రతి గ్రూపునకు ఒక కృత్యపత్రం ఇచ్చి అందలి సమస్యలను గ్రూపులో చర్చించి కృత్యపత్రం పూరించమంటాను. గ్రూపులో అందరూ పాల్గొనేటట్లు చూస్తాను.

కృత్యపత్రం :

1) సంఖ్యారేఖపై గుర్తించిన సంఖ్యలలో పెద్ద సంఖ్య ...., చిన్న సంఖ్య ....

2) 5, 8, −2లను అవరోహణ క్రమంలో రాయండి.

3) 6, −4, 0, 4లను సంఖ్యా రేఖపై సూచించండి.

బి) మూల్యాంకనం : తరగతిలోని విద్యార్థులందరికీ మూల్యాంకనా పత్రాలను అందజేస్తాను. వైమక్తికంగా అందరినీ సమస్యలను సాధించమంటాను. సరిగా రాసిన వారిని అభినందిస్తాను.

మూల్యాంకన పత్రం :

1) 3, −2ల మధ్యగల పూర్ణసంఖ్యలను రాసి, వాటిలో కనిష్ట, గరిష్ట సంఖ్యలను తెల్పండి.

2) −10, −15, −7లను అవరోహణ, ఆరోహణ క్రమంలో రాయండి.

3) −5, −2, 1, 3లను సంఖ్యారేఖపై సూచించండి.

సి) పునఃశ్చరణ : పిల్లలు ఈరోజు నేర్చుకున్న అంశాలను చర్చద్వారా / ప్రశ్నించడం ద్వారా రాబట్టి నల్లబల్లపై (Mind Mapping) ద్వారా పునఃశ్చరణ గావిస్తాను.

5. బోధనాభ్యసన సామగ్రి :

1) సంఖ్యల పాటగల చార్టు

2) సంఖ్యారేఖగల చార్టు

3) కృత్యపత్రాలు

4) మూల్యాంకన పత్రాలు

6. ఇంటిపని (Home Work) **:**

పేజీనెం. 2 లోని అభ్యాసం−1లోగల మిగిలిన సమస్యలకు సమాధానాలు రాసుకుని రమ్మంటాను. మరుసటిరోజు సరిచూస్తాను.

మూల్యాంకనం :

1. వ్యాసరూప సమాధాన ప్రశ్నలు :

1. బ్లూమ్స్ విద్యాలక్ష్యాల వర్గీకరణను వివరించండి.
2. సవరించిన బ్లూమ్స్ జ్ఞానాత్మకరంగ వర్గీకరణను తెల్పి, బ్లూమ్స్ మొదటి వర్గీకరణలోగల తేడాను తెల్పండి.
3. 8వ తరగతిలో "త్రిభుజాలు−ధర్మాలు" పాఠ్యాంశానికి బోధనా లక్ష్యాలు స్పష్టీకరణలు, విద్యాప్రమాణాలను తెల్పండి.

4. 7వ తరగతిలో "దత్తాంశ నిర్వహణ" పాఠ్యాంశానికి గణిత విద్యా ప్రమాణాలు, అభ్యసన సూచికలను వ్రాయండి.
5. బోధనాభ్యసన ప్రక్రియలో కృత్యాల ఆవశ్యకతను తెల్పండి.
6. గణిత బోధనలో సమర్ధవంతంగా కృత్యాల నిర్వహణకు దృష్టిలో ఉంచుకోవలసిన అంశాలను వివరించండి.
7. ఉత్తమ గణిత పాఠ్యగ్రంథ లక్షణాలను వివరించండి.
8. అర్ధవంతమైన పాఠ్యపుస్తకాలు రూపొందించడానికి APSCF - 2011 చేసిన ప్రతిపాదనలు తెల్పండి.
9. ప్రాథమికోన్నత స్థాయి గణిత పాఠ్యపుస్తకాలు రూపొందించడంలో గల తాత్వికత, మార్గదర్శక సూత్రాలను తెల్పండి.
10. ప్రాథమికోన్నత స్థాయి గణిత పాఠ్యపుస్తకాల్లోని యూనిట్ నిర్మాణాన్ని వివరించండి.
11. ఒక పాఠశాలలో గణిత సంఘాన్ని నిర్వహించవలసిన ఆవశ్యకత, దాని నిర్వహణా విధానాన్ని వివరించండి.
12. వివిధ స్థాయిలలో గణిత ప్రదర్శనల ఆవశ్యకతను వివరించండి.
13. 6వ తరగతి నందలి "నిష్పత్తి మరియు అనుపాతం" యూనిట్ నుండి ఒక బోధనాంశానికి పీరియడ్ పథకాన్ని తయారు చేయండి.

2. సంక్షిప్త సమాధాన ప్రశ్నలు :

1. ఉద్దేశాలు, లక్ష్యాల మధ్యగల భేదాలు తెల్పండి.
2. ప్రాథమికోన్నత స్థాయిలో గణిత బోధన అభ్యసన ఉద్దేశాలు తెల్పండి.
3. ప్రాథమికోన్నత స్థాయిలో గణిత బోధన అభ్యసన లక్ష్యాలు తెల్పండి.
4. కృత్యాల్లోని రకాలను ఉదాహరణలతో తెల్పండి.
5. కృత్యాల లక్షణాలను తెల్పండి.
6. గణిత బోధనలో కృత్యాలను రూపకల్పన చేసేటపుడు ఉపాధ్యాయుడు దృష్టిలో ఉంచుకోవలసిన అంశాలను తెల్పండి.
7. పూర్ణసంఖ్యల భావనకు కృత్యపత్రాన్ని తయారుచేయండి.
8. 8వ తరగతికి నిష్పత్తి భావనలను అవగాహనపరచుటకు నిర్వహించదగు కృత్యాలను సూచించండి.
9. ప్రాథమికోన్నతస్థాయి నూతన గణిత పాఠ్యపుస్తక తయారీకి ఆధారమైన కీలకసూత్రాలను తెల్పండి.
10. గణిత పాఠ్యపుస్తక ప్రయోజనాలు తెల్పండి.
11. గణిత పాఠ్యపుస్తకాలలోని అభ్యాసాల స్వభావాన్ని తెల్పండి.
12. గణిత పాఠ్యపుస్తక అధ్యాపన ఉద్దేశాన్ని తెల్పండి.
13. తరగతి గదిలో గణిత పాఠ్యపుస్తకంలోని అంశాలను అర్ధవంతంగా నేర్చుకోవడానికి APSCF-2011 చేసిన ప్రతిపాదనలు తెల్పండి.
14. 7వ తరగతికి బీజీయ సమాసాలు పాఠ్యాంశానికి బోధనా వ్యూహాలను సూచించండి.
15. గణిత నమూనా విధానములోని సోపానాలను తెల్పి, ఉదాహరణలివ్వండి.

16. ప్రాథమికోన్నత పాఠశాల నందుగల గణిత ప్రయోగశాలలో ఉండవలసిన ఉపకరణాలను తెలపండి.

17. వార్షిక పథక రచనలో దృష్టి యందుంచుకోవలసిన అంశాలను తెలియజేయండి.

18. ప్రాథమికోన్నత పాఠశాలలో గణిత గ్రంథాలయ ఆవశ్యకతను తెలియజేయండి.

3. అతి సంక్షిప్త సమాధాన ప్రశ్నలు :

1. బోధనాభ్యసనలో ఉద్దేశం, లక్ష్యం అను పదాలు వివరించండి.
2. బోధనా లక్ష్యాలు అంటే ఏమిటి ?
3. స్పష్టీకరణలు గురించి వ్రాయండి?
4. విద్యాప్రమాణాలు అంటే ఏమిటి?
5. గణిత విద్యా ప్రమాణాల్లోని మౌలికాంశాలు తెల్పండి.
6. కృత్యం అంటే ఏమిటి?
7. కృత్యకోశం అంటే ఏమిటి?
8. గణిత పాఠ్యపుస్తకాల్లో ఇవ్వబడిన "ఆలోచించండి-చర్చించండి" శీర్షిక గురించి నీకేమి తెలియును.
9. "గణిత నమూనాలు", "గణిత నమూనా విధానము"లను నిర్వచించండి.
10. "గణిత ఫోరం" ఆవశ్యకతను తెలపండి.
11. పాఠ్యపథక రచనలో "హెర్బార్డ్" సూచించిన సోపానాలను తెలపండి.
12. గణితాన్ని సులభంగా నేర్చుకోవడానికి ఉపయోగపడు "App" లను తెలియజేయండి.
13. Apmathsforum లో సభ్యులుగా ఎలా చేరవచ్చు ?
14. మీకు తెలిసిన కొన్ని గణిత పత్రికల పేర్లను తెలపండి.

Reference Books :

1. Sundarayya.G, et.al. Ganitha Sastra Bodhana Paddhathulu (D.Ed), Telugu Akademi 2010.
2. Nalla Tirupathi Naidu, et.al.Ganitha Sastra Bodhana Paddhathulu (B.Ed), Telugu Akademi 2014.
3. Narayana Reddy.K, et.al.Pedagogy of Mathematics (B.Ed), Telugu Akademi 2016.
4. Derek Haylock, Mathematics explained for primary teachers 4th edition.
5. Teachers Handbook for upper primary class, SCERT AP Hyd 2012.
6. Hand book for Maths Teacher (9th Class), SCERT AP Hyd.
7. Upper Primary School Teachers Hand Book - Maths, DPEP Hyd 2004.
8. Upper Primary Level Teachers Hand Book, SCERT AP.
9. Mathematics Methodology (B.Ed), SVU, DDE, Tirupathi.
10. గణితం - బోధన పద్ధతులు, తెలుగు అకాడమి, హైదరాబాదు 2005.

5. గణిత మదింపు మరియు మూల్యాంకనం

> Assessment does not concern assignment of grades or evaluation of whether instruction was effective. It`s assessment is designed to feed into the learning process and make the learning stronger
>
> ***-David N. Perkins***

విషయక్రమం:

5.0 : లక్ష్యాలు

5.1 : పరిచయం

5.2 : మదింపు సాధనాలు – పరీక్షలలో రకాలు; పరీక్షల రూపకల్పన, ఉపయోగించడం, రూబ్రిక్స్ అభివృద్ధి, ఉపయోగించడం, పోర్ట్‌ఫోలియోలు రూపొందించుట, నిర్వహణ, మదింపు

5.3 : ప్రాథమికోన్నత గణిత పాఠ్యాంశాల అభ్యసనలో ఏర్పరచుకొనే తప్పు అవగాహనలు (Misconceptions)

5.4 : భావనల అవగాహన, గణిత వివేచనా సామర్థ్యాల మదింపు

5.5 : నిరంతర సమగ్ర మూల్యాంకనం – (నిర్మాణాత్మక, సంగ్రహణాత్మక)

5.6 : మూల్యాంకనం – మార్కింగ్ లేదా గ్రేడింగ్, నివేదించుట, రికార్డుల నిర్వహణ, విద్యార్థులకు, తల్లిదండ్రులకు ఫలితాలను తెలియచేయుట.

5.0. లక్ష్యాలు

ఈ అధ్యాయాన్ని ఉపాధ్యాయ విద్యార్థులు చదివిన తర్వాత ఈ దిగువ లక్ష్యాలు చేకూరుతాయి.

1. సాధనాపరీక్షలలోని రకాలు, నిర్మాణం, నిర్వహణ గురించి అవగాహన చేసుకొంటారు.
2. రూబ్రిక్స్ తయారీ, ఉపయోగించడం తెలుసుకొంటారు.
3. ఫోర్ట్‌ఫోలియోల ఆధారంగా మదింపు చేయు విధానంపై అవగాహన పొందుతారు.
4. ప్రాథమికోన్నత గణిత పాఠ్యాంశాల అభ్యసనలో ఏర్పరచుకొనే తప్పు అవగాహన, వాటి సవరణ గూర్చి అవగాహనకు వస్తారు.
5. భావనల అవగాహన, గణిత వివేచనా సామర్థ్యాలను ఏ విధంగా మదింపు చెయ్యాలో తెలుసుకొంటారు.
6. ఏది నిరంతర సమగ్ర మూల్యాంకనమో గుర్తిస్తారు.

   నిరంతర సమగ్ర మూల్యాంకనంలోని వివిధ అంశాల గురించి అవగాహన ఏర్పరచుకొంటారు.
7. నిర్మాణాత్మక మదింపు గురించి పూర్తి అవగాహన చేసుకొంటారు.
8. సంగ్రహణాత్మక మదింపు గురించి పూర్తి అవగాహన పొందుతారు.

5.1. పరిచయం

ఈ సన్నివేశాన్ని ఒకసారి పరిశీలించండి: ఆరవ తరగతి గణితం బోధిస్తున్న ఉపాధ్యాయుడు తరగతి గదిలో విద్యార్థులను ఉద్దేశించి ఈ కింది ప్రశ్న వేసాడు.

"ఒక దీర్ఘచతురస్రాకార కాగితం పొడవు 12 సెం.మీ., వెడల్పు 8 సెం.మీ. అయిన దాని వైశాల్యం ఎంత?"

దానికి సమాధానం చెప్పడానికి తరగతిలోని కొంతమంది విద్యార్థులు చేతులు పైకెత్తారు. వారిలో కొంతమందిని ఉపాధ్యాయుడు ఎంపిక చేసి, సమాధానాలు అడిగాడు.

విద్యార్థి-1 : 20 సెం.మీ.

ఉపాధ్యాయుడు : తప్పు / కాదు

విద్యార్థి-2 : 20 చ॥సెం.మీ.

ఉపాధ్యాయుడు : తల అడ్డంగా ఊపుతూ ఊహూ!! తప్పు

విద్యార్థి-3 : 12,8ల లబ్ధం

ఉపాధ్యాయుడు : దగ్గరగా వచ్చావు కాని సరికాదు

విద్యార్థి-4 : 96 చ॥సెం.మీ.

ఉపాధ్యాయుడు : ఇదీ సరియైన సమాధానం

పై సంభాషణల నుంచి మనకు అర్థం అయ్యేది ఏమిటంటే ఉపాధ్యాయుడు సరియైన సమాధానాన్ని మాత్రమే ఆశిస్తున్నాడు. ఈ ఉపాధ్యాయుని ప్రవర్తన విద్యార్థులకు ఏ సంకేతాలను ఇస్తుంది?

1. ఉపాధ్యాయుడు అడిగిన ప్రతి ప్రశ్నకు ఒకే ఒక సరియైన సమాధానం ఉంటుందని భావిస్తారు.
2. ఉపాధ్యాయుడు భావిస్తున్న సరియైన సమాధానం ఇవ్వడం కష్టమైనది. సవాల్‌తో కూడుకొంది అని భావిస్తారు.
3. తరువాత ప్రశ్నలకు సమాధానం చెప్పడానికి, చేతులెత్తడానికి జంకుతారు.
4. తాము చెప్పే సమాధానం సరియైనది కాదేమో అని వారు భావిస్తారు.

ఉపాధ్యాయుని "కాదు" లేదా "తప్పు" అనడాన్ని పిల్లలు అవమానంగాను, తమ సమాధానాన్ని విలువ లేనిదిగానూ భావిస్తారు. తమ ఆలోచనలు విలువలేనివని, అభినందించదగినవి కావని తలుస్తారు.

ఆ విధంగా వారి ఆలోచనలు, ఉద్దేశ్యాలు మొగ్గలోనే తుంచివేయబడతాయి. సరియైన సమాధానానికే పరిమితమైపోతే, బట్టీ అభ్యసనకు దారి తీస్తుంది. తమ సమాధానాలు, ఆలోచనలు ఎందుకు సరికావో తెలియని సందిగ్ధంలో పడిపోతారు.

ఇదంతా నిర్మాణాత్మక దృక్పథానికి పూర్తి వ్యతిరేకం. ఇటువంటి సందర్భంలో విద్యార్థుల జ్ఞాన నిర్మాణానికి ఉద్దేశించిన అభ్యసనం, ఆలోచనలు, ప్రక్రియల గురించి పరీక్షించడానికి ఉపాధ్యాయుడు ఏ రీతిలో ప్రశ్నించాలి? లేదా తన ప్రవర్తన ఎలా ఉండాలి?

నిర్మాణాత్మకవాదుల దృక్పథం ప్రకారం ఉపాధ్యాయుడు విద్యార్థుల అభ్యసనాన్ని మదింపు చేసేటప్పుడు వారి తప్పొప్పులను ఎంపిక చేసేవ్యక్తిగా ఉండక, అదనపు ప్రశ్నలు వేయడం గాని, వారి సమాధానాలు సమర్థించుకొనే విధంగా వివరించమని గాని, విరుద్ధమైన ప్రశ్నలను సంధించడం గాని చేయాలి.

ఇప్పుడు పైన చర్చించిన తరగతి గది అంశాలనే తప్పొప్పులుగా జవాబివ్వని ఉపాధ్యాయుని నుంచి వచ్చే సమాధానాలు చూడండి.

"ఒక దీర్ఘచతురస్రాకార కాగితం పొడవు 12 సెం.మీ., వెడల్పు 8 సెం.మీ అయిన దాని వైశాల్యం ఎంత?

విద్యార్థి-1 :	20 సెం.మీ.
ఉపాధ్యాయుడు :	ఏవిధంగా ఈ సమాధానం వచ్చింది?
విద్యార్థి-1 :	12 సెం.మీ.కి 8 సెం.మీ కలిపాను.
ఉపాధ్యాయుడు :	ఈ ప్రక్రియను ఎందుకు అనుసరించావు?
విద్యార్థి-1 :	వైశాల్యమంటే పొడవు, వెడల్పుల మొత్తం అని భావించాను.
ఉపాధ్యాయుడు :	ఇది సరియైన సమాధానమేనా?
విద్యార్థి-2 :	సరియైన సమాధానం కాదు.
ఉపాధ్యాయుడు :	సరియైన సమాధానం ఏమిటి?
విద్యార్థి-2 :	20 చ.సెం.మీ.
ఉపాధ్యాయుడు :	ఏ విధంగా 20 చ.సెం.మీ. అని నిర్ధారణకు వచ్చావు?
విద్యార్థి-2 :	వైశాల్యాన్ని చదరపు ప్రమాణాలలో చెప్పాలి కనుక
ఉపాధ్యాయుడు :	ఇది సరియైన సమాధానమేనా, ఇంకా ఎవరైనా చెప్పండి.
విద్యార్థి-3 :	సరియైన సమాధానం కాదు, సరియైన సమాధానం 12, 8ల లబ్ధం అనగా 96.
ఉపాధ్యాయుడు :	నీ ఆలోచన కొంతవరకు సరియైనదే. అయితే వైశాల్యాన్ని ఇక్కడ ఏ ప్రమాణాలతో సూచించాలి?
విద్యార్థి-4 :	96 చ॥సెం.మీ. అని సూచించాలి.
ఉపాధ్యాయుడు :	విద్యార్థి-4నుద్దేశించి-నీవు వైశాల్యాన్ని కనుగొనటానికి అనుసరించిన విధానాన్ని వివరించు?
విద్యార్థి-4 :	దీర్ఘ చతురస్ర వైశాల్యము దాని పొడవు, వెడల్పులను లబ్ధం చేసి తగిన చదరపు ప్రమాణాలతో సూచించాలి.

జట్టు కృత్యం : రెండు రకాల తరగతి సందర్భాలు, ఉపాధ్యాయుని సమాధానాలు పోల్చండి. ఏది సరైన ఆచరణ? ఎందుచేత? చిన్న సమూహాలలో చర్చించండి.

ప్రతిస్పందిత కృత్యం : ః సంప్రదాయ పద్ధతిలో గణిత తరగతి సందర్భాన్ని జ్ఞప్తికి తెచ్చుకొని ఉపాధ్యాయుని ప్రతిస్పందనలు; అదే తీర్పు నివ్వని రీతిలో ఉపాధ్యాయుడైతే వచ్చే సమాధానాలు ఏమై ఉంటాయో చర్చించండి.

పై ఉదాహరణ సాంప్రదాయంగా పిల్లల అభ్యసన మదింపుపై అనేక ప్రశ్నలకు దారి తీస్తుంది. 1. ఎప్పుడు విద్యార్థులను పరీక్షించాలి? 2. ఏ పరీక్ష విధానాలు పిల్లల అభ్యసనానికి ఉపకరిస్తాయి? మొ॥నవి. కనుక ఈ అధ్యాయంలో మదింపునకు సంబంధించిన వివిధ విషయాలను చర్చిద్దాం.

5.2. మదింపు సాధనాలు–పరీక్షలలో రకాలు; పరీక్షల రూపకల్పన, ఉపయోగించడం; రూబ్రిక్స్ అభివృద్ధి, ఉపయోగించడం; పోర్ట్‌ఫోలియోలు రూపొందించుట, నిర్వహణ, మదింపు.

5.2.0. మాపనం, మదింపు మూల్యాంకనాల అర్థం ఉద్దేశం

గణత బోధనలో నిర్మాణాత్మక ఉపగమ విధానాన్ని అనుసరిస్తే, గణిత అభ్యసన విధానంలో, మదింపులో కూడా మార్పు రావాలి. గణితంలో సమస్యలకు సరియైన సమాధానాలు గణించడం ఒక్కటే సరిపోదు. భావనాభివృద్ధి అవగాహన మరింత ఉన్నతంగా జరగాలి. ఆ విధంగా పరిమాణాత్మకంగా, గుణాత్మకంగా గణిత అభ్యసనలు నిర్ధారించడం అనేదీ పరీక్ష నుంచి మూల్యాంకనం, మూల్యాంకనం నుంచి మదింపు దిశగా మారింది. పరీక్షించడం లేదా మాపనం, మూల్యాంకనం, మదింపు అనే అంశాలు ఒకే అర్థాన్ని ఇచ్చే అంశాలు కావు.

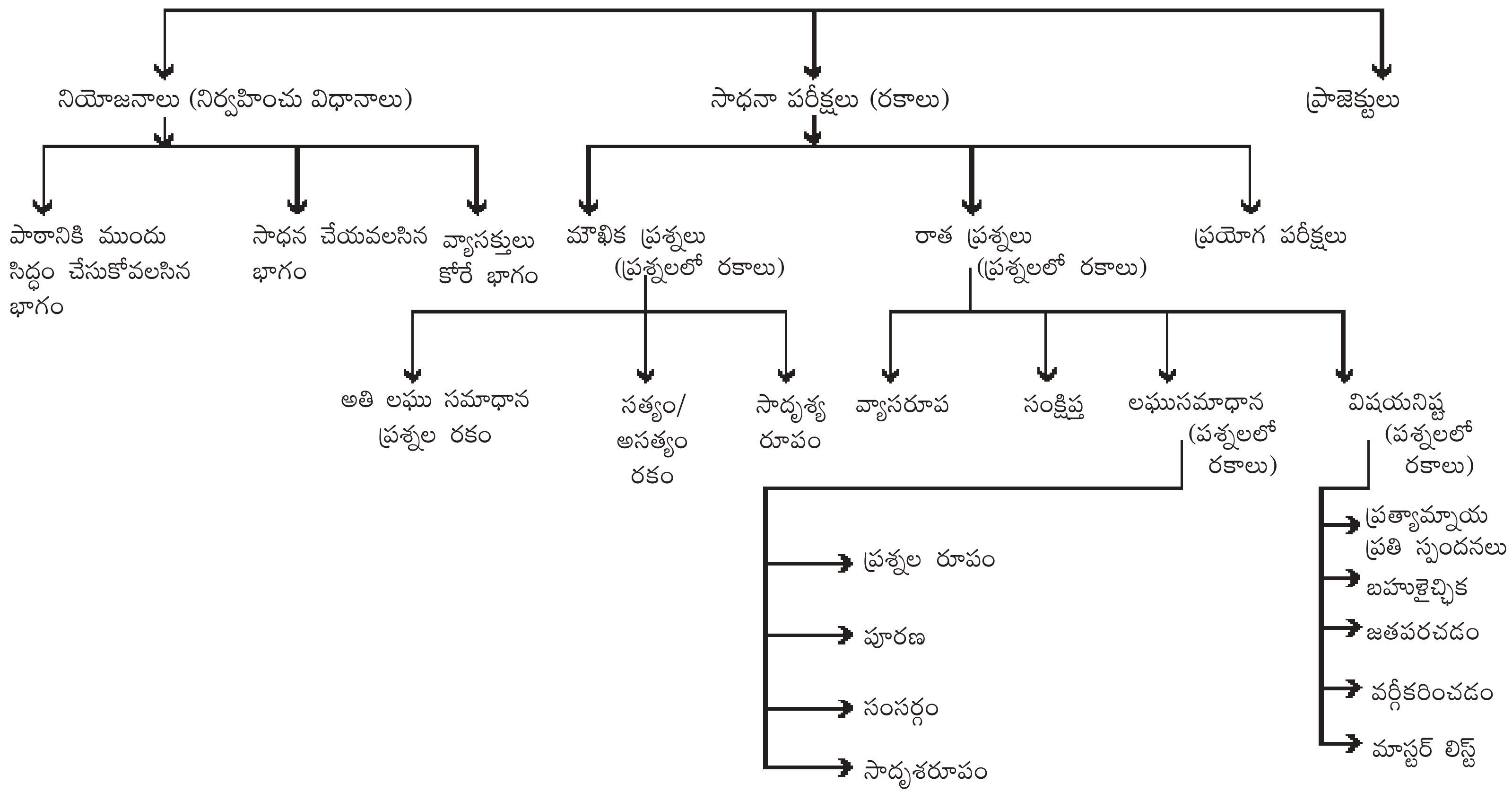
మాపనం: విద్యారంగంలో మాపనం అనేది అభ్యసన ఫలితాలను ప్రవర్తన పరిశీలనల నుంచి నిర్ధారించడం జరుగుతుంది. మాపనం అనేది పరిమాణాత్మకం. ఉదాహరణకు ఒక యూనిట్ పూర్తి అయిన తరువాత, అభ్యాసకుని సాధనను మార్కులు లేదా స్కోరుల రూపంలో కొలుస్తారు. మాపనం అనేది అభ్యసనం పరిమాణాత్మకంగా నిర్ధారించడానికి మాత్రమే పరిమితమవుతుంది అనగా ఎంత తక్కువ, ఎంత ఎక్కువ సూచిస్తుంది. మాపనం గుణాత్మకతను సూచించదు. ఉదాహరణకు టర్మ్ చివరి పరీక్షలో ఒక విద్యార్థి 50కి 40 మార్కులు సాధిస్తే, చాలినంత బాగా సాధన ఉందని చెప్పగలమా? అందుకే మాపనం అనే దానిని మరింత విశాల భావనతో “మూల్యాంకనం”గా విస్తృత పరచడమైనది.

మూల్యాంకనం: మూల్యాంకనం అనేది సాధారణంగా ఒక మాపన విలువకు తీర్పునివ్వడం. మాపనం కన్నా సమగ్రమైన భావన మూల్యాంకనం. ఎంతమంచి అనేది కూడా నిర్ధారిస్తుంది మూల్యాంకనం. పిల్లల అవగాహన, వైఖరులు, ఆలోచన విధానం, పని అలవాట్లు వంటి వాటిని కూడా నిర్ణయిస్తుంది. ఆ విధంగా గణితంలో మూల్యాంకనం అనేది అభ్యసనను గుణాత్మకంగాను, బోధన ప్రక్రియలో గుణాత్మకతను నిర్ణయిస్తుంది. మూల్యాంకనం బోధన ప్రక్రియలో అంత్యఫలితాలైన విద్యాలక్ష్యాలపై దృష్టి సారిస్తుంది. మరి అభ్యసన ప్రక్రియలో గుణాత్మకత పరిమాణాత్మకత ఎట్లా తెలుసుకొనడం? దీనిని తెలుసుకోవడానికి మరొక భావన, పద్ధతి కావాలి. అదే మదింపు.

మదింపు: మూల్యాంకనం కన్నా మరింత విశాలమైనది మదింపు. అది అభ్యసన ప్రక్రియలో గుణాత్మక పరిమాణాత్మక అంశాలను నిర్ధారిస్తుంది. అదేవిధముగా అభ్యసన ఫలితాలు, బోధన ప్రక్రియలో గుణాత్మకతను కూడా సూచిస్తుంది. ఆ విధంగా మదింపు అనేది ప్రక్రియాసేకరణ, ఊహించడం, పిల్లల విద్యాకృత్యాలకు ప్రతిస్పందనలు, నివేదించడం మరియు సమాచారాన్ని ఉ పయోగించుకోవడం, విద్యార్థుల అభ్యసన అవగాహనను మదింపు చేయటానికి విభిన్న మదింపు మెళకువలు అవసరం.

దానిలో భాగంగా రకరకాల పరీక్షలు, మదింపు సాధనాల గూర్చి తెలుసుకోవాలి. వాటిని ఇప్పుడు తెలుసుకుందాం.

5.2.1. పాండిత్య రంగంలో మాపనానికి సాధనాలు (Assessing tools in Scholastic Area / Curricular Area)



5.2.1. వివిధ రకాల పరీక్షాంశాలు :

ఎ. వ్యాసరూప పరీక్షలు (Essay Type Tests)

ఇవి చాలా పూర్వకాలము నుండి అమల్లో ఉన్నాయి. వీటివల్ల విద్యార్థులు స్వేచ్ఛాయుత సమాధానాలు ఇవ్వటానికి అవకాశం ఉంది. విద్యార్థి తన సృజనాత్మక శక్తిని ప్రదర్శించే అవకాశం ఎక్కువ.

యోగ్యతలు :

1. భావవ్యవస్థాపితా సామర్థ్యం, భావ వ్యక్తీకరణ సామర్థ్యాల్ని విమర్శించకల్గుట, పోల్చగల్గుట మున్నగు వాటిని బట్టి ఇట్టి పరీక్షల వలననే మాపనం చేయగలం.
2. విద్యార్థులలో ఉత్తమ అధ్యయనపు అలవాట్లను ప్రోత్సహిస్తాయి.

గణిత బోధన పద్ధతులు :

3. ఇట్టి ప్రశ్నలతో కూడిన ప్రశ్నాపత్రాన్ని తయారుచేయడం కొంత తేలికైన పని అనిపిస్తుంది.
4. కురికులంలోని అన్ని సబ్జెక్టుల్లోనూ వ్యాసరూప ప్రశ్నలు తయారుచేయటానికి వీలుకలదు.
5. విద్యార్థి సమాధానం ఇచ్చేటప్పుడు చాలా స్వేచ్ఛను పొందుతాడు.

పరిమితులు :

1. **అల్పసప్రమాణత :** ఇట్టి పరీక్షల సప్రమాణత అల్పంగా ఉంటుంది. తక్కువ సంఖ్యలో (8 లేక 10) ప్రశ్నలుండుట వల్ల అదృష్టం చాలా గొప్పపాత్రను వహిస్తుంది. దస్తూరి, వ్యాకరణం, సమాధానపు నిడివి, బుకాయింపు మున్నగు అసందర్భపు కారకాల వల్ల వెలిడిటీ అప్పత్వాన్ని పొందుతుంది. ఇట్టి బుకాయింపును సరిచేయటానికి తగిన గణాంక శాస్త్ర సూత్రాలేవీ కనుక్కోబడలేదు.
2. **అల్ప విశ్వసనీయత :** జవాబుపత్రాల్ని దిద్దుటలో గల ఆత్మాశ్రయత వల్ల విశ్వసనీయత తక్కువగా ఉంటుంది. సమాధానపు నిడివి, పరీక్షకుని మనోస్థితి, పరీక్షకుని లేదా పరీక్ష పై ఉపాధ్యాయుని వైఖరి మున్నగు కారకాలు జవాబు పత్రాల్ని దిద్దుటలో ఆత్మాశ్రయత పై ప్రభావాన్ని చూపుతాయి.
3. కంఠతా పట్టే అలవాటు ప్రోత్సహిస్తాయి. అతిముఖ్యమైన పాఠ్యాంశాలపై మాత్రమే చదువును విద్యార్థులు కేంద్రీకరిస్తారు.
4. జవాబు పత్రాల్ని చదవటానికి ఎక్కువ సమయం వినియోగించుకోవాలి. దిద్దటానికి ఎక్కువ సమయం కావాలి. చికాకును, శ్రమను కల్గిస్తాయి.
5. ఒక సబ్జక్టులోని పాఠ్యాంశాలు అన్నింటినీ పూర్తిగా పరీక్షించవు.

వ్యాసరూప ప్రశ్నలను అభివృద్ధి పరచుటకు సూచనలు :

1. సూచనలు స్పష్టంగా, నిర్దుష్టంగా తగిన విధంగా ఉండాలి.
2. విద్యార్థికి ద్వంద్వార్థము ఇచ్చునట్లుగా ఉండకుండ చూడవలెను. ఎక్కువ సాధారణంగా ఉండకూడదు.
3. 'చర్చించుము', 'నీ అభిప్రాయము తెల్పుము' వంటి పదజాలమును ఉపయోగించకూడదు.
4. ఆశించే జవాబు అన్ని అంశాల రూపంలో ఉండాలో స్పష్టపరచాలి. ఉదా : వ్యాసరూప ప్రశ్నల యోగ్యతలను వ్రాయుము. (5 మార్కులు)

5. విషయతంత్ర పరీక్షల ద్వారా మాపనం చెయ్యటానికి వీలులేని లక్ష్యాల సాధనను తెలుసుకోడానికి మాత్రమే ఉపయోగించాలి.

బి. విషయతంత్ర పరీక్షలు (Objective Type Tests)

మూల్యాంకనంలో సాధ్యమైనంత వరకూ ఆత్మాశ్రయతను తగ్గించుట వీని ధ్యేయం. ఇట్టి పరీక్షలో విద్యార్థి ప్రశ్నకు జవాబుగా ఒక పదాన్ని కానీ, పదసముదాయాన్ని కానీ రాయాలి. లేదా ఇవ్వబడ్డ సమాధానాల నుండి సరైన దాన్ని చెయ్యాలి. అందువల్ల సమాధానాన్ని వ్రాయడం చాలా త్వరగా జరిగిపోతుంది. అంటే తక్కువ సమయంలో ఎక్కువ ప్రశ్నలకు సమాధానాలు రాబట్టవచ్చు.

ప్రయోజనాలు :

1. ఒకే పరీక్షా పత్రంలో ఎక్కువ ప్రశ్నలు ఇవ్వవచ్చు. అందువల్ల అన్ని పాఠ్యాంశాల పైన విద్యార్థిని సమగ్రంగా పరీక్షించవచ్చు.
2. పరీక్షకుని ఆత్మాశ్రయతకు ఏమాత్రం తావు లేదు. కనుక పరీక్ష యొక్క విశ్వసనీయత పెరుగుతుంది.
3. జవాబు వ్రాయడానికి తక్కువ సమయం పడుతుంది. జవాబుల్ని కచ్చితంగా, వేగంగా పరిగణించవచ్చు.
4. కొన్ని ముఖ్యాంశాల్నే బట్టీ పట్టుట కాక, విద్యార్థి పాఠ్యాంశాలన్నింటినీ చదవాల్సి ఉంటుంది.
5. వ్రాతలో వేగం, శైలి మున్నగు బాహ్యకారకాల ప్రభావం ఈ పరీక్షలపై ఉండదు.
6. ఇట్టి పరీక్షలు నిర్వహించుట తేలిక.

పరిమితులు :

1. విద్యార్థుల్లో భాషా సామర్థ్యం క్షీణిస్తూందని పరిశోధనల వల్ల తేలింది.
2. పరీక్షా పత్రాల్ని తయారుచేయటం వ్యయప్రయాసలతో కూడిన పని. పరీక్షా పత్రాన్ని తయారు చేసేవారికి ఎక్కువ సామర్థ్యం కావాలి.
3. ఊహించి, జవాబులు వ్రాసే అవకాశం ఉంది.
4. విద్యార్థుల ఉన్నతస్థాయి సామర్థ్యాల్ని (దాత్తాంశాన్ని తార్కికంగా వ్యవస్థీకరించడం, సమన్వయ శక్తి మున్నగున్నవి) పరీక్షించలేవు.

విషయతంత్ర పరీక్షాంశాల్ని తయారుచేసేటపుడు జ్ఞప్తియందుంచుకోవాల్సిన సూచనలు :

1. కఠిన పదాలు వాడరాదు.
2. ఏ అంశాన్నైనా అచ్చు పుస్తకం నుండి 'ఉన్నది ఉన్నట్లుగా' తీసుకోకూడదు.
3. వివాదాస్పదంగా ఉండే ఏ అంశాన్నైనా ఇవ్వదలిస్తే, ఆ అంశం ఎచ్చట నుండి గ్రహించబడిందో పేర్కొనాలి.
4. ఒక పరీక్షాంశం మరొక పరీక్షాంశపు సమాధానానికి సంకేతం కారాదు.
5. పరీక్షాంశాల సమాధానాలు ఒక రకమైన క్రమంలో వచ్చేలా ఉండరాదు. యాదృచ్ఛిక క్రమంలో ఉండాలి.
6. ద్వంద్వార్థాలు వచ్చేటట్లుగా అంశాలుండరాదు.
7. గుణాత్మక పదాల్ని (ఎక్కువ, తక్కువ మున్నగునవి) సాధ్యమైనంత వరకు ఉపయోగించరాదు.
8. పరస్పరాధారాలైన అంశాల్ని ఉపయోగించరాదు.

9. ప్రాముఖ్యం లేని చాల చిన్న విషయాల్ని పరీక్షించకూడదు.

10. కంగారుపడే పదజాలంతో అంశాల్ని తయారుచేయరాదు.

విషయతంత్ర పరీక్షలను ఎప్పటికప్పుడు ఉపయోగించాలి ?

1. పరీక్షించవలసిన సమూహము పెద్దదిగా ఉన్నప్పుడు.
2. పరీక్షను మరల వాడవలసి వచ్చినపుడు.
3. నిష్పక్షపాత మూల్యాంకనము అవసరమైనపుడు.
4. వ్యాసరూప జవాబులను నిర్ణయించగల సామర్థ్యం కంటే సరియైన విధంగా, విషయతంత్ర పరీక్షాంశాలను వ్రాయగల సామర్థ్యం తనకున్నదని ఉపాధ్యాయుడు అధికముగ విశ్వసించినపుడు.
5. వేగంగా పరీక్షా పత్రాలను తయారుచేయవలసిన దానికంటే త్వరితంగా పరీక్ష ఫలితాలను తెలియజేయవలసిన ఆగత్య మేర్పడినపుడు.

విషయతంత్ర పరీక్షాంశాల్లోని రకాలు :

ఏ రకమైన అంశాన్ని ఎట్లు తయారు చేయాలి; దానికి సమాధానం వ్రాయటానికి పరీక్షార్థికి ఎట్టి సూచనలివ్వాలి అనే విషయాలు తెలుసుకోవడం చాలా ముఖ్యం.

1. బహుళైచ్ఛిక అంశాలు :

ఇట్టి ప్రశ్నలకు 4 లేక 5 సమాధానాలుండాలి. అందొక్కటి మాత్రమే సరైనదై ఉండాలి. మిగిలినవి సరైనవేనేమో అనే సందేహాన్ని కల్గించేవిగా ఉండాలి. సరైన సమాధానాన్ని పరీక్షార్థి గుర్తించి, ఆ సమాధానానికి ఇవ్వబడ్డ అంకెను కానీ, గుర్తును గానీ ఆ ప్రశ్నకెదురుగా ఇవ్వబడ్డ స్థలంలో వ్రాయాలి.

ఉదాహరణ ం

సూచన : ఈ దిగువ ప్రశ్నలకు ఒక్కోదానికి A, B, C, D అను నాల్గు సమాధానాలివ్వబడ్డాయి. అందు ఒక్కటి మాత్రమే సరైంది. దానిని ఎంపిక చేసి, దాని గుర్తును బ్రాకెట్టు నందుంచుము.

'చరశీలతా మాపము' లందు అత్యంత విశ్వసనీయమైన మాపనం (B)

(A)వ్యాప్తి (B) ప్రామాణిక విచలనం

(C) చతుర్థాంశక విచలనం (D) అంకమధ్యమ విచలనం

ఈ రకమైన పరీక్షాంశాలు – విచక్షణా శక్తి, వ్యాఖ్యాన సామర్థ్యం, వినియోగ సామర్థ్యం, యదార్థాల ఉపయోగం – వీటిని మాపనం చేయుటకు ప్రయోజనకారులు.

ఇట్టి అంశాలను తయారుచేయుటలో గుర్తుంచుకోవలసిన విషయాలు :

ఎ) బహుళైచ్ఛిక అంశాలను తయారు చేయుటకు అవసరమైన ముఖ్యమైన నేర్పును ప్రత్యామ్నాయ సమాధానాలను వ్రాయడమందే కనపరచాలి. ఇచ్చిన వానిలో ఒకటి స్పష్టంగా, అత్యుత్తమమైందిగా ఉండాలి. మిగిలిన సమాధానాలు కూడా దానికంటే కూడా ఉత్తమమైన వానివలె ఉండాలి గాని వేరే విధంగా ఉండరాదు.

బి) ఇట్టి అంశానికిచ్చిన ప్రత్యామ్నాయాలలో ఒకటి మాత్రమే కచ్చితమైనది, అంగీకరించిబడినది అగు సమాధానం అయి ఉండాలి.

సి) ప్రత్యామ్నాయాలు అంశం యొక్క మూలంనకు వ్యాకరణయుక్తముగా సరిపడునట్లుండాలి.

డి) ఏదీ సరైన సమాధానం కానిదీ, ఒకటి కంటే ఎక్కువ సరియైన సమాధానాలుండు ప్రత్యామ్నాయాలుండరాదు.

ఇ) జవాబులు ఒక వరుసక్రమంలో కాకుండా, యాదృచ్ఛిక క్రమంలో వచ్చేలా చూడాలి. (ఉదా : A, B, C, D, A, B, C, D లేదా A, A, B, B, C, C, D, D లేదా A, B, C, D, D, C, B, A – ఇలా రాకుండా A, D, C, A, B, D ....)

2. జతపరచుట :

ఈ పద్ధతిలో రెండు వరుసలుండును. ఒక వరుసలో సమస్యలు, రెండవదాన్లో సమాధానాలుండును. సమస్యల వరుసలోని సమస్యకు సమాధానాల వరుస నుండి సరైన సమాధానాన్ని జతచేసి దాని సంఖ్యను లేక గుర్తును సమస్యకు ప్రక్కగా ఇచ్చిన స్థలంలో సూచించాలి.

ఉదాహరణ :

సూచన : దిగువ A, B అను రెండు వరుసలివ్వబడ్డాయి. B వరుసలోని ప్రతి అంవానికి, A వరుసలోని సమాధానాన్ని, దాన్ని సంఖ్యను B వరుసలోని అంశానికి ఎదురుగా నున్న బ్రాకెట్టు నందు ఉంచుము.

	A	B	
1.	$(2a+b)^2$	$4b^2+4ab+a^2$	( )
2.	$(a+2b)^2$	$a^2-6ab+9b^2$	( )
3.	$(3a+b)^2$	$4b^2+4ab+b^2$	( )
4.	$(a-3b)^2$	$a^2-4ab+4b^2$	( )
5.	$(2b-a)^2$		
6.	$(b-2a)^2$		

ఇట్టి అంశాలను తయారుచేయుటలో గుర్తుంచుకోవలసిన విషయాలు :

ఎ) సాధారణంగా 10 లేక 12 అంశాలను మించి ఉండరాదు.

బి) ఏ వరుసలో నుండి జతపరచాల్సిన అంశాలనెంపిక చేసుకొనాలో, ఆ వరుసలోని వాని సంఖ్య కంటే ఎక్కువగా రెండో వరుసలోని అంశాలుండాలి.

సి) ఏ వరుసకు ఆ వరుసలోని అంశాలు సజాతీయాలై ఉండాలి.

డి) రెండు వరుసలలోని అంశాలు అకారాది క్రమంలోగాని, మరేవిధమైన తార్కిక / క్రమపద్ధతిలో గాని అమర్చబడి ఉండాలి.

ఇ) ఏ వరుసలోని అంశాలను, ఏ వరుసలోని వానితో జతపర్చాలో, సమాధానాలనెట్లు సూచించాలో, ఒకే పదం ఒకటి కంటే ఎక్కువసార్లు వినియోగించవచ్చో లేదో వీనిని గూర్చి స్పష్టమైన సూచనలు విద్యార్థులకు ఇవ్వాలి.

3. పూరించు పద్ధతి :

ఈ పద్ధతిలో ప్రశ్న ఒక వాక్యరూపంలో ఉంటుంది. కానీ అందు కొన్ని పదాలు విడిచిపెట్టబడి, అచట ఖాళీగా ఉండును. ఆ ఖాళీని విద్యార్థులు సరైన పదాలతో పూరించాలి. ఇట్టి ప్రశ్నలు విద్యార్థి యొక్క జ్ఞాపకశక్తిని పరీక్షించుటకు ఉపయోగపడతాయి.

ఉదాహరణ :

సూచన : ఈ క్రిందివాక్యాలలో ఇచ్చిన ఖాళీలను సరైన పదాలతో పూరింపుము.

1. x = y యొక్క రేఖాపటం .... గూండా పోవును.
2. y = mx + c యొక్క రేఖాపటాలు .... సమీకరణాల రేఖాపటాలు.

ఇట్టి అంశాలను తయారు చేయుటలో గుర్తుంచుకోవలసిన విషయాలు :

1. వాక్యమందు ప్రాముఖ్యం గల పదాన్ని మాత్రమే విడిచి, దానికై ఖాళీనుంచాలి.
2. ఒక అంశంలో ఒక ఖాళీ మాత్రమే ఉండేటట్లు జాగ్రత తీసుకోవాలి.
3. అంశం ఖాళీతో ప్రారంభమగుట గానీ, ఆఖరగుటకానీ కాకుండా అంశాల్ని జాగ్రత్తగా రచించాలి.
4. అంశాలలో ఇవ్వబడే ఖాళీలు అన్ని అంశాలకూ సమానమైన నిడివితో ఉండాలి. లేనిచో ఖాళీ యొక్క నిడివిని బట్టి సమాధానం నిడివి ఊహించటానికి వీలౌతుంది.
5. ఇచ్చిన ఖాళీ ఒకే పదం సరైనదై ఉండాలి.

4. సత్యాసత్య పద్ధతి :

ఇట్టి రకంలో ప్రతి అంశానికీ రెండు ప్రత్యామ్నాయాలుంటాయి. కనుక సరైన సమాధానాన్ని ఊహించటానికి 50% వీలుంది. ఈ పద్ధతిలో ఇచ్చిన అంశాలలో 50% సరైన సమాధానాల్ని అదృష్టం వల్లనే పొందవచ్చు.

అసత్యమైన అంశం నందు ఏ పదాన్ని మారిస్తే, అది సత్యమౌతుందో నిర్ణయించి, ఆ పదాన్ని కొట్టివేసి, సరైన పదాన్ని రాసే పద్ధతి కూడా అమలులో ఉంది.

ఉదాహరణ :

సూచన : ఈ దిగువ కొన్ని వాక్యాలివ్వబడ్డాయి. అందు సత్యమైన వానికెదురుగా 'స' అనియు, అసత్యమైతే 'అ' అనియు గుర్తించుము.

1. ఏ త్రిభుజంలోనైనా రెండు భుజాల మొత్తం మూడవ భుజం కంటే ఎక్కువ. ....
2. సమబాహు త్రిభుజంలోని కోణాలు అసమానం. ....

ఇట్టి అంశాలను తయారు చేయుటలో గుర్తుంచుకోవలసిన విషయాలు :

ఎ) ఒకటి కన్నా ఎక్కువ భావాల్ని ఒకే అంశంలో పరీక్షించరాదు.

బి) సగభాగం సత్యమైనది, మిగిలిన సగం అసత్యమైనది అగు అంశాల్ని ఉపయోగించరాదు.

సి) సత్యాసత్య అంశాల సంఖ్య సుమారుగా సమానంగా ఉండేట్లు జాగ్రత్త తీసుకోవాలి.

డి) రెండు వ్యతిరేకార్థాలు వచ్చు మాటలనుపయోగించి ఇట్టి అంశాలను తయారు చెయ్యరాదు.

ఇ) సమాధానాలు యాధృచ్ఛిక క్రమంలో ఉండేట్లు చూడాలి.

ఎఫ్) నిశ్చయంగా సత్యం అనిగాని, అసత్యం అనిగాని సమాధానం చెప్పగల అంశాలకే ఈ పద్ధతిని ఉపయోగించాలి.

జి) వివాదాస్పదమైనదీ లేదా అనిశ్చతమైనదీ అయిన సమాధానం కలిగిన అంశాన్ని ఇట్టి పరీక్షాంశంగా వ్రాయకూడదు.

5. లఘు సమాధాన పరీక్షాంశాలు :

ఇట్టి అంశానికి సమాధానాన్ని ఒక మాటలో కానీ, కొన్ని మాటల్లోకానీ ఇవ్వాలి. అంశం ప్రశ్న మాదిరిగా కానీ, అసంపూర్ణ వాక్యంగా కానీ ఉండవచ్చు. ఇతర పరీక్షాంశాలతో పోల్చిన, దీనిని నిర్మించుట సులభం. జవాబు పత్రాన్ని దిద్దుట కష్టమనిపించదు. ఎక్కువ సంఖ్యలో ఇట్టి అంశాలను ఇవ్వవచ్చు.

ఉదాహరణ :

సూచన : ఈ క్రింది ప్రశ్నలకు ఒక మాటలోకానీ, మాటల సముదాయంలో కానీ జవాబులిమ్ము.

ఒక త్రిభుజంలోని మూడు అంతర్కోణాల మొత్తం ఎన్ని డిగ్రీలు ?

ఇట్టి అంశాలను తయారుచేయుటలో గుర్తుంచుకోవలసిన విషయాలు :

ఎ) ఒక మాటతో కానీ, రెండుమూడు మాటల్లో కానీ సమాధానం ఏర్పడే అంశాల్ని ఎంపిక చేసుకోవాలి.

బి) పరీక్షాంశానికి ఒకే సమాధానం వచ్చేలా తయారు చేయాలి.

సి) ఒకటి, రెండు పదాల్ని వదిలేసి పాఠ్యపుస్తకం నుండి యాధాతథంగా ఏ అంశాల్ని వ్రాయరాదు.

డి) ఆ భావమును పరీక్షించడానికి వీలుగా వేరే మాటలలో తిరిగి ఆ అంశాన్ని రాయాలి.

పైన పేర్కొన్న 5 రకాల్లో ఏ రకానికి చెందిన అంశాన్నైనా 'విషయతంత్ర పరీక్షాంశం' అందురు. బోధనా లక్ష్యాలైన జ్ఞానం, అవగాహన, వినియోగం, నైపుణ్యాలలో దేని ఆధారంగా నిర్మించబడ్డ పరీక్షాంశాన్నైనా 'లక్ష్యాత్మక పరీక్షాంశం' అందురు అనగా ఒక లక్ష్యం యొక్క ఒక స్పష్టీకరణను ఆధారంగా చేసుకొని నిర్మింపబడినది 'లక్ష్యాత్మక పరీక్షాంతం' అనబడును.

ఉదా : ఈ క్రింద ఇవ్వబడ్డ వాక్యాన్ని సాంకేతిక రూపంలో వ్రాయుము.

'ఒకరాశికి నాలుగు కలుపగా వచ్చు ఫలితము ఏడుకు సమానము'.

ఇచ్చుట లక్ష్యం – అవగాహన

స్పష్టీకరణ – వాక్యరూపంలో ఉన్నదాన్ని సాంకేతిక రూపంలో వ్రాయుట. **5.2.2. పరీక్షల రూపకల్పన, ఉపయోగించడం:**

రాత పరీక్షలనేవి పాఠ్యప్రణాళికను విద్యార్థులు ఎంతమేరకు అవగాహన చేసుకున్నారో మదింపు చేయడానికి తోడ్పడతాయి. పాఠ్యప్రణాళికలో ఒక అంశం లేదా వివిధ అంశాలను స్పృశించేలా పరీక్షలను తయారు చేయవచ్చు. గణితంలో పిల్లలనిష్పాదన ప్రగతిని తల్లిదండ్రులకు తెలియజేయడానికి, తమ బోధనను పునఃపరిశీలించుటకు, పిల్లలు తమ అభ్యసనపై ప్రతిస్పందనకు పరీక్షలు అవకాశమిస్తాయి. పరీక్ష తయారీ అనేది అంత సులభమైన కృత్యం కాదు. ఒక సాధారణ యూనిట్ పరీక్ష తయారీలోను చాలా అంశాలను దృష్టిలో ఉంచుకోవాలి. వాటిని ఇప్పుడు పరిశీలిద్దాం.

పరీక్షలను రూపొందించడంలో దృష్టిలో ఉంచుకొనాల్సిన అంశాలు:

i) **పరీక్షాంశాలు స్పష్టతను, సప్రమాణత, విశ్వసనీయత కలిగి ఉండాలి:** దీని అర్థం ధృవీకరించబడిన గణిత జ్ఞానానికి చెందిన ప్రశ్నలై ఉండాలి. ఏ ఉద్దేశం కొరకు ఉద్దేశింపబడినవో వాటిని మదింపు చేసేలా ప్రశ్నలుండాలి. భాష సరళంగా ఉండాలి. జవాబు కొరకు చేసే సూచనలు స్పష్టంగా ఉండాలి. ఎవరైతే తయారు చేసారో వారు ఆ పరీక్షను నిర్వహించనిచో ఉపాధ్యాయులకు (ఎవరైతే నిర్వహించుచున్నారోవారికి) స్పష్టమైన సూచనలు ఇవ్వాలి.

ii) **పరీక్ష ఉద్దేశం :** ఏ ఉద్దేశం కొరకు పరీక్ష ఉద్దేశించబడినదో దానిని పరిగణనలోకి తీసుకోవాలి. ఉద్దేశాలననుసరించి రెండు రకాల పరీక్షలుంటాయి.

1. సాధనాస్థాయి పరీక్షించే ఉద్దేశ్యం : విద్యార్థుల సాధనాస్థాయిని పరీక్షించే ఉద్దేశమైతే, సాధనపరీక్షని ఉపయోగించాలి. సాధన పరీక్షగా పిలువబడే సంగ్రహణాత్మక పరీక్ష పిల్లల అభ్యసన గమ్యాన్ని ఎంత మేరకు సాధించారో కొలవడానికి తోడ్పడుతుంది.

2. లోప నిర్ధారణను పరీక్షించే ఉద్దేశ్యం: విద్యార్థుల బలాలు, బలహీనతలు నిర్ధారించడానికై ఉద్దేశించినదైతే లోప నిర్ధారణ పరీక్షని ఉపయోగిస్తారు. లోప నిర్ధారణ పరీక్ష పిల్లవాడికి అప్పటికే తెలిసిన అంశాలు, పూర్వభావనలు, దోషాలు, అభ్యసన సమస్యలు గుర్తించడానికి ఉపయోగపడుతుంది. లోప నిర్ధారణ పరీక్షా ప్రశ్నలను తయారు చేయడానికి ముందుగా ఉపాధ్యాయుడు, పిల్లలు ఏర్పరచుకొన్న అభ్యసన దోషాలు తెలుసుకోవాలి. వాటిని నిర్ధారించేలా

ప్రశ్నలను తయారు చేసుకోవాలి. సంవత్సరం మొదటిలో ఈ పరీక్షను నిర్వహిస్తే పిల్లలలో లోప నిర్ధారణ పరీక్ష ద్వారా తెలుసుకున్న అంశాల ఆధారంగా తరగతులను సరియైన రీతిలో నిర్వహించడానికి అవకాశముంది. అదేవిధముగా యూనిట్ మధ్యలో లేదా చివర నిర్వహించబడటం ద్వారా అభ్యసనలో వెలితి (Learning gap) లేదా అభ్యసన దోషాలను నిర్ధారించవచ్చు.

iii) **పరీక్ష ఫార్మెట్, పరీక్ష సమయం:** పరీక్ష ఫార్మెట్ (ప్రశ్నల రూపం), పరీక్ష సమయాన్ని ముందుగానే నిర్ధారించుకోవాలి. పరీక్ష ఫార్మెట్ అనగా వివిధ రకాల ప్రశ్నలు అంటే విషయ నిష్ఠ, లఘు సమాధాన, సంక్షిప్త, వ్యాసరూప ప్రశ్నలు మొ॥నవి, ప్రతి ప్రశ్నరకానికి కేటాయించిన మార్కులు, ప్రతి ప్రశ్న రకానికి గల ఎంచుకునే అవకాశాలు (Choices), కేటాయించిన సమయం అని అర్థం. పిల్లలు ఆలోచించి సమాధానాలివ్వడానికి కొంత అదనపు సమయం ఇవ్వటం అనుసరణీయం.

iv) **విషయ పరిధి, జ్ఞాన పరిధి:** పాఠ్యప్రణాళికలోని ప్రతి పాఠ్యాంశంలోని ఉప అంశాల నుంచి పరీక్ష ప్రశ్నలు రూపొందించాలి. గణితపరమైన వివేచనను, ఆలోచనలను రేకెత్తించే ప్రశ్నలు ఉండాలి. పరీక్షాంశాలు లోతైన అవగాహనను, సమస్యాసాధన, గణనా సంక్లిష్టత, దత్తాంశ విశ్లేషణ మొ॥న వాటిని మదింపు చేసేలా ఉండాలి.

గణన, గణన సూచి: పరీక్షను తయారుచేసుకొనేటప్పుడు, మార్కుల కేటాయింపు ఏవిధంగా చేయాలి అనే దానికి ప్రణాళిక తయారు చేసుకోవాలి.. బహుళైక ప్రశ్నలకు, ఒకే ఒక సమాధానం గల ప్రశ్నలకు ఒక మార్కు కేటాయించవచ్చు. ఎక్కువ మార్కులు కేటాయించే ప్రశ్నలకు మార్కులు కేటాయింపునకు వీలుగా తగిన ప్రశ్నలను తయారు చేసుకోవాలి. నిర్మాణాత్మకవాదం ప్రకారం ఎన్.సి.ఎఫ్-2005 సూచించిన విధంగా చివరి సమాధానానికి అంత ప్రాముఖ్యత కన్నా సమస్యాసాధనకు అనుసరించిన ప్రక్రియ లేదా సోపానాలకు ప్రాధాన్యతనివ్వాలి. గణనాదోషాలకు మార్కులు పెద్దగా తగ్గించనవసరం లేదు. ఉపాధ్యాయుడు బోధించిన మార్గంలోనే కాకుండా ఇతర విధానాలలో సమస్య సాధించేవారికీ మార్కులు ఇచ్చే విధంగా గణనా సూచి ఉండాలి. అవసరమైతే అంగీకరించని సమాధానాలు, కొద్ది మాత్రంగా అంగీకరించే సమాధానాలను సూచించాలి.

సమ్మిళితం, వైవిధ్యత: అన్ని రకాల పిల్లలకు తగిన సవాల్‌ను విసిరే విధంగా పరీక్ష ఉండాలి. దీని అర్థం పరీక్ష సంక్లిష్టతాస్థాయి అనగా సాధారణ ప్రశ్నలు, సంక్లిష్ట ప్రశ్నలు సమతూకంలో ఉండాలి. సాంఘిక, సాంస్కృతిక, భాషాపరమైన బేధం లేకుండా, జెండర్‌తో సంబంధం లేకుండా పరీక్షను రూపొందించాలి. అభ్యసన, శారీరక వైకల్యం కలిగిన వారిని దృష్టిలో నుంచుకొని, పరీక్ష తయారు చేసుకోవాలి. వినికిడి, దృష్టిలోపం గల వారిని దృష్టిలో ఉంచుకొని, తగిన విధంగా అవకాశం కల్పించాలి.భాషసరళంగా ఉండి, సందిగ్ధతకు దారితీయని విధంగా ఉండాలి.

పరిమితులు: రాత పరీక్ష అనేది ఒక పాఠ్యప్రణాళికలోని పాఠం లేదా పాఠంలోని అన్ని అంశాలు మదింపు చేయడానికి తోడ్పడకపోవచ్చు. ఆ పాఠంలోని ఏ అంశాలను ఈ పరీక్ష ద్వారా మదింపు చేసే అవకాశం లేదో తెలియపరచడం కూడా మంచిదే. ఎందుకంటే శాబ్దిక సమాచారం లేదా నమూనాలను ఉపయోగించుట లేదా అభ్యసన వనరుల ఆధారంగా కృత్యాన్ని నిర్వహించాల్సిన సందర్భాలలో, మదింపునకు పరీక్ష తోడ్పడదు. ఆ సందర్భాలలో ఆ అంశాలను మదింపు చేయడానికి ఇతర పరీక్షా సాధనాలు ఉపాధ్యాయునికి తోడ్పడతాయి.

పరీక్ష నిర్వహణ: పరీక్షకు పిల్లలు సిద్ధమవటానికి ముందు పరీక్షను నిర్వహించే తరగతిలో సరియైన ఏర్పాట్లు అనగా ఎంత మందిని తరగతిలో ఉంచాలి. ఎంతదూరంలో కూర్చోబెట్టాలి, కుర్చీల అమరిక, ఇతర సౌకర్యాలు ముందుగానే చూసుకోవాలి. పరీక్ష నిర్వహణకు కావలిసిన అన్నిరకాల సామగ్రిని సిద్ధం చేసుకోవాలి. పిల్లలను ప్రశాంత వాతావరణంలో సానుకూల దృక్పథంతో, సందేహాల

నివృత్తి చేసి పరీక్షకు సంసిద్ధులను చేయాలి.

సాధనా పరీక్ష నిర్మాణం క్లుప్తంగా సోపానాలు

మంచి సాధనా పరీక్ష తయారీకి ఈ క్రింది ముఖ్యసోపానాలను అనుసరించాలి.

సాధన నికషను తయారు చేయుటలో వివిధ దశలు :

1. తాను దేన్నైతే మాపనం చేయదలచుకొనెనో దాన్ని కచ్చితంగా నిశ్చయించాలి. అంటే ఏయే విద్యాలక్ష్యాల్ని మాపనం చేయ నిశ్చయించెనో తెలపాలి. తర్వాత వీనిని విద్యార్థుల ప్రవర్తనకు సంబంధించిన అంశాలుగా రూపొందించాలి.
2. ఏ విషయంపై సాధనను పరీక్షించదలచెం, దాని వివరాలు వ్రాయాలి. ఆశించిన లక్ష్యాల్ని చేరుకోటానికి విషయమే తగిన వాహనం.
3. ఒక్కొక్క లక్ష్యాన్ని సాధించు దిశలో జరిగిన పురోభివృద్ధిని మూల్యాంకనం చేయటానికి తగ్గ సాధనాన్ని నిర్ణయించుటే మూడవదశ. బోధనా లక్ష్యాన్ని బట్టి ఏ పరికరం వాడాలో నిశ్చయింపబడుతుంది.
4. విషయంలోని వివిధ అంశాల్లో దేనికెంత ప్రాధాన్యతనివ్వాలి, అట్లే వివిధ బోధనా లక్ష్యాల్లో దేనికెంత ప్రాముఖ్యం ఇవ్వాలి అనే అంశాల్ని పరిశీలించాలి. వివిధ లక్ష్యాలకు సంబంధించిన బోధనా ప్రాముఖ్యం, నికషయందు సంపూర్తిగా ప్రతిబింబించాలి.
5. వ్యాసరూప ప్రశ్నలనుపయోగించాలో, విషయతంత్ర ప్రశ్నల నుపయోగించాలో ఉపాధ్యాయుడు నిర్ణయించాలి. లక్ష్య స్వభావాన్ని బట్టి ఏ రకమైన పరీక్షాంశాన్ని ఉపయోగించాలో తెలుస్తుంది.
6. నికష యొక్క ఉద్దేశాలను బట్టి దాని స్వభావం ఉంటుంది. విద్యార్థుల్ని కోటిక్రమం (ర్యాంక్ ఆర్డర్)లో అమర్చడం నికష యొక్క ఉద్దేశమైతే, వివిధ కఠిన స్థాయిలలో ఉండు అంశాలే నికషలో చేర్చబడతాయి.
7. ఈ దశలో నికషను తయారుచేయడం జరుగుతుంది. దైనందిన బోధనా కార్యక్రమాల్లో ఎదురైన మంచి అంశాల్ని ఎప్పటికపుడు వ్రాసుకోవడం వల్ల నికషను తయారుచేయుటలో శ్రమ తప్పుతుంది. ఒకేసారి కూర్చుని ఏ పరీక్షకుడైనా పూర్తిగా మంచి నికషను తయారుచేయలేడు.
8. నికషలో గల అనేక రకాల అంశాల్ని ఏ రకానికవి విడదీసి సమూహంగా చేర్చాలి. కాలపరిమితి పూర్తయ్యే లోపులో తరగతిలోని అందరూ కానీ, ఇంచుమించుగా అందరూ కాని పూర్తిచేయగలిగేటట్లుగా నికష ఉండాలి. సూచనలు స్పష్టంగా ఉండాలి.
9. జవాబు పత్రాల్ని దిద్దటానికి వీలుగా మాదిరి జవాబు పత్రాన్ని సిద్ధం చేయాలి.

ఇట్లు తయారుచేయబడిన నికష ఉపాధ్యాయుని చేత అతని తరగతి4లో ఉపయోగించ బడుతుంది. సాధారణంగా సాధన నికషల్లో వ్యాసరూప ప్రశ్నలుఉపయోగించబడుతూంటాయి.

1. విషయాంశాల ఎంపిక
2. బోధనా లక్ష్యాల తయారీ
3. సాధనా పరీక్ష రూపం
    ఎ) విషయ భారత్వం
    బి) లక్ష్యాల / విద్యా ప్రమాణాల భారత్వం
    సి) ప్రశ్నాకృతి భారత్వం
    డి) కఠిన స్థాయి భారత్వం
4. బ్లూ ప్రింట్ తయారీ
5. బ్లూప్రింట్ ఆధారంగా పరీక్షాంశాల తయారీ
6. పునఃపరిశీలన, కూర్పు

మాదిరి సంగ్రహణాత్మక మదింపు ప్రశ్నపత్ర తయారీ

తరగతి: 6 **విషయం : గణితం**

1. విషయ భారత్వ పట్టిక

క్ర.సం.	విషయం	మార్కులు	మార్కుల శాతం
1.	మన సంఖ్యలను తెలుసుకొందాం	2	$2^1/_2$
2.	పూర్ణాంకాలు	8	10
3.	సంఖ్యలతో ఆడుకుందాం	8	10
4.	ప్రాథమిక జ్యామితీయ భావనలు	6	$7^1/_2$
5.	రేఖలు మరియు కోణాల కొలతలు	2	$2^1/_2$
6.	పూర్ణ సంఖ్యలు	6	$7^1/_2$
7.	భిన్నాలు-దశాంశ భిన్నాలు	12	15
8.	దత్తాంశ నిర్వహణ	8	10
9.	బీజగణిత పరిచయం	4	5
10.	చుట్టుకొలతలు మరియు వైశాల్యాలు	23	$28^3/_4$
11.	నిష్పత్తి మరియు అనుపాతం	22	$27^1/_2$
12.	సౌష్ఠవం	1	$1^1/_4$
13.	ప్రాయోగిక జ్యామితి	9	$11^1/_4$
14.	త్రిమితీయ-ద్విమితీయ ఆకారాల అవగాహన	1	$1^1/_4$
	ఛాయిస్ లేకుండా మొత్తం మార్కులు	112	140
	ఛాయిస్ తీసుకొని మొత్తం మార్కులు	80	100

2. విద్యా ప్రమాణాల భారత్వం

క్ర.సం	విద్యాప్రమాణం	మార్కులు	మార్కుల శాతం
1.	సమస్యా సాధన	32	40
2.	కారణాలు తెలపడం	16	20
3.	వ్యక్త పరచడం	8	10
4	అనుసంధానం	12	15
5.	ప్రాతినిధ్యపరచడం	12	15
	మొత్తం	80	100

3. ప్రశ్నాకృతి భారత్వం పట్టిక

క్ర.సం	ప్రశ్నాకృతి	మొత్తం మార్కులు	మార్కుల శాతం
1.	వ్యాసరూప	32	40
2.	సంక్షిప్త	20	25
3.	లఘు సమాధాన	8	10
4.	విషయనిష్ఠ	20	25
		80	100

4. కఠినతాస్థాయి భారత్వ పట్టిక

క్ర.సం	కఠినతాస్థాయి	మార్కులు	మార్కుల శాతం
1.	సులభం	25	31.25
2.	సాధారణం	37	46.25
3.	కఠినం	18	22.50
		80	100

క్ర.సం	విద్యాప్రమాణాలు → విషయం ↓	సమస్యా సాధన					కారణాలు చెప్పడం					వ్యక్తపరచడం					అనుసంధానం					ప్రాతినిధ్య పరచడం					మొత్తం మార్కులు	ప్రశ్నాకృతి వారీగా మార్కులు				
	ప్రశ్నాకృతి	వ్యా	సం	ల	వి	మొ	వ్యా	సం	ల	వి	మొ	వ్యా	సం	ల	వి	మొ	వ్యా	సం	ల	వి	మొ	వ్యా	సం	ల	వి	మొ		వ్యా	సం	ల	వి	మొ
1	మన సంఖ్యలు తెలుసుకుందాం	–	–	–	$(1)_1$	1	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	$(1)_1$	1	–	–	–	–	–	2	–	–	–	2	2
2	పూర్ణాంకాలు	$(1)_8$	–	–	–	8	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	8	8	–	–	–	8
3	సంఖ్యలతో ఆడుకుందాం	–	$(1)_4$	–	$(1)_1$	5	–	–	$(1)_2$	$(1)_1$	3	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	8	–	4	2	2	8
4	ప్రాథమిక జ్యామితీయ భావనలు	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	$(1)_4$	–	$(1)_1$	5	–	–	–	–	–	–	–	–	$(1)_1$	1	6	–	4	–	2	6
5	రేఖలు మరియు కోణాల కొలతలు	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–		–	–	–	–	–	–	–	$(2)_1$	2	–	–	–	–	–	2	–	–	–	2	2
6	పూర్ణ సంఖ్యలు	–	–	–	–	–	–	$(1)_4$	–	–	4	–	–	–	–	–	–	–	–	$(1)_1$	1	–	–	–	$(1)_1$	1	6	–	4	–	2	6
7	భిన్నాలు–దశాంశ భిన్నాలు	–	–	$(1)_2$	–	2	$(1)_8$	–	–	$(1)_1$	9	–	–	–	–	–	–	–	–	$(1)_1$	1	–	–	–	–	–	12	8	–	2	2	12
8	దత్తాంశ నిర్వహణ	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	$(1)_8$	–	–	–	8	8	8	–	–	–	8
9	బీజగణిత పరిచయం	–	–	–	$(1)_1$	1	–	–	–	–	–	–	–	$(1)_2$	$(1)_1$	3	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	4	–	–	2	2	4
10	చుట్టుకొలత మరియు వైశాల్యాలు	$(2)_8$	$(1)_4$	–	$(1)_1$	21	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	$(1)_2$	–	2	–	–	–	–	–	23	16	4	2	1	23
11	నిష్పత్తి మరియు అనుపాతం	$(1)_8$	–	–	$(2)_1$	10	$(1)_8$	–	–	–	8	–	–	–	–	–	–	$(1)_4$	–	–	4	–	–	–	–	–	22	16	4	–	2	22
12	సౌష్ఠవం	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	$(1)_1$	1	1	–	–	–	1	1
13	ప్రాయోగిక జ్యామితీ	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	$(1)_8$	–	–	$(1)_1$	9	9	8	–	–	1	9
14	త్రిమితీయ–ద్విమితీయ ఆకారాల అవగాహన	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	$(1)_1$	1	–	–	–	–	–	1	–	–	–	1	1
	మొత్తం మార్కులు (ఛాయిస్ కలుపుకుని)	32	8	2	6	48	16	4	2	2	24	–	4	2	2	8	–	4	2	6	12	16	–	–	4	20	112	64	20	8	20	112
	మొత్తం మార్కులు (ఛాయిస్ తీసివేసి)	16	8	2	6	32	8	4	2	2	16	–	4	2	2	8	–	4	2	6	12	8	–	–	4	12	80	32	20	8	20	80

గమనిక: 1. ( )లో యివ్వబడిన సంఖ్య, ప్రశ్నల సంఖ్యను సూచిస్తుంది. 2. ( ) దిగువన యివ్వబడిన సంఖ్య ప్రతి ప్రశ్నకు మార్కులను సూచిస్తుంది.

సంగ్రహణాత్మక మదింపు - మాదిరి ప్రశ్నాపత్రం

గణితశాస్త్రం

పార్ట్- ఎ & బి

తరగతి-6 గరిష్ఠ మార్కులు : 80

విద్యార్థి పేరు : క్రమసంఖ్య: సమయం: 2 గం॥ 30ని॥ +15ని॥

పార్ట్-ఎ గరిష్ఠ మార్కులు : 60

విద్యాప్రమాణం	సమస్యాసాధన					కారణాలు తెలపడం			వ్యక్తపరచడం		అనుసంధానం		ప్రాతినిధ్య పరచడం	మొత్తం
ప్రశ్న సంఖ్య	1	5	6	10	11	2	7	12	3	8	4	9	13	13 ప్రశ్నలు
మార్కులు														

సూచన : 1. పార్ట్-ఎ మూడు సెక్షన్‌లుగా ఉంటుంది.

2. సెక్షన్-3 నందలి ప్రశ్నలకు అంతర్గత ఎంపిక ఉంటుంది.

సెక్షన్-1 (లఘు సమాధాన ప్రశ్నలు)

4×2మా = 8మార్కులు

సూచన: 1. అన్ని ప్రశ్నలకు సమాధానాలు రాయండి

2. ప్రతి ప్రశ్నకు 2 మార్కులు

1. $2^2/_3 + 3^2/_3$ సూక్ష్మీకరించండి.
2. 15, 21లకు ఒక కారణాంకం 3. ఈ సంఖ్యల భేదానికి కూడా 3 కారణాంకం అవుతుందా? వివరించండి.
3. ఒకని వయస్సు అతని కుమారుని వయస్సుకు 3 రెట్లు కన్నా 5 సంవత్సరాలు తక్కువదా ఈ సంబంధాన్ని చరరాశి 'x' ని ఉపయోగించి రాయండి.
4. ఒక సమద్విబాహుత్రిభుజ చుట్టుకొలత 24 సెం.మీ. సమానం కాని భుజం కొలత 6 సెం.మీ. అయిన సమాన భుజాల కొలత ఎంత?

సెక్షన్-2 (సంక్షిప్త సమాధాన ప్రశ్నలు)

5×4 మా = 20 మార్కులు

సూచన: 1. అన్ని ప్రశ్నలకు సమాధానాలు రాయండి.

2. ప్రతి ప్రశ్నకు 4 మార్కులు.

5. ఏ కనిష్ఠ సంఖ్యకు 5 కలిపిన ఆ సంఖ్య 12,14 మరియు 18లచే నిశ్శేషంగా భాగింపబడుతుంది?
6. ఒక దీర్ఘచతురస్రాకార నేల పొడవు, దాని వెడల్పు కంటే 20 మీ॥. ఎక్కువ. దాని చుట్టుకొలత 280 మీ॥ అయిన దాని పొడవు ఎంత?

7. సిమ్లాలో ఒక రోజు ఉష్ణోగ్రత -8^0C అదేరోజు ఊటీలో ఉష్ణోగ్రత -10^0 C అయినఈ రెండు ప్రదేశాలలో ఏ ప్రదేశం ఎక్కువ చల్లగా ఉంది? ఎందుకు?

8. నిత్యజీవితంలో వృత్తాకారంలో, త్రిభుజాకారంలో, దీర్ఘచతురస్రాకారంలో, చతురస్రాకారంలో ఉండే వాటికి ఒక్కొక్క ఉదాహరణ ఇవ్వండి.

9. ఒక కప్పు టీ తయారీకి 25మి.లీ.పాలు అవసరం అయినచో ఒక లీటరు పాలతో ఎన్ని కప్పుల టీ తయారుచేయవచ్చు?

సెక్షన్-3 (వ్యాసరూప ప్రశ్నలు)

4×8మా = 32 మార్కులు

సూచన: 1. అన్ని ప్రశ్నలకు సమాధానాలు రాయండి
2. ప్రతి ప్రశ్నలో ఒక దానిని ఎంపిక చేసుకొనవచ్చు.
3. ప్రతి ప్రశ్నకు 8 మార్కులు.

10. ఒక రైతు వద్ద మేకలు, ఆవుల నిష్పత్తి 5:2.
ఎ) ఆవుల సంఖ్య 10 అయినప్పుడు మేకల సంఖ్య ఎంత?
బి) మేకల సంఖ్యకు, మొత్తం పశువుల సంఖ్యకు గల నిష్పత్తి ఎంత?
సి) మొత్తం పశువుల సంఖ్యకు, ఆవుల సంఖ్యకు గల నిష్పత్తి ఎంత?
డి) ఆవుల సంఖ్య 10 అయితే మొత్తం పశువుల సంఖ్య ఎంత?

లేదా

సరియగు సంఖ్యా ధర్మాలను ఉపయోగించి, ఈక్రింది వాటిని సూక్ష్మీకరించండి.
ఎ) 250×12+250×28   బి) 2×71×5
సి) 319+69+81   డి) 196×5

11. ఒక తోట చతురస్రాకారంలో ఉంది. దాని భుజం 3.5 మీ అయినచో ఆ తోట చుట్టూ కంచె వేయుటకు 1మీ॥కి 15 రూ॥ చొప్పున ఎంత ఖర్చు అవుతుంది?

లేదా

ఒక దీర్ఘచతురస్రాకార గది పొడవు, వెడల్పులు వరుసగా 10 మీ॥ మరియు 6 మీ॥. ఆ గది నేలపై మొత్తం తివాచీ పరచుటకు 1 చ॥మీకి 30 రూపాయలు చొప్పున ఎంత ఖర్చు అగును?

12 ఎ) 1/2, 1/6, 1/5, 1/3, 1/4 భిన్నాలు సమానమేనా? కానిచో వీటిలో ఏది పెద్దది? ఏది చిన్నది? ఎలా?
బి) 8.6, 8.09. 8.8 ఈ దశాంశ సంఖ్యలను ఆరోహణ క్రమంలో అమర్చి రాయండి.

లేదా

రాజు వద్ద గల 12 రూపాయలు, రాము వద్ద గల 18 రూపాయలు కలిపి మొత్తం డబ్బుతో 20 పెన్సిళ్ళను కొన్నారు.
1) రాజు ఇద్దరు చెరో 10 పెన్సిళ్ళు తీసుకుందాం అన్నాడు.
2) రాము తాను12, రాజుకి 8 పెన్సిళ్ళు తీసుకోవాలి అన్నాడు. ఎవరి లెక్క సరియైనది? వివరించండి.

13. AB=6 సెం.మీ. రేఖా ఖండాన్ని గీచి, దానికి లంబ సమద్వి ఖండన రేఖను గీచి, నిర్మాణ క్రమం రాయండి.

లేదా

రహీమ్ యొక్క ఆవాస ప్రాంతంలో 275 మంది ప్రజల విద్యార్హతల వివరాలు సేకరించి విభజన పట్టిక తయారుచేసాడు. ఈ దత్తాంశానికి కమ్మీరేఖా చిత్రాన్ని గీయండి.

ప్రజల విద్యార్హత స్థాయి	ప్రాథమిక స్థాయి	సెకండరీ స్థాయి	ఇంటర్ స్థాయి	డిగ్రీ స్థాయి	పీజీ స్థాయి
ప్రజల సంఖ్య	70	110	50	35	10

పార్ట్-బి

తరగతి: 6 గరిష్ఠమార్కులు : 20

విద్యా ప్రమాణం	సమస్యాసాధన						కారణాలు తెలపడం		వ్యక్త పరచడం		అనుసంధానం						ప్రాతినిధ్య పరచడం				మొత్తం
ప్రశ్న సంఖ్య	14	17	23	25	26	31	16	21	30	32	15	19	20	22	24	29	18	27	28	33	20 ప్రశ్నలు
మార్కులు																					

సూచన: 1. కింది ప్రతిప్రశ్నకు దిగువ ఇవ్వబడిన నాలుగు జవాబుల నుండి సరియైన సమాధానాన్ని ఎంపిక చేసి, ఆ అక్షరాన్ని బ్రాకెట్‌లో రాయండి.

2. ప్రతి ప్రశ్నకు 1 మార్కు.

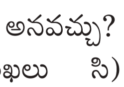
20×1మార్కు = 20 మా॥

14. 3515 సంఖ్యలో '5' యొక్క స్థాన విలువల భేదం ( )
ఎ) 500 బి) 5 సి) 495 డి) 505

15. 1 మిలియన్ అనగా ( )
ఎ) కోటి బి) 10లక్షలు సి) లక్ష డి) 10 కోట్లు

16. 2 మరియు 5 చేత నిశ్శేషంగా భాగింపబడాలంటే ఆ సంఖ్య ఒకట్ల స్థానంలో ఉండాల్సిన అంకె ( )
ఎ) 2 బి)5 సి) 0 డి) 7

17. రెండు సంఖ్యల లబ్ధం 156. వాటి కసాగు 78 అయిన గసాభా ( )
ఎ) 2 బి) 4 సి) 1 డి) 3

18. ప్రక్కపటంలో $\overline{AB}$ ను ఏమంటారు? 

( )
ఎ) వృత్త కేంద్రం బి) జ్యా సి) వ్యాసార్థము డి) వ్యాసము

19. స్కేలు యొక్క అంచులను ఏ రేఖలు అనవచ్చు? ( )
ఎ) లంబరేఖలు బి) ఖండన రేఖలు సి) సమాంతర రేఖలు డి) కిరణాలు

20 సముద్రం లోతును సూచించే పూర్ణ సంఖ్య ( )
ఎ) సున్న బి) ధన సంఖ్య సి) ఋణ సంఖ్య డి) ఏదీ కాదు

21. కింది వానిలో సజాతి భిన్నాల సమూహం ఏది? ( )
ఎ) $^2/_7$, $^3/_7$, $^4/_7$ బి) $^1/_2$ $^2/_9$ $^3/_9$ సి) $^1/_7$ $^1/_5$ $^1/_4$ డి) $^5/_{10}$ $^2/_4$ $^2/_5$

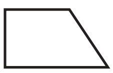
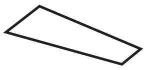
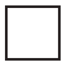
22. మీటరు కడ్డీ నుంచి 7/8 మీ. భాగం విరిగిపోయింది. మిగిలిన భాగం ( )
ఎ) 3/8 బి) 5/8 సి) 4/8 డి) 1/8

23. ఒక కలము ఖరీదు 5 రూ॥ అయితే 'y' కలముల వెల (రూపాయలలో) ( )
ఎ) $5+y$ బి) $5.y$ సి) $5-y$ డి) $y/5$

24. 9 గం॥ సమయంలో గడియారంలో రెండు ముళ్ళ మధ్య కోణం ( )
ఎ) 180^0 బి) 60^0 సి) 30^0 డి) 90^0

25. ఒక చతురస్ర వైశాల్యం 16 చ.సెం॥మీ. అయిన భుజం(సెం.మీలలో) ( )
ఎ) 8 బి) 4 సి) 2 డి) 6

26. 5 రూపాయలకు 50 పైసలకు గల నిష్పత్తి ( )
ఎ) 1:10 బి) 2:1 సి) 10:1 డి) 1:2

27 కింది వానిలో సౌష్ఠవ పటం ఏది? ( )
ఎ)  బి) సి)  డి) 

28. ఒక రేఖా ఖండాన్ని సమద్వి ఖండన చేయుటకు ఉపయోగపడే పరికరం ( )
ఎ) విభాగిని బి) కోణమానిని సి) వృత్తలేఖిని డి) మూలమట్టం

29. "గోళీ" యొక్క ఆకారం ( )
ఎ) వృత్తం బి) స్థూపం సి) శంఖువు డి) గోళం

30. ప్రక్కపటంలో $\overrightarrow{OA}$ దేన్ని సూచిస్తుంది?

( )
ఎ) రేఖ బి) కిరణము సి) రేఖా ఖండం డి) బిందువు

31 గోపి 45 రూపాయలను రామ్,శ్యామ్‌లకు 2:3 నిష్పత్తిలో పంచిన శ్యామ్‌కు వచ్చేది రూపాయలలో ( )
ఎ) 18 బి)24 సి) 27 డి) 20

32. పీటర్ వద్ద P బంతులు కలవు. డేవిడ్ దానికి 3 రెట్లు బంతులు కన్నా 2 తక్కువ కలిగి ఉన్న డేవిడ్ దగ్గర ఉన్న బంతులు ( )
ఎ) $P+3$ బి) $P-2$ సి) $2P+3$ డి) $3P-2$

33. (−2)+(−1)లను సంఖ్య రేఖపై సూచించేది ( )
ఎ) బి) సి) డి)

సంగ్రహణాత్మక మదింపు – మాదిరి ప్రశ్నాపత్రం

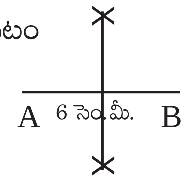
గణనా సూచి – సెక్షన్ –1

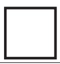
ప్రశ్న సంఖ్య	అంశం	అంశానికి మార్కులు	ప్రశ్నకు మార్కులు
1.	$2^2/_3+3^2/_3 = 2+^2/_3+3+^2/_3$ $= 5+^2/_3+^2/_3$ $= 5+^4/_3$ $= 5+1+^1/_3$ $= 6^1/_3$	} $^1/_2$ $^1/_2$ $^1/_2$ $^1/_2$	2
2.	15,21 యొక్క కారణం –3 ఈ సంఖ్యల భేదానికి 3 కారణాంకమవుతుంది కారణం: ఆ సంఖ్యలు 3 గుణిజాలు అవుతాయి కనుక 3 గుణిజాలలో భేదం కూడా 3 గుణిజం అవుతుంది కనుక ఆసంఖ్యల భేదంకి 3 కారణాంకం	 $^1/_2$ $^1/_2$ $^1/_2$ $^1/_2$	2
3.	కుమారుని వయస్సు = x సంవత్సరాలు కుమారుని వయస్సుకి 3 రెట్లు = $3x$ కుమారుని వయస్సుకి 3 రెట్లు కన్నా 5 సం॥ తక్కువ = $3x-5$ $\therefore$ తండ్రి వయస్సు = $3x-5$	$^1/_2$ $^1/_2$ $^1/_2$ $^1/_2$	2
4.	సమద్విబాహుత్రిభుజ చుట్టుకొలత = 24 సెం.మీ. సమానం కాని భుజం కొలత=6 సెం.మీ. సమానం అయ్యే రెండు భుజాలకొలత మొత్తం = 24–6 = 18 సెం.మీ ఒక్కొక్క సమాన భుజం కొలత $=^{18}/_2 = 9$ సెం.మీ.	$^1/_2$ } 1 $^1/_2$	2

	సెక్షన్-2		
5.	12,14,18లచే నిశ్శేషంగా భాగింపబడే కనిష్ఠ సంఖ్య = వాటి కసాగు 2 | 12, 14, 18 3 | 6, 7, 9 2, 7, 3 $\therefore$ కసాగు = 2×3×2×7×3 = 252 కావలసిన సంఖ్య = 252–5 = 247	 1/2 1/2 1 1	4
6.	దీ॥ చ॥ నేల వెడల్పు = x మీ॥ పొడవు = x+20 మీ॥ చుట్టుకొలత = 2(x+x+20) 4x+40 = 280 4x = 240 x = 60 $\therefore$ పొడవు = x+20 = 60+20 = 80 మీ॥	1/2 1/2 1/2 1/2 1/2 1/2 1	4
7.	సిమ్లా ఉష్ణోగ్రత = -8^0c ఊటీ ఉష్ణోగ్రత = -10^0c -10^0c, -8^0c కన్నా తక్కువ ($-8^0-2^0 = -10^0$c) $\therefore$ ఊటీ, సిమ్లా కన్నా చల్లగా ఉంటుంది ఆరోజు	1 1 1 1	4
8.	వృత్తాకారం – రూపాయనాణెం & ముఖ తలం త్రిభుజాకారం – సమోసా దీర్ఘచతురస్రాకారం – బ్లాక్‌బోర్డ్ చతురస్రాకారం – చదరంగం బోర్డ్	1 1 1 1	4

9.	కప్పు 'టీ' తయారీకి కావలసిన పాలు = 25 మి॥లీ 1 లీటరు పాలు = 1000 మి॥లీ లీటరు పాలతో తయారు చేయగల కప్పు టీలు = 1000/25 = 40 కప్పులు	1 1 1 1	4
	సెక్షన్ - 3		
10.	1. రైతు వద్ద మేకలు, ఆవుల నిష్పత్తి = 5:2 అనగా 5 భాగలు మేకలు, 2 భాగాలు ఆవులు 10 ఆవులు అంటే ఒక్కొక్కొ భాగం = 5 ఆవులు కనుక మేకలు 5 భాగాలు కనుక 5×5=25 మేకలు 2. మేకల సంఖ్యకు మొత్తం పశువుల సంఖ్యకు గల నిష్పత్తి = 5:(5 +2) =5:7 3. మొత్తం పశువుల సంఖ్యకు ఆవుల సంఖ్యకు గల నిష్పత్తి = 7:2 4. ఆవుల సంఖ్య 10 అయితే మొత్తం పశువుల సంఖ్య = 10 + 25 = 35 లేదా	1 1 1 1 } 1 } 1 } 1	8
	1. 250×12 + 250×28 = 250 (12+28) గుణకార విభాగ న్యాయం = 250 (40) = 10000 2. 2×71×5 = 2×5×71 (సహచర న్యాయం) = 10 × 71 = 710 3. 319+69+81 - 319+81+69 (సహచర న్యాయం) = 400 + 69 = 469 4. 196 × 5 = (200−4) × 5 = 200×5 - 4×5 (గుణకార విభాగ న్యాయం) = 1000−20 = 980	 1 1 1 1 1 1 1 1	

11.	చతురస్రాకార తోట భుజం = 3.5 మీ॥ తోట చుట్టు కొలత = 4 × భుజం = 4 × 3.5 = 14 మీ కంచె వేయటానికి 1 మీ॥కి – 15 రూపాయలు 14 మీ॥కి – ? = 14 × 15 = 210 రూ॥ లేదా దీర్ఘచతురస్రాకార గది పొడవు, వెడల్పులు = 10 మీ॥, 6 మీ॥ గది వైశాల్యం=(పొడవు× వెడల్పు) = 10×6=60 చ॥.మీ 1 చ॥ మీకి – 300 రూ॥ 60 చ॥మీ కి – ? = 300 × 60 = 18000 రూపాయలు	 2 2 2 2 2 2	 8
12	1. $^1/_2$, $^1/_6$, $^1/_5$, $^1/_3$, $^1/_4$ సమానమేనా? కాదు విజాతి భిన్నాలలో లవాలు సమానమైతే హరం చిన్నది పెద్ద భిన్నం, హారం పెద్దది చిన్న భిన్నం పెద్ద భిన్నం – 1/2 చిన్న భిన్నం – 1/6 2. 8.6, 8.59, 8.09. 8.8 ఆరోహణ క్రమం $8.6 = 8+^6/_{10} = 8+^{60}/_{100}$ $8.09 = 8+^9/_{100} = 8+^9/_{100}$ $8.8 = 8+^8/_{10} = 8+^{80}/_{100}$ ∴ ఆరోహణ క్రమం = 8.09, 8.59, 8.6, 8.8 లేదా	$^1/_2$ $1^1/_2$ 1 1 1 1 1 1	8
	రాజు, రాము వద్ద గల రూపాయల నిష్పత్తి =12:18 =2:3 1. రాజు పెన్సిళ్ళను పంచుకొందామన్న నిష్పత్తి = 10 : 10 = 1:1 2. రాము పెన్సిళ్ళను పంచుకొందామన్న నిష్పత్తి = 8:12 = 2:3 రాజు, రాము వద్ద గల రూపాయల నిష్పత్తి, రాము పెన్సిళ్ళను పంచుకొందామన్న నిష్పత్తికి సమానం కనుక రాము పంచుకొందామన్న నిష్పత్తి సరియైనది	 1 1 2 2 1 1	 8

13.	చిత్రపటం  ఎ) రేఖాఖండం గీచినందుకు బి) రేఖాఖండం పై వైపున చాపాలు గీసినందుకు సి) రేఖాఖండం దిగువ వైపున చాపాలు గీసినందుకు డి) ఖండన బిందువులను కలిపినందుకు నిర్మాణ క్రమం : 1. AB = 6 సెం.మీ. రేఖా ఖండాన్ని గీచితిని. 2. A,B లు కేంద్రంగా ABలో సగం కన్నా ఎక్కువ పొడవు తీసుకొని ABకి పైన క్రింద చాపాలు గీయాలి. 3. ఖండన బిందువులు కలపగా ఏర్పడు రేఖాఖండం ABకి లంబ సమద్విఖండన రేఖ అవుతుంది లేదా	1 1/2 1 1 1/2 1 2 1	8
	x, y అక్షాలను సూచించినందుకు x-అక్షం, y-అక్షాలపై స్కేళ్లు సూచించినందుకు 5 కమ్మీ చిత్రాలకు (ఒక్కొక్క కమ్మిచిత్రానికి 1 మార్కు చొప్పున)	1 2 5	8

ప్రశ్న సంఖ్య	అంశం	జవాబు	ప్రశ్నకు మార్కులు
14	500–5= 495	సి	1
15	1 మిలియన్ = 10 లక్షలు	బి	1
16.	2,5లచే నిశ్శేషంగా భాగింప బడాలంటే యిచ్చిన అంకెలలో '0' ఉంది సరైన జవాబు	సి	1
17.	రెండు సంఖ్యల లబ్ధం = కసాగు × గసాభా	ఎ	1
18.	$\overline{AB}$ – వ్యాసము	డి	1
19.	స్కేలు అంచులు సమాంతర రేఖలు	సి	1
20.	సముద్రం లోతును –ఋణ సంఖ్యచే సూచిస్తాం	సి	1
21.	$^2/_7$, $^3/_7$, $^4/_7$	ఎ	1
22.	$1-{}^7/_8 = {}^1/_8$	డి	1
23.	5***y***	బి	1
24.	90^0	డి	1
25.	భుజం = 4 సెం.మీ	బి	1
26.	500 పైః : 50 పై = 10 : 1	బి	1
27.		డి	1
28.	వృత్త లేఖిని	సి	1
29.	గోళము	డి	1
30.	కిరణము	బి	1
31.	45 × 3/5=27 రూపాయలు	సి	1
32.	3P-2	డి	1
33.		సి	1

సంగ్రహణాత్మక మదింపు - ప్రశ్నల వారీ వివిధ అంశాలకు కేటాయింపు

ప్రశ్న సంఖ్య	విద్యాప్రమాణం	పాఠ్యాంశం/విషయం	ప్రశ్నాకృతి	మార్కులు	సమయం	కాఠిన్యస్థాయి
1	సమస్యాసాధన	భిన్నాలు-దశాంశ భిన్నాలు	లఘు	2	4ని॥	సాధారణం
2.	కారణాలు చెప్పడం	సంఖ్యలతో ఆడుకుందాం	లఘు	2	4ని॥	కఠినం
3.	వ్యక్తపరచడం	బీజగణిత పరిచయం	లఘు	2	4ని॥	సాధారణం
4.	అనుసంధానం	చుట్టుకొలత మరియు వైశాల్యాలు	లఘు	2	4ని॥	సులభం
5	సమస్యాసాధన	సంఖ్యలతో ఆడుకుందాం	సంక్షిప్త	4	8ని॥	కఠినం
6.	సమస్యాసాధన	చుట్టుకొలత మరియు వైశాల్యాలు	సంక్షిప్త	4	8ని॥	సాధారణం
7	కారణాలు తెలపడం	పూర్ణసంఖ్యలు	సంక్షిప్త	4	8ని॥	సులభం
8	వ్యక్తపరచడం	ప్రాథమిక జ్యామితీయ భావనలు	సంక్షిప్త	4	8ని॥	సాధారణం
9.	అనుసంధానం	నిష్పత్తి మరియు అనుపాతం	సంక్షిప్త	4	8ని॥	సులభం
10.	సమస్యాసాధన	నిష్పత్తి మరియు అనుపాతం/ పూర్ణాంకాలు	వ్యాస	8	16ని॥	సాధారణం
11.	సమస్యాసాధన	చుట్టుకొలత మరియు వైశాల్యాలు	వ్యాస	8	16ని॥	సాధారణం
12.	కారణాలు తెలపడం	భిన్నాలు-దశాంశ భిన్నాలు/ నిష్పత్తి మరియు అనుపాతం	వ్యాస	8	16ని॥	సులభం
13.	ప్రాతినిధ్యపరచడం	ప్రాయోగిక జ్యామితి/దత్తాంశ నిర్వహణ	వ్యాస	8	16ని॥	కఠినం
14.	సమస్యాసాధన	మనసంఖ్యలను తెలుసుకుందాం	విషయనిష్ఠ	1	$1^1/_2$ని॥	సులభం
15.	అనుసంధానం	మనసంఖ్యలను తెలుసుకుందాం	విషయనిష్ఠ	1	$1^1/_2$ని॥	సులభం
16.	కారణాలు తెలపడం	సంఖ్యలతో ఆడుకుందాం	విషయనిష్ఠ	1	$1^1/_2$ని॥	సాధారణం
17.	సమస్యాసాధన	సంఖ్యలతో ఆడుకుందాం	విషయనిష్ఠ	1	$1^1/_2$ని॥	సాధారణం
18.	ప్రాతినిధ్య పరచడం	ప్రాథమిక జ్యామితీయ భావనలు	విషయనిష్ఠ	1	$1^1/_2$ని॥	సులభం
19.	అనుసంధానం	రేఖలు మరియు కోణముల కొలతలు	విషయనిష్ఠ	1	$1^1/_2$ని॥	సులభం
20.	అనుసంధానం	పూర్ణసంఖ్యలు	విషయనిష్ఠ	1	$1^1/_2$ని॥	సాధారణం
21.	కారణాలు తెలపడం	భిన్నాలు-దశాంశ భిన్నాలు	విషయనిష్ఠ	1	$1^1/_2$ని॥	సాధారణం
22.	అనుసంధానం	భిన్నాలు-దశాంశ భిన్నాలు	విషయనిష్ఠ	1	$1^1/_2$ని॥	కఠినం
23.	సమస్యాసాధన	బీజగణిత పరిచయం	విషయనిష్ఠ	1	$1^1/_2$ని॥	సాధారణం
24.	అనుసంధానం	రేఖలు మరియు కోణాల కొలతలు	విషయనిష్ఠ	1	$1^1/_2$ని॥	కఠినం
25.	సమస్యాసాధన	చుట్టుకొలత మరియు వైశాల్యాలు	విషయనిష్ఠ	1	$1^1/_2$ని॥	సాధారణం
26.	సమస్యాసాధన	నిష్పత్తి మరియు అనుపాతం	విషయనిష్ఠ	1	$1^1/_2$ని॥	కఠినం
27.	ప్రాతినిధ్యపరచడం	సౌష్ఠవం	విషయనిష్ఠ	1	$1^1/_2$ని॥	సాధారణం
28.	ప్రాతినిధ్యపరచడం	ప్రాయోగిక జ్యామితి	విషయనిష్ఠ	1	$1^1/_2$ని॥	సులభం
29.	అనుసంధానం	త్రిమితీయ-ద్విమితీయ ఆకారాల అవగాహన	విషయనిష్ఠ	1	$1^1/_2$ని॥	సులభం
30.	వ్యక్తపరచడం	ప్రాథమిక జ్యామితీయ భావనలు	విషయనిష్ఠ	1	$1^1/_2$ని॥	సులభం
31.	సమస్యాసాధన	నిష్పత్తి మరియు అనుపాతం	విషయనిష్ఠ	1	$1^1/_2$ని॥	కఠినం
32.	వ్యక్తపరచడం	బీజగణిత పరిచయం	విషయనిష్ఠ	1	$1^1/_2$ని॥	సాధారణం
33.	ప్రాతినిధ్యపరచడం	పూర్ణ సంఖ్యలు	విషయనిష్ఠ	1	$1^1/_2$ని॥	సాధారణం
				80 మార్కులు	150ని॥ 2గం30ని॥	

7. గణనాసూచి, స్కోరింగ్ కీ తయారీ

జట్టుకృత్యం : ఏదైనా ప్రాథమికోన్నత తరగతికి చెందిన గణిత అధ్యాయాన్ని తీసుకొని పైన పేర్కొన్న సోపానాలననుసరించి సాధన పరీక్షను తయారుచేయండి. చర్చించండి, తరగతిలో సమర్పించండి.

లోప నిర్ధారణ పరీక్ష (Diagnostic Test) నిర్మాణం: లోప నిర్ధారణ పరీక్షలు అనేవి ప్రతి పిల్లవాడి బలాలు, బలహీనతలు గుర్తించి వాటికి గల కారణాలు తెలుసుకోవడానికి తోడ్పడతాయి. ఇవి అభ్యసన సమస్యలు, అభ్యసనంలో లోటుపాట్లు నిర్ణయించడానికి తోడ్పడతాయి. లోపనిర్ధారణ పరీక్ష నిర్మాణంలో విషయాంశాల కన్నా అభ్యసనాంశాలపై ముఖ్యంగా దృష్టి కేంద్రీకరించాలి. అభ్యసన ఫలితాల కన్నా అభ్యసన నైపుణ్యాలను పరీక్షించాలి. లోప నిర్ధారణ పరీక్ష నిర్మాణానికి దిగువ సోపానాలు అనుసరించాలి.

1. విషయాంశంలో క్లిష్టమైన అభ్యసనాంశాలు గుర్తించుట.
2. ప్రతి అభ్యసన అంశంలో అంతరంగా ఉన్న ముఖ్య నైపుణ్యాలు గుర్తించుట.
3. ఈ అంశాల విశ్లేషణను సమర్థంగా నిర్వహించి తగిన అభ్యసన నైపుణ్యాలను పేర్కొని, ఆ అభ్యసన నైపుణ్యాలను క్రమ పద్ధతిలో అమర్చుకోవాలి.
4. ప్రతి అభ్యసన నైపుణ్యానికనుగుణంగా పరీక్షాంశాలు (2 లేదా ఎక్కువ) తయారుచేసుకోవాలి.
5. వాటికనుగుణంగా ప్రశ్నాపత్రాన్ని తయారుచేయాలి.
6. లోపనిర్ధారణ పరీక్షను నిర్వహించాలి.
5. దోష విశ్లేషణ పట్టికను తయారు చేయాలి.

ఇప్పుడు 6వ తరగతిలో "విజాతి భిన్నాల సంకలనం" సమస్యాంశానికి తగిన లోప నిర్ధారణ (Diagnostic) పరీక్ష నిర్మించడం గురించి తెలుసుకుందాం. విజాతి హారాలు గల భిన్నాల సంకలనానికి సంబంధించి ఈ దిగువ పేర్కొన్న "అభ్యసన నైపుణ్యాలు" విద్యార్థులు కలిగి ఉండాలి.

1. ఇచ్చిన భిన్నాలలో లవ, హారాలను గుర్తించుట.
2. మిశ్రమ భిన్నాలను అపక్రమ భిన్నాలుగా మార్చుట.
3. హారాలు సమానంగా గల భిన్నాల (సజాతి భిన్నాలు)ను ప్రత్యక్షంగా సంకలనం చేయగలమని, విభిన్న హారాలు ఉన్న వాటిని ప్రత్యక్షంగా కలపలేమని గుర్తించుట.
4. హారాలకు క.సా.గు కనుగొనుట.
5. ఆ భిన్నాలను సామాన్యహారం గల భిన్నాలుగా మార్చుట.
6. సజాతి భిన్నాల సంకలనం గుర్తుకు తెచ్చుకొనుట.
7. సజాతి భిన్నాల సంకలన నియమం ఆధారంగా సంకలనం చేయుట.

విద్యార్థులు పై అభ్యసన నైపుణ్యాలలో ఒకటి లేదా అంత కంటే ఎక్కువ అభ్యసన నైపుణ్యాలలో సమస్యను ఎదుర్కొంటే విజాతి భిన్నాల సంకలనం చేయలేరు.

ఏ అభ్యసన నైపుణ్యం లేదా నైపుణ్యాలలో విద్యార్థి సమస్యను ఎదుర్కొంటున్నాడు అనేది గుర్తించడమెలా? కనుక ప్రతి అభ్యసన నైపుణ్యానికి అనుగుణంగా పరీక్షాంశాన్ని తయారుచేసుకొని క్రమ పద్ధతిలో అమర్చుకొని లోప నిర్ధారణ పరీక్షను తయారు చేయాలి.

పై సమస్యకు సంబంధించి ఈ దిగువ లోప నిర్ధారణ పరీక్షను అధ్యయనం చేయండి.

1. ప్రతి భిన్నాన్ని గుర్తించి దాని పేరుని పేర్కొనండి.

ఎ) $^{4}/_{7}$ బి) $^{7}/_{5}$ సి) 3 $^{4}/_{5}$

2. ఈ క్రింది ప్రతి భిన్నానికి లవ, హారాలను గుర్తించండి

ఎ) $^{11}/_{3}$ బి) 2 $^{1}/_{3}$ సి) $^{3}/_{5}$ డి) $^{5}/_{5}$

3. ఈ క్రింది వాటిని అపక్రమ భిన్నాలుగా మార్చండి.

ఎ) 3 $^{1}/_{2}$ బి) 2 $^{1}/_{5}$ సి) 10 $^{2}/_{7}$

4. ఈ క్రింది వాటిలో ఏ సందర్భంలో ప్రత్యక్షంగా సంకలనం చేసే అవకాశం ఉంది

ఎ) $^{1}/_{8} + ^{2}/_{8}$ బి) $^{3}/_{5} + ^{4}/_{7}$ సి) $^{1}/_{3} + ^{2}/_{5}$ డి) $^{1}/_{2} + ^{2}/_{3} + ^{1}/_{4}$

5. ఈ క్రింది వాటికి క.సా.గు కనుగొనండి.

ఎ) 5, 7 బి) 3, 5 సి) 2, 3, 4

6. ఈ క్రింది వాటిని సామాన్య హారాలుగా మార్చండి

ఎ) $^{3}/_{4}$, $^{4}/_{5}$ బి) $^{1}/_{2}$, $^{3}/_{4}$, $^{4}/_{5}$

7. ఈ క్రింది వాటిని సంకలనం చేయండి.

ఎ) $^{2}/_{3} + ^{6}/_{5}$ బి) $^{2}/_{3} + ^{2}/_{3} + ^{2}/_{3} + ^{2}/_{3}$

లోప నిర్ధారణ పరీక్ష నిర్వహించిన అనంతరం దోష విశ్లేషణ పట్టికను తయారు చేయడం ద్వారా విజాతి భిన్నాల సంకలన సమస్యలు చేయకపోవడంలో విద్యార్థి వారీగా నిర్దిష్ట కారణం / కారణాలు తెలుసుకోవచ్చు.

దోష విశ్లేషణ పట్టిక

ప్రశ్న సంఖ్య → / విద్యార్థి పేరు ↓	ప్ర.సం. 1			ప్ర.సం. 2				ప్ర.సం. 3			ప్ర.సం. 4				ప్ర.సం. 5			ప్ర.సం. 6		ప్ర.సం. 7	
	ఎ	బి	సి	ఎ	బి	సి	డి	ఎ	బి	సి	ఎ	బి	సి	డి	ఎ	బి	సి	ఎ	బి	ఎ	బి
విద్యార్థి-1																					
విద్యార్థి-2																					
విద్యార్థి-3																					
విద్యార్థి-4																					
విద్యార్థి-5																					

జట్టు కృత్యం: 1. సాధన పరీక్ష, లోపనిర్ధారణ పరీక్షల నిర్మాణందృష్ట్యా తేడాలను గుర్తించండి. జట్లలో చర్చించండి.

2. ఒక తరగతిలోని ఏదైనా పాఠ్యాంశానికి సంబంధించిన అభ్యసన నైపుణ్యాలలో లోప నిర్ధారణ పరీక్షను జట్లలో తయారు చేయండి.

5.2.3. పోర్ట్‌ఫోలియో రూపొందించుట, నిర్వహణ, పోర్ట్‌ఫోలియో ఆధారంగా మదింపు (Creating, maintaining and assessing through portfolios)

పోర్ట్‌ఫోలియో రూపకల్పన, నిర్వహణ, పోర్ట్‌ఫోలియో ఆధారంగా మదింపు గురించి తెలుసుకొనటానికి ముందుగా నిష్పాదన మదింపు (Performance Assessment) గూర్చి తెలుసుకుందాం.

నిష్పాదన మదింపు (Performance Assessment): మూల్యాంకన సాధనాలైన సాధనా పరీక్షలలో ప్రశ్నలకు విద్యార్థులు యిచ్చిన సమాధానాల ఆధారంగా అభ్యసనను పరోక్షంగా కొలవడం ద్వారా కొంత అభ్యసన జరిగినట్లు సూచిస్తాయి. వీటికి విరుద్ధంగా నిష్పాదన పరీక్షలు ప్రత్యక్షంగా అభ్యసనను కొలవడానికి ఉపకరిస్తాయి. గణితంలో అభ్యసించిన అనేక భావనలు, సాధారణీకరణాలు పేపర్, పెన్సిల్ పరీక్షలు (రాత పరీక్షలు) ఆధారంగా మదింపు చేయవచ్చు. గణితంలో ఇంకను ఇతర నైపుణ్యాలను నిష్పాదన పరీక్షల ద్వారా మదింపు చేయవచ్చు. సమస్యలు సాధించడం, నిర్ణయాలు చేయడం, విమర్శనాత్మక ఆలోచనలు, స్వతంత్రంగా తీర్పునివ్వడం వంటి నైపుణ్యాలు ఈ కోవకు చెందుతాయి.

ఈ నిష్పాదన మదింపు అనేది అభ్యసన ఫలితాలలో అభివృద్ధిని పరిశీలించే విధానం. పిల్లల జ్ఞానం లేదా నైపుణ్యాల ప్రదర్శన ఆధారంగా జవాబు లేదా అంతిమ ఫలితాన్ని మదింపు చేసే పద్ధతి. నిష్పాదన మదింపు ముఖ్యఉద్దేశం మదింపునకు ముందుగా తగిన నైపుణ్యాలు, జ్ఞానాన్ని పొంది వినియోగించే విధంగా ముఖ్యకృత్యాలను అభివృద్ధి చేయడం.

సాంప్రదాయ పరీక్షవిధానాలలో అనుసరించే ఏకైక జవాబు ఇవ్వడం కాకుండా విద్యార్థి నూతన లేదా నిత్య జీవిత సందర్భాలలో జ్ఞానం లేదా నైపుణ్యాన్ని ప్రదర్శించే సామర్థ్యాన్ని నిష్పాదన మదింపు ఆశిస్తుంది. ఆ విధంగా నిష్పాదనపరీక్షలు ప్రక్రియలు, ఫలితాలు లేదా రెండింటిని మదింపు చేసేవి. సరియైన విధంగా తయారు చేసిన నిష్పాదనపరీక్ష బోధనాకృత్యంగాను, మదింపుగాను కూడా తోడ్పడుతుంది.

నిష్పాదన మదింపు పరీక్ష నిర్మాణంలో సోపానాలు:

1. ఏమి పరీక్షించాలో నిర్ణయించాలి అనగా జ్ఞానం లేదా విషయం, నైపుణ్యాలు, మనో అలవాట్లు వగైరా.
2. నిష్పాదన మదింపు రూపొందించుట అనగా విద్యార్థులు పొందిన జ్ఞానం, నైపుణ్యాలు, మనో అలవాట్లు ప్రదర్శించుటకు వీలుగా కృత్యాన్ని, సందర్భాన్ని లేదా దానిని పోలిన విధానాన్ని రూపొందించుట.
3. రూబ్రిక్స్ స్కోరింగ్ సూచించుట అనగా ఆ కృత్యానికి అనుగుణంగా తగిన రూబ్రిక్ రూపొందించి, స్కోరింగ్ విధానం సూచించుట.

నిష్పాదన మదింపు అనేది విద్యా సంవత్సరంలో ఒకానొక సందర్భంలో ఒక అభ్యసనారంగంలో విద్యార్థి పొందిన లోతైన అవగాహన ప్రదర్శనకు తోడ్పడితే, మరొక మదింపు విధానంలో దీనితో బాటు ఆ లోతైన అవగాహనను ఏర్పరచుకోవటంలో, సాధించడంలో అనుసరించిన ప్రక్రియాభివృద్ధి కూడా మదింపు చేస్తుంది. అదే పోర్ట్‌ఫోలియో మదింపు.

పోర్ట్‌ఫోలియో మదింపు: పోర్ట్‌ఫోలియో మదింపు గూర్చి తెలుసుకునే ముందు పోర్ట్‌ఫోలియో అంటే ఏమిటో తెలుసుకుందాం.

పోర్ట్‌ఫోలియో: పాఠ్యప్రణాళికలోని ఒకటి లేదా అంతకంటే ఎక్కువ రంగాలలో విద్యార్థి ప్రయత్నాలు, అభివృద్ధి, సాధనను బహిర్గతపరిచే విధంగా విద్యార్థి రూపొందించిన నివేదికలు, పని వివరాలు కలిగిన ఉపయోగకరమైన సేకరణ. పోర్ట్‌ఫోలియో అభ్యసన ఫలితాలకు సంబంధించి విద్యార్థిచే రూపొందించబడిన మంచిపని, మంచి ప్రయత్నాలు, పని అనుభవాల సేకరణకు ప్రాతినిధ్యం వహిస్తుంది.

పోర్ట్‌ఫోలియో మదింపు: నిష్పాదన మదింపు, విద్యార్థి ఒక నిర్ధిష్ట విషయరంగంలో ప్రావీణ్యత మదింపునకు సంబంధించినదైతే, పోర్ట్‌ఫోలియో మదింపు అనే మదింపు విధానం ఈ దిగువ అంశాలకు ఉద్దేశించింది.

1. విద్యార్థి నైపుణ్యాలు,అవగాహనా విస్తృతిని బహిర్గతపరచడానికి.
2. బోధనాలక్ష్యాల సహాయకారిగా వాటి సాధనకై.
3. కొంత సమయంలో విద్యార్థిలో మార్పు మరియు అభివృద్ధిని ప్రతిబింబించుటకు
4. విద్యార్థి, ఉపాధ్యాయుడు, తల్లిదండ్రుల స్పందనను ప్రోత్సహించడానికై
5. నిరంతర విద్యను కల్పించడానికి

ఆ విధంగా పోర్ట్‌ఫోలియో మదింపు బహుముఖ ప్రక్రియగా భావించవచ్చు.

పోర్ట్‌ఫోలియో ఆధారంగా మదింపు ముఖ్య లక్షణాలు:

1. ఆశించిన అభ్యసన ఫలితాలు విద్యార్థి సాధించుటకై నిర్మాణాత్మక మరియు సంగ్రహణాత్మక రూపంలో విద్యార్థి ప్రగతిని నిరంతరంగా మదింపు చేసే ప్రక్రియ.
2. విస్తృత కళాకృతులు మరియు ప్రక్రియలను ప్రతిబింబించే బహుముఖ ప్రక్రియ.
3. విస్తృత పని నమూనాలు కలిగి ఉండటమే కాక వాటిని ఉపాధ్యాయులు, విద్యార్థులు, సమ వయస్కుల సమూహం, తల్లిదండ్రులు మూల్యాంకనం చేసే ప్రక్రియ.
4. ఒకానొక సమయంలో కాక కొంత వ్యవధిలో సేకరించిన నమూనాలు ఉంటాయి.

పోర్ట్‌ఫోలియో ఆధారంగా మదింపులో సోపానాలు:

1. పోర్ట్‌ఫోలియో ఉద్దేశాన్ని (Purpose) స్పష్టీకరించాలి.
2. విషయ మరియు నైపుణ్యాలను గుర్తించాలి.
3. పోర్ట్‌ఫోలియోను ఎవరు ప్లాన్ చేయాలో నిర్ధారించాలి.
4. ఏ రకమైన, ఎన్ని రకాల ఉత్పత్తులు (రూపొందించాల్సిన అంశాలు) అవసరమో నిర్ధారించాలి.
5. తగిన రూబ్రిక్స్‌ను రూపొందించాలి.
6. రూబ్రిక్స్‌కి తగిన రేటింగ్ , గ్రేడింగ్ స్కీమ్ రూపొందించాలి.

జట్టుకృత్యం: ఏ ఏ అభ్యసన కృత్యాలకు నిష్పాదన, పోర్ట్‌ఫోలియో మదింపు చేయవచ్చునో గణిత పాఠ్య ప్రణాళికలో 6 నుంచి 8 తరగతులకు సంబంధించి అభ్యసన కృత్యాలు ఎంపిక చేయండి.

5.2.4. రూబ్రిక్స్ రూపొందించుట, ఉపయోగించుట (Development and use of Rubrics)

రూబ్రిక్ అనేది ఉపాధ్యాయునిచే, విద్యార్థులచే ఉపయోగించే ఒక మదింపు సాధనం. దానిలో రెండు భాగాలుంటాయి. ఒకటి రేటింగ్ లేదా కేటగిరి; ఆ రేటింగ్ లేదా కేటగిరిని అనుసరించి విద్యార్థులు ఆ రేటింగ్/ కేటగిరి పొందడానికి అవసరమైన ప్రాధాన్యతాంశం (Criteria). రిపోర్ట్ కార్డ్ రూపంలో ఒక సాధారణమైన గ్రేడింగ్‌కు సంబంధించిన రూబ్రిక్ దిగువ చూపబడింది.

రేటింగ్/ కేటగిరి	ప్రాధాన్యతాంశం (Criteria) (సంవత్సరాంత పరీక్షలో గరిష్ట మార్కులు 100కు గాను విద్యార్థులు పొందిన మార్కులు ఆధారంగా) – (గణితంలో)
అద్భుతం	90; అంతకన్నా మార్కులు పొందితే
చాలా బాగుంది	80; 80–90 లోపు
బాగుంది	70; 70–80 లోపు
సంతృప్తికరం	60; 60–70 లోపు
అభివృద్ధి అవసరం	60 లోపు

పైన పేర్కొన్న రూబ్రిక్ సంగ్రహణాత్మక పరీక్షకు సంబంధించింది. ప్రతి రేటింగ్‌కి పొందిన మార్కులకు ప్రాధాన్యత యివ్వబడింది. ఈ రూబ్రిక్ సాధారణమైనది, ఇది సంగ్రహణాత్మక గ్రేడింగ్‌కై ప్రతి విషయంలో ఉపయోగించడానికి తోడ్పడుతుంది. అయితే విద్యార్థుల అభ్యసన ఎంతవరకు ఏ విధంగా జరిగింది; వారి అభ్యసనకు సహాయపడే తగిన సమాచారమేది యివ్వదు.

నిర్మాణాత్మక మదింపునకు రూపొందించిన రూబ్రిక్స్‌కి ప్రతి రేటింగ్‌కి విస్పష్టంగా ప్రాధాన్యతాంశాలను జతపరచాల్సి ఉంటుంది. ఒక ప్రత్యేక అంశం అధ్యయనానికి అటువంటి వాటిని రూపొందిస్తాం. ఒక ప్రత్యేక అంశానికి రూపొందించిన ఈ దిగువ రూబ్రిక్స్ నిర్మాణాత్మక మదింపునకు తోడ్పడే విధం చూడండి.

కృత్యం : 21,800 సంఖ్య ఉండేలా కనీసం ఆరు సంఖ్యలను తగిన సమాన దూరాలలో గుర్తిస్తూ, వివిధ సంఖ్యా రేఖలు గీయండి.

(ఈ కృత్యం Mathssolutions.com నుంచి తీసుకొనబడింది.)

కేటగిరి	ప్రాధాన్యతాంశం
స్పష్టమైన అవగాహనను ప్రదర్శించాడు	విద్యార్థి కనీసం 3 సంఖ్యారేఖలు గీయాలి. ఆరు సంఖ్యలు సమాన దూరాలలో గుర్తించబడి 21,800 సంఖ్య అందులో ఉండాలి. ప్రతి సంఖ్యా రేఖలో అంతరం సమానంగా ఉంటూ వేరు, వేరు అంతరాలు ఉండాలి 21,600 21,700 21,800 21,900 22,000 22,100 21,400 21,600 21,800 22,000 22,200 22,400 21,350 21,500 21,650 21,800 21,950 22,100
కొంత అవగాహనను ప్రదర్శించాడు	విద్యార్థి కనీసం 1 సంఖ్యా రేఖ గీచి ఆరు సంఖ్యలను సమాన దూరాలలో గుర్తించి మధ్యలో 21,800 సంఖ్యను గుర్తించాలి. సమాన అంతరాలలో వాటిని గుర్తించాలి. వేరు వేరు అంతరాలతో యితర సంఖ్యారేఖలు గీయలేకపోవచ్చు. 20,800 21,300 21,800 22,300 22,800 23,300
సంతృప్తికరం కాదు	విద్యార్థి ఒక సంఖ్యారేఖ గీచి దానిలో 21,800సంఖ్యని గుర్తించినా, ఆరు సంఖ్యల కన్నా తక్కువ గుర్తించడం గుర్తించిన సంఖ్యల అంతరాలు విభిన్నంగా ఉండటం. 21,450 21,650 21,800 22,000 22,150
చాలా తక్కువ స్థాయిలో అవగాహన అయినది అనడానికి సాక్ష్యం	విద్యార్థికి సమస్య అవగాహన కాలేదు. కనీసం ఒక సంఖ్యా రేఖనైనా గీచి యుండలేదు. సంఖ్యలను గుర్తించలేదు. లేదా తప్పుగా గుర్తించాడు లేదా సమస్యను చేయలేదు. 18,000 18,500 18,700 18,800 19000

5.3. ప్రాథమికోన్నత గణిత పాఠ్యాంశాల అభ్యసనలో ఏర్పరచుకునే తప్పు అవగాహనలు (Misconceptions) (6 నుంచి 8 తరగతులు)

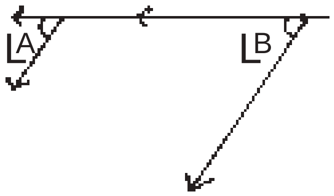
తప్పు (Mistake)/, తప్పు అవగాహన (Misconception) రెండూ వేరు వేరు. ప్రతి ఒక్కరూ తప్పులు చేస్తారు. తప్పు అవగాహన కలిగి ఉంటారు. గణితంలో తప్పు, తప్పు అవగాహన ఈ దిగువ తెల్పిన విధంగా భేదాన్ని కల్గిఉంటాయి.

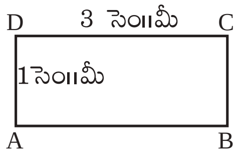
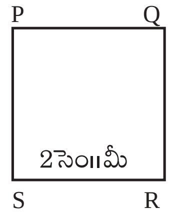
తప్పు: విద్యార్థి క్రమ సూత్ర పద్ధతి (Algorithm)ని అవగాహన చేసుకొని ఉంటాడు కాని అజాగ్రత్త వల్ల తప్పు చేస్తాడు. తప్పు అనేది సహజంగా అప్పుడప్పుడు చేసే దృష్టాంతం.

తప్పు అవగాహన (Misconception): విద్యార్థి ఒక భావనపట్ల గాని క్రమసూత్ర పద్ధతి (Algorithm) పట్లగాని తప్పుగా వినియోగించటం / తప్పునకు దారి తీసే విధంగా ఆలోచించటం. గణితంలో తప్పు అవగాహనపై పరిశోధనలలో సాధారణంగా అనేక అంశాలలో తప్పు అవగాహనను కలిగి ఉంటారని తెలిసింది.

ఇప్పుడు కొన్ని తప్పు అవగాహనలు (Misconceptions), వాటికి గల కారణాలు గూర్చి తెలుసుకుందాం.

తప్పు భావన	వివరణ
1. 623 −451 232	ఇది విద్యార్థులు ఏర్పరచుకొనే సాధారణమైన తప్పు అవగాహన. స్థానవిలువలపై అవగాహన లేకపోవడం, అంకెలు గానే చూడటం; దానితో పెద్ద అంకె నుంచి చిన్న అంకెను తీసివేయడం జరిగింది.
2. దశాంశ భిన్నాలు 8×6=48; లబ్ధం వాటికన్నా పెద్దది 0.8×0.6=0.48; లబ్ధం వాటి కన్నా పెద్దదా? పెద్దదనే చెబుతారు చాలామంది	మనకు రెండు పూర్ణాంకాలను గుణిస్తే లబ్ధం ఆ రెండు పూర్ణాంకాల లబ్ధం కన్నా పెద్దది అని తెలుసు. అదేవిధంగా రెండు దశాంశాలను గుణిస్తే లబ్ధం కూడా ఆ రెండు దశాంశాల కన్నా పెద్దదని భావిస్తారు. కాని వాస్తవంగా ఆ లబ్ధం వాటి కన్నా చిన్నది. **తప్పు అవగాహనను సరిచేయు విధానం:** 8×6=8+8+8+8+8+8 లేక 6+6+6+6+6+6+6+6 కనుక ఫలితం 8 లేదా 6 కన్నా ఎక్కువ. 8×0.6=0.6+0.6+0.6+0.6+0.6+0.6+0.6+0.6 కనుక 0.6 పోలిస్తే ఫలితం 0.6 కన్నా ఎక్కువ. $8\times0.6=8\times{}^{6}/_{10}$ అనగా 8ని 10 భాగాలు చేసి 6 భాగాలు మాత్రమే తీసుకోవాలి. కనుక 8తో పోలిస్తే ఫలితం తక్కువ. ఇదే రీతిలో 0.8×0.6 విలువ 0.8 కన్నా తక్కువ; 0.6 కన్నా తక్కువ

3. ఈ దిగువ కోణాలు $\angle A$, $\angle B$ లలో ఏది పెద్దది?  జవాబు : $\angle B$	$\angle A$,$\angle B$ కోణాలు రెండు సమానం కాని చాలా మంది విద్యార్థులు $\angle B$,$\angle A$ కన్నా పెద్దది అని చెపుతారు. కారణం ఆ కోణాలకు ఆనుకుని ఉన్న బాహువులలో $\angle B$ బాహువులు పెద్దవిగా ఉండటం చూసి తప్పు అవగాహన ఏర్పరచుకొంటారు.
4. $7>5$ అదేవిధముగా $3\times7 > 3\times5$ ఇదే రీతిలో $-2\times7 > -2\times5$ నిజమేనా?అని అడిగితే జవాబు: నిజమే అంటారు.	ఒక సంఖ్య, మరొక సంఖ్య కన్నా పెద్దదైతే రెండింటిని ఒకే సంఖ్యతో గుణించిన తిరిగి ఫలితం కూడా అదే రీతిలో ఉంటుందని భావించడం ద్వారా ఏ సంఖ్యతో (ఋణసంఖ్యతోనైనా) గుణించినా అదే జవాబు వస్తుందని తప్పు అవగాహనకు రావడం వల్ల. **తప్పు అవగాహనను సరిచేయు విధానం:** $7>5$ $3\times7 = 3+3+3+3+3+3+3$ $3\times5 = 3+3+3+3+3$ కనుక 3×7; 3×5 కన్నా పెద్దది $-2\times7 = (-2)+(-2)+(-2)+(-2)+(-2)+(-2)+(-2)$ $-2\times5 = (-2)+(-2)+(-2)+(-2)+(-2)$ కనుక -2, 7 సార్లు కలపగా వచ్చే విలువ, -2, 5 సార్లు కలపగా వచ్చే విలువ కన్నా తక్కువ అని గ్రహింపచేయడం ద్వారా
5. ఒక వ్యాపారి రెండు వస్తువులను 990 రూపాయలకు అమ్మగా ఒక దానిపై 10% లాభం, మరొక దానిపై 10 % నష్టం పొందిన మొత్తంగా లాభమా,నష్టమా, లాభనష్టాలుండవా? జవాబు: లాభ నష్టాలుండవని సమాధానం ఇస్తారు.	లాభశాతం, నష్టశాతం ఒకటే అవడంతో లాభంగానీ, నష్టంగానీ ఉండదని భావిస్తారు. లాభ, నష్టాలు కొన్నవెలపైనే ఆధారపడతాయి. 990కి అమ్మగా లాభశాతం 10% అయిన కొన్నవెల 900; 990కి అమ్మగా నష్టశాతం 10% అయిన కొన్నవెల 1100 మొత్తంగా నష్టం 20 రూపాయలు అని గ్రహించకపోవడం.

6. వైశాల్యము పెరిగితే, చుట్టుకొలత పెరుగుతుంది అనేది తప్పు అవగాహన	ప్రత్యుదాహరణ ద్వారా తప్పు అవగాహనను సరిచేయవచ్చు ఉదా:  ABCD వైశాల్యం = 3 చ॥సెం.మీ ABCD చుట్టుకొలత = 8 సెం॥మీ  PQRS వైశాల్యం = 4 చ॥సెం.మీ. PQRS చుట్టుకొలత= 8 సెం॥మీ

విద్యార్థులు ఒకే అంశంలో తిరిగి, తిరిగి అదే తప్పు చేస్తుంటే అది ఖచ్చితంగా తప్పు అవగాహనవల్ల అయ్యే అవకాశముంది. ఇటువంటి తప్పు అవగాహనలను సరిచేయడానికి ఆ సమస్యను ఏ విధంగా సాధించటానికి ప్రయత్నించారో చూపమనాలి. తద్వారా ఎక్కడ లేదా ఏవిధంగా తప్పు అవగాహనను ఏర్పరచుకొంటున్నారో గుర్తించవచ్చు. అదే విధముగా కొన్ని రకాల తప్పు అవగాహనకు (ఉదా: 6) ప్రత్యుదాహరణలు సూచించడం ద్వారా ఆ తప్పు అవగాహనను సరి చేయవచ్చు. అదేరీతిలో తప్పు అవగాహనలను గుర్తించిన పిదప ఉపాధ్యాయుడు వాటి సవరణాత్మక బోధనకు ప్రణాళిక వేసుకొని బోధించడం ద్వారా సరియైన రీతిలో భావనల అవగాహన జరుగుతుంది.

5.4. భావనల అవగాహన, గణిత వివేచనా సామర్థ్యాల మదింపు

5.4.1. భావనల అవగాహనను మదింపు చేయడం

> The real goal of classroom assessment is to improve student performance, not merely audit it. ***-Sousa and Tontinson***

భావనల అవగాహనను మదింపు చేయడానికి శ్రేష్ఠమైన మార్గం మదింపును బోధనలో సమ్మిళతం చేయడమే అనగా నిర్మాణాత్మక మదింపును చేపట్టడం. గణితపరంగా మాట్లాడుకోవడం, ఆలోచించడం, కార్యకారణ చింతన దిశగా ప్రోత్సహించడం ద్వారా పిల్లల భావనల అవగాహనను నిరంతరంగా మదింపు చేయవచ్చు. ఈ విషయమై ఉపాధ్యాయుడు పిల్లల నుండి సరైన సమాధానాలు రాబట్టడంపై మాత్రం దృష్టి ఉంచక, గణిత తార్కికత, గణితపరమైన సాక్ష్యాలు, సమర్థించుకోవడం (Justifiying), తెలివైన ఊహలు (Conjecturing), కనుగొనడాలు (Inventions) సమస్యసాధనలపై దృష్టి సారించాలి. గణిత తరగతిని గణనలు, యాంత్రికంగా జవాబును రాబట్టడం వంటి వాటికి పరిమితం చేయరాదు. దీనికై ఉపాధ్యాయుడు అనేకమార్గాలు అనుసరించాల్సి ఉంటుంది. దీనిలో భాగంగా ప్రశ్నలు, పజిల్స్, కృత్యాలు తయారుచేయాలి. గణితపరమైన ఆలోచనలు చేసేలా విద్యార్థులను ప్రోత్సహించాలి.

ఈ దిగువ పేర్కొన్న ఉదాహరణలు తరగతి గదిలో నిర్మాణాత్మకమదింపును ఏవిధంగా మిళితం చేయవచ్చో అర్థం చేసుకోవడానికి తోడ్పడతాయి.

ఉదా-1: $^{9}/_{16}$, $^{5}/_{8}$ కన్నా పెద్దది.

ఎ) అంగీకరిస్తున్నాను బి) అంగీకరించను సి) ఖచ్చితంగా చెప్పలేను.

ఏమి ఆలోచిస్తున్నాను? ఏవిధంగా కనుగొనాలి?

ఈ ప్రశ్నలు పై ప్రశ్న సమాధానానికి ప్రాతిపదికగా ఉండాలి.

ఉదా-2: దశాంశాలను భిన్నాల రూపంలో రాయవచ్చు.

ఎ) అంగీకరిస్తున్నాను బి) అంగీకరించను సి) ఖచ్చితంగా చెప్పలేను.

ఏమి ఆలోచిస్తున్నాను? ఏవిధంగా కనుగొనాలి?

ఈ ప్రశ్నలు పై ప్రశ్న సమాధానానికి ప్రాతిపదికగా ఉండాలి.

ఈ ప్రశ్నలకు (ఏమి ఆలోచిస్తున్నాను? ఏవిధంగా కనుగొనాలి?) సమాధానాలే భావనల అవగాహనను మదింపు చేయడానికి తోడ్పడతాయి. సరియైన సమాధానం కన్నా ఇవి ముఖ్యం అందుకే "ఖచ్చితంగా చెప్పలేను" అనే ఐచ్ఛికం ఉంచటం ద్వారా పిల్లవాడిని మూల్యాంకనం చేయడం కన్నా భావనల అవగాహన స్థాయి మదింపు చేయడం ముఖ్యం అని తెలుస్తుంది. విద్యార్థులను విభిన్న పద్ధతుల ద్వారా సమాధానాలివ్వడానికి ప్రోత్సహించాలి.

ఉదా-3: (జట్టు కృత్యం, చర్చల ద్వారా)

కొన్ని గణిత ప్రవచనాల సమితిని తయారుచేయాలి. పిల్లలను చిన్న సమూహాలుగా చేసి సమూహాలలో తమ తోటి పిల్లలతో ఆ గణిత ప్రవచనాలను అంగీకరిస్తారా లేదా చర్చింపచేయాలి. తమ వాదనను తోటివారితో సమర్థించుకోవాలి. తరువాత ప్రతి గణిత ప్రవచనము మొత్తం తరగతిలో చర్చించబడాలి (జట్ల వారీగా చర్చ మరియు సమర్థింపు). గణిత ప్రవచనాలకు ఉదాహరణలు.

1. అన్ని చతురస్రాలు, దీర్ఘ చతురస్రాలు
2. సమాంతర చతుర్భుజంలో ఏ కోణం విలువైనా 90^0ల కంటే ఎక్కువ ఉండదు.
3. లంబకోణ త్రిభుజం సమద్విబాహు త్రిభుజం
4. xy, $-xy$ సజాతి పదాలు
5. 15 స్థిరరాశి, x చరరాశి అయిన $x+15$ స్థిరరాశి.
6. $^{2}/_{5} = {}^{10}/_{15}$
7. సరి సంఖ్య అయిన ప్రధాన సంఖ్య '2' మాత్రమే.

పై ఉదాహరణల్లో చర్చలు, శాబ్దికపరంగా సమర్థింపు మార్గంలో భావనల అవగాహనను మదింపు చేయడం జరుగుతుంది. విద్యార్థులు తార్కికంగా ఎందుకు అంగీకరిస్తారో, ఎందుకు అంగీకరించారో వివరించాలి. ఈ సందర్భంలోనూ తమ సమాధానాలు సమర్థించుకోవడానికి విభిన్న విధాలలో ప్రాతినిధ్యపరచవచ్చు.

ఉదా-4: (అధ్యాయం చివర - 5 ని॥ వ్యవధి)

ఒక కాగితంపై ఈ దిగువ ప్రశ్నలకు 5 నిమిషాలలోపు సమాధానాలు యివ్వమనాలి. తరువాత వాటిన్నింటిని సేకరించాలి. తరువాత అధ్యాయం ప్రారంభించే ముందు, వారు రాసిన సమాధానాలు చదివి చర్చించాలి. వాటిద్వారా విద్యార్థుల భావనల అవగాహనను మదింపు చేయవచ్చు.

1. ఈ అధ్యాయంలో నీవు అభ్యసించిన అతిముఖ్యమైన అంశం ఏది?
2. నీకు ఈ అధ్యాయంలో బోధించక ముందు తెలియని కొత్త అంశం ఈ అధ్యాయం బోధించిన తరువాత ఏమి తెలుసుకొన్నావు?

3. నీకు అర్థం కాని లేదా సందిగ్ధంగా అనిపించినవి ఏవి?

4. తదుపరి అధ్యాయంలో మరింత బాగా నేర్చుకోవడానికి ఏమి సహాయం అవసరం?

ఉదా-5: K-W-L-Chart (Know-Want to know - Learned)

K-W-L అనేది సాధారణ మదింపునకు తోడ్పడేది. దీనిలో విద్యార్థులు ఒక అంశం గురించి ఏమి తెలుసు (what they **K**now), ఆ అంశం గురించి ఏమి తెలుసుకోవాలనుకొంటారు,(**W**ant to know) ఆ అంశం గురించి ఏమి నేర్చుకొన్నారు (have **L**earned) వివరిస్తారు.

K-W-L-Chart (K-W-L-ఛార్టు)

అంశం :

పేరు :

తరగతి :

Know-ఈ అంశం గురించి నాకు తెలిసినవి	Want-ఈ అంశం నుంచి తెలుసుకోవాలనుకొనేవి	Learned-ఈ అంశం నుంచి నేర్చుకొన్నవి
ఒక అంశం ప్రారంభించే ముందు ఆ అంశం గురించి పరిచయ తరగతిలో విద్యార్థులకు ఏమి తెలుసో రాయించాలి.	ఈ అంశం గురించి, ఆ అంశం ప్రారంభించడానికి ముందే పరిచయ తరగతిలో విద్యార్థులచే ఈ అంశంలో ఏమి తెలుసుకోవాలనుకొంటున్నారో రాయించాలి.	ఈ అంశం బోధించడం పూర్తయిన పిదప ఏమి నేర్చుకొన్నారో రాయమనాలి.

ఈ పై ఉదాహరణ విద్యార్థుల స్వీయ మదింపునకు తోడ్పడతుంది. తమకుతాము ఆ అంశం గురించి బహిర్గత పరచడానికి ఉపయోగడుతుంది. ఉపాధ్యాయులు దీనిని ఒక తరగతిలో ఒక అధ్యాయం పూర్తయిన తరువాత నిర్వహించవచ్చు (K,Wలు ముందు రాయించాలి)

నిర్మాణాత్మక మదింపు సమర్థవంతంగా చేపట్టడానికి ఉపాధ్యాయుడు ముందుగా తరగతి గదిని గణిత పరంగా మాట్లాడుకోవటం (Mathematics talk), వాదనల సమర్థింపు (Justification), వివేచన (Reasoning)ను ప్రోత్సహించే విధంగా తయారుచేయాలి.

5.4.2. సమస్యా సాధన (గణిత వివేచనా సామర్థ్యం) మదింపు

సమస్య సాధన మదింపునకై ఆ సమస్యాసాధనలో అనుసరించిన సోపానాలు లేదా ప్రక్రియలను మదింపు చేయాలి. దానికై ఈ దిగువ తెలిపిన అంశాలు తోడ్పడతాయి.

1. **సమస్యను అవగాహన చేసుకోవడం :** సమస్యలో ఇవ్వబడినది, సమస్యలో సాధించవలసినది స్పష్టంగా గుర్తించగలిగాడా?
2. **గణితపరమైన వివేచనా సామర్థ్యం :** సమస్యను తార్కికంగా, వివేచనతో ఆలోచించి తగిన భావనలు, విషయాలతో ప్రక్రియలను సహేతుకంగా వివరించి సమర్థించుకొనే విధంగా సోపానాలు ఉన్నాయా?
3. **సమస్యను ప్రాతినిధ్యపరచడం :** భిన్న మార్గాలలో (పటాలు, ఛార్టులు, బొమ్మలు, గుర్తులు) సమస్యను గుర్తించే సామర్థ్యం కనబరిచాడా? సోదాహరణంగా వివరించాడా? జవాబును శుభ్రంగా స్పష్టంగా చేసాడా?

4. **సమాచార సేకరణ:** సమస్యను సాధించడానికి తగిన సమాచార సేకరణ, నిర్వహణ తగిన విధంగా ఉందా?

5. **సమస్యసాధనలో ప్రక్రియాంశాలు** : సరియైన క్రమపద్ధతి (Algorithm), ప్రక్రియలను ఉపయోగించి సమస్య సాధన చేయగలిగినాడా?

6. **పైన మరియు కింద** : ఇచ్చిన సమస్యకు పైన, కింద (సమస్యకు మించి ఊహలు, సాధారణీకరణాలు) గణితపరంగా కారణాలు చెప్పే సామర్థ్యం ఉందా?

ఈ అంశాలను కేటగిరీలుగా, ప్రాధాన్యతాంశాలు సూచిస్తూ "రూబ్రిక్స్" తయారు చేసి సమస్యాసాధన సామర్థ్యాన్ని మదింపు చేయవచ్చు.

5.5. నిరంతర సమగ్ర మూల్యాంకనం – (నిర్మాణాత్మక, సంగ్రహణాత్మక)

5.5.0. నిరంతర సమగ్ర మూల్యాంకనం అనేది బోధన – అభ్యసనతో సమాంతరంగా సాగాల్సిన ప్రక్రియ. అందుకే "నిరంతరం" అనేది ముఖ్యభాగం. ఈ "నిరంతరం" అనేది విద్యార్థులను తరుచుగా పరీక్షించడం అని అర్థం కాదు. పాత పద్ధతిలో పరీక్ష అనేది అటు పిల్లలకు, ఇటు ఉపాధ్యాయులకు ఒత్తిడిని, భారాన్ని పెంచేదిగా ఉంది. నిరంతర సమగ్ర మూల్యాంకనం తరగతి గదిలో ఉపాధ్యాయునికి, విద్యార్థికి ఒత్తిడి, ఆందోళన, భారాన్ని తగ్గించి, బోధనాభ్యసన భయరహిత వాతావరణంలో, ఒత్తిడి లేకుండా జరగడానికి తోడ్పడాలి.

నిరంతర మదింపును అర్థం చేసుకోవాలంటే, ఒక వైద్యుని వద్ద కొంతకాలంగా వైద్యం చేయించుకుంటున్న రోగిని ఉదాహరణగా తీసుకొందాం. ఆ వైద్యుడు రోగి పరిస్థితిని ఎప్పటికప్పుడు (నిరంతరం) పరిశీలిస్తూ తగిన వైద్యం అందిస్తాడు. అనుకొన్న ఫలితాన్ని గమనించకపోతే, తదనుగుణంగా వైద్యాన్ని మారుస్తాడు. ఇదేరీతిలో ఉపాధ్యాయుడు వివిధ అభ్యసన అవసరాలు గలిగిన విద్యార్థులకు వారి అభ్యసన రీతికనుగుణంగా తగిన బోధనను ఎప్పటికప్పుడు అందించాలి. అందుకనుగుణంగా తగిన బోధనావ్యూహాలు అనుసరించాలి. ఆ విధంగా నిరంతర మదింపు అనేది సృజనాత్మకత, ఆలోచనా ప్రక్రియతో కూడుకున్నది.

5.5.1. నిరంతర సమగ్ర మూల్యాంకనంలోని కొన్ని అంశాలు, మదింపు, మూల్యాంకనాలకు సంబంధించిన అపోహలు

1. బోధనాభ్యసన సందర్భంలో మదింపు అనేది, విద్యార్థులు ఎదుర్కొంటున్న సమస్యలు, అదనపు సహాయం అవసరమయ్యే సందర్భాలలో ఉపాధ్యాయుడు తక్షణం స్పందించి అభ్యసన పెంపునకు దోహదపడేలా ఉండాలి. అందరు విద్యార్థులకు ఒకే సమయంలో నిర్వహించే పరీక్షగా నిరంతర మదింపు ఉండకూడదు. పై పెచ్చు వారిని మదింపు చేస్తున్నట్లుగానే ఉండకూడదు. అందుకే "నిరంతరం" అనేది తరుచుగా నిర్వహించాల్సిన పరీక్షలు కాదు.

2. "నిర్మాణాత్మక" మరియు "సంగ్రహణాత్మక" అంశాలకు సంబంధించి మరొక అపోహ. చాలా పాఠశాలల్లో "నిర్మాణాత్మక మదింపు" అనేది ఉపాధ్యాయులు ప్రాజెక్టు పనులు; లఘు పరీక్షలు ఇతర కృత్యాలతో "రిపోర్ట్ కార్డ్స్" రూపంలో ప్రతి 3 నెలలకు నివేదిస్తున్నారు. "నిర్మాణాత్మక మదింపు" అనేది ఖచ్చితంగా రిపోర్టుకార్డ్స్‌లో నివేదించ ఉద్దేశింపబడింది కాదు. "Formative" అనే పదం "Formation" అనే పదం నుండి ఉత్పన్నమైనది. అనగా "Formation of Learning Process అనగా "అభ్యసన ప్రక్రియల నిర్మాణం". ఈ విధంగా ఈ నిర్మాణాత్మక మదింపు బోధనాభ్యాసన ప్రక్రియ సందర్భంగా పర్యవేక్షించడానికి, అభ్యసన పెంపుదలకు ఉద్దేశించబడినది (దీనిని అభ్యసన కొరకు మదింపు అని కూడా పిలుస్తారు).

ఆ విధంగా విద్యార్థి అభ్యసనకు చెందిన రాత పని, మౌఖిక సమాధానాలు లేదా సాధారణ పరిశీలనలు అన్నీ ఉపాధ్యాయుడు నిర్మాణాత్మకంగా అభ్యాసకునికి సహాయపడటానికి ఉపయోగించుకోవాలి.

3. సంగ్రహణాత్మక మూల్యాంకనం అనేది కొంతముందే నిర్ణయించబడి పూర్తి చేయబడిన పాఠాలు లేదా కొంత సమయంలో పూర్తి చేసిన పాఠాలపై విద్యార్థికి గల సంపూర్ణ అవగాహనను పరీక్షించేది. దీనికే మరొక పేరు అభ్యసన యొక్క మదింపు లేదా మూల్యాంకనం. "Summative" అనే పదం "Sum" అనే పదం నుండి ఉత్పన్నమైంది. ఆ విధంగా సంపూర్ణ అభ్యసన (Total Learning)ను అంచనా వేయడం.

4. మదింపు, మూల్యాంకనం పదాలను తరుచుగా ఒకదాని బదులుగా మరొకటి ఉపయోగిస్తున్నారు. కాని వీటి మధ్య భేదం ఉంది. “మదింపు” అనేది అభ్యసన జరుగుతున్న సమయంలో విద్యార్థుల నిష్పాదన గుణాన్ని నిర్ణయించడం (Judging the Quality of Performance of Children while Learning is going on). “మూల్యాంకనం” అనేది కొంత సమయం బోధన పూర్తయిన పిదప చేకూరిన నిష్పాదనస్థాయిపై కేంద్రీకరిస్తుంది (Focus on the actual Level of Performance attained after a certain period of instruction). మూల్యాంకనం అనేది ఆస్థాయికి ఎందుకు? ఎలా చేరాడు అనే దానితో సంబంధం లేదు. ఆ స్థాయిని ఒక విలువ (గ్రేడు) రూపంలో సూచిస్తుంది. ఆ విధంగా “మదింపు” అనేది ముఖ్యంగా ప్రక్రియకు ఉద్దేశింపబడితే (Process Oriented); మూల్యాంకనం అనేది ఫలితానికి ఉద్దేశించబడింది (Product Oriented) లేదా సంగ్రహణాత్మకతకు ఉద్దేశించబడింది.

5. “సమగ్ర” అనేది పిల్లవాడి సంపూర్ణ భావనతో ఉద్దేశింపబడింది. దీని ఉద్దేశం పిల్లవాడి మూర్తిమత్వాన్ని సంపూర్ణంగా పరిగణించాలి. ఉదాహరణకు అతను/ఆమెకు గల అభ్యసన పట్ల వైఖరి, సాంఘిక ప్రతిచర్య, ఉద్వేగపరమైన ఆరోగ్యం, ప్రేరణ, శారీరక ఆరోగ్యం, బలాలు, బలహీనతలు మొదలైనవన్ని.

6. మార్కులు, గ్రేడింగ్‌కు సంబంధించి మరొక అపోహ ఉంది. మార్కులను పరిమాణాత్మకంగా లేదా అభ్యసనా ఉత్పత్తికి (Product of Learning) ప్రతిస్పందనగా భావిస్తున్నారు. గ్రేడులనుగుణాత్మకత లేదా అభ్యసన ప్రక్రియ (Process of Learning)కి ప్రతిస్పందనగా భావిస్తున్నారు. ఉపాధ్యాయులు మదింపును మార్కుల రూపంలో చేపట్టి తదుపరి గ్రేడులుగా మారుస్తున్నారు. మార్కులు, గ్రేడులు రెండూ పిల్లల ప్రగతిని మూల్యాంకన రూపంలో తీర్పునిచ్చేవే. అభ్యసనకు విలువనిస్తాయి (Assign a number or value to Learning). అభ్యసన ప్రక్రియ సందర్భంగా అనగా నిర్మాణాత్మక మదింపుగా మార్కులు, గ్రేడులను ఉపయోగించరాదు.

7. నిరంతర సమగ్ర మూల్యాంకనానికి సంబంధించి మరొక తప్పుడు అవగాహన పిల్లల ప్రగతిని నమోదు చేయుట గురించి. పిల్లల ప్రగతిని రోజువారీగా, నెలవారీగా లేదా నిరంతరంగా వివిధ ప్రాధాన్యతలతో నమోదు చేయాలని భావించడం. ఇది పూర్తిగా “నిరంతర మదింపు”నకు వ్యతిరేక అంశం. పిల్లలందరిని అన్నివేళలా లేదా భారీస్థాయిలో రికార్డులతో, పిల్లల ప్రగతికి

సంబంధించిన అంశాలు నమోదు చేసి ఇతరులకు పంపాల్సిన అవసరం లేదు. ఏ అంశాలైతే ఉపాధ్యాయుని బోధనాభ్యసనకు తోడ్పడతాయో వాటిని మాత్రమే నమోదు చేసుకుంటే సరిపోతుంది.

8. అభ్యసన జరిగినా, జరగకపోయినా పిల్లవాడిని పైతరగతికి పంపాల్సిన అవసరం నిరంతరం సమగ్ర మూల్యాంకనంలో ఉంది అనేది మరొక తప్పుడు భావన. నిరంతర సమగ్ర మూల్యాంకన అసలు ఉద్దేశం ప్రతి పిల్లవాడు అభ్యసన ప్రక్రియలన్నింటి నేర్చుకోవటమే కాకుండా, అభ్యసనలో సమస్యలు ఎదుర్కొనేటప్పుడు తగిన సహాయం అందించడం ద్వారా నిరంతరం అభ్యసన జరిగేట్లు చూస్తే పిల్లవానికి సంవత్సరాంతంలో "అనుత్తీర్ణత" అనే ప్రశ్నే ఎదురు కాదు.

9. మరొక తప్పుడు భావన ఉపాధ్యాయుడు నిరంతర, సమగ్ర మదింపునకు సంబంధించిన బాధ్యతలు, భారము పూర్తిగా స్వీకరించాలి. కాని నిరంతర సమగ్ర మూల్యాంకనం ఉపాధ్యాయుని భారాన్ని తగ్గించే దిశలో ఉద్దేశించబడింది. దీని అర్థం విద్యార్థులు తమ అభ్యసన; సమవయస్కుల అభ్యసన మదింపు బాధ్యతలు తీసుకోవాలి. ఒకరికొకరు సహాయం చేసుకోవాలి. ఆవిధంగా సహకార అభ్యసనం, జట్టుపని ఉపాధ్యాయునికి భారము తగ్గిస్తుంది.

> Self assessment is the first step to all assessment *-**Enhance Dreams***

10. సపిల్లలకు సంబంధించిన "ఉత్సుకత", "సహకారము", "సహనము", "ఏకాగ్రత", "ఆసక్తులు", "ప్రేరణ", "పరిసరాలతో ప్రతిచర్య" వంటి గుణాలను కొన్ని మాసాలుగా పరిశీలించి, "సమగ్రంగా" ఒక నిర్ణయానికి రాగలం. కాని వాటిని సాక్ష్యాధారాలతో చూపలేం. ఇవి పిల్లవాడి సమగ్ర మూర్తిమత్వాన్ని అవగాహన చేసుకోవడానికి, తద్వారా పిల్లవాడి పెరుగుదలకు తోడ్పడతాయి. ఇటువంటి అంశాలకు నియత పరీక్షలను నిర్వహించలేము.

5.5.2. నిరంతర సమగ్ర మూల్యాంకనంలో ప్రధానంగా రెండు రకాలైన మదింపునకు ప్రాధాన్యత ఉంటుంది.

1. నిర్మాణాత్మక మదింపు: బోధన ప్రక్రియ జరుగుతున్న సందర్భంలో పిల్లల భావన అవగాహనను, సాధనను నిరంతరంగా మదింపు చేయడానికి తోడ్పడేదే నిర్మాణాత్మక మదింపు. నిర్మాణాత్మక మదింపు ఉద్దేశ్యము సాధనను మార్కులు లేదా గ్రేడుల రూపంలో పరీక్షించుట కాకుండా విద్యార్థికి పరిపుష్టినివ్వడానికి ఉపయోగపడేది. కనుక బోధనాప్రక్రియలో నిరంతరం అంతర్భాగంగా ఉండేదే నిర్మాణాత్మక మదింపు.

2. సంగ్రహణాత్మక మదింపు: సంగ్రహణాత్మక మదింపు అనేది విద్యార్థి కొంత అభ్యసనను పూర్తి చేసుకొన్న తర్వాత సాధనను కొలవడానికి ఉపయోగపడుతుంది. దీనిని మార్కులు లేదా గ్రేడుల రూపంలో కొలుస్తారు. విషయాంశానికి సంబంధించిన జ్ఞానము,నైపుణ్యాల మదింపుపై దృష్టి పెడుతుంది. ఆ విధంగా బోధన చివర పూర్తిస్థాయిలో మదింపును తయారు చేయడమే సంగ్రహణాత్మక మూల్యాంకనం.

> When the cook tastes the soup, that's formative. When the guests taste the soup, that's summative. *-**R. Stake***

5.5.3 గణితంలో మదింపు సాధనాలు
(Assessment tools in Mathematics)

- **నిర్మాణాత్మక మదింపు సాధనాలు**
  - పరిశీలనలు
  - సాధనా పరీక్ష
  - లోప నిర్ధారణ పరీక్ష
  - చెక్–లిస్ట్
  - K-W-L
  - వర్క్ షీట్స్
  - ఎగ్జిట్ కార్డ్
  - క్విజ్
  - పోర్ట్‌ఫోలియో
  - స్వయం మదింపు
  - సమ వయస్కుల మదింపు
- **సంగ్రహణాత్మక మదింపు సాధనాలు**
  - సాధనా పరీక్ష
  - నిష్పాదన కృత్యాలు
  - ప్రదర్శన
  - అంత్య ప్రదర్శన
  - పోర్ట్‌ఫోలియో పునఃసమీక్ష

5.6. మూల్యాంకనం – మార్కింగ్ లేదా గ్రేడింగ్, నివేదించుట, రికార్డుల నిర్వహణ– విద్యార్థులకు, తల్లిదండ్రులకు ఫలితాలను తెలియచేయుట

5.6.1. మూల్యాంకనం – మార్కింగ్ లేదా గ్రేడింగ్

సాంప్రదాయ మూల్యాంకన పద్ధతి ఇంచుమించు సంగ్రహణాత్మక మూల్యాంకనంతో సమానమే. అది యూనిట్, త్రైమాసిక, అర్ధ సంవత్సర, సంవత్సరాంత పరీక్షల రూపంలో ఉంటుంది. ఇవి ప్రధానంగా కొంత బోధన పూర్తి అయిన తరువాత ఆ బోధనాంశాల ప్రగతిపై దృష్టి పెట్టే పరీక్షలు. అందుకే అవి సంగ్రహణాత్మక పరీక్షలు ఎందుకంటే బోధన పూర్తియిన పిదప నిర్వహించబడేవి. జరుగుతున్న బోధనాభ్యసన ప్రక్రియలతో సంబంధం లేనివి. పిల్లల అభ్యసనానికి ఒక విలువ నిచ్చి నివేదిక రూపంలో పాఠశాలకి, పిల్లవాడికి, తల్లిదండ్రులకు పంపించడం జరుగుతుంది. సీసీఈ పద్ధతిలో ఈ సంగ్రహణాత్మక మూల్యాంకనంలో మార్పులు చేపట్టాల్సిన అవసరం ఉంది.

1. సంగ్రహణాత్మక మూల్యాంకనం అనేది ప్రతిమూడు నెలలకు చేపట్టాలి. కాని దీని విషయంలో అంతిమ నిర్ణయం ఉపాధ్యాయులచే చర్చించుకుని పాఠశాలస్థాయిలో తీసుకోవాలి. తరచు మూల్యాంకనం అనేదానిని నిరుత్సాహపరచాలి. ఎందుకంటే నిర్మాణాత్మక మదింపులో పిల్లవాడి అభ్యసనలో లోటుపాట్లు ఎప్పటికప్పుడు సరికాబడుతుంటాయి కాబట్టి.

2. మార్కులకు బదులుగా గ్రేడులకు ప్రాధాన్యతనివ్వాలి. మార్కులు తరుచుగా తప్పుడు తీర్పులకు, పోలికలకు దారితీస్తాయి. 70 మార్కులు పొందిన విద్యార్థికి, 77 మార్కులు పొందిన విద్యార్థికి మధ్య అవగాహనలో పెద్ద వ్యత్యాసం ఉండకపోవచ్చు గానీ ర్యాంకింగ్‌లో విభిన్నమైన రీతిలో గుర్తింపబడతాడు. ఒకే సమయం, కొద్ది ప్రశ్నలతో రేటింగ్ నిర్ధారించటం చాలా తప్పు అవుతుంది. ఉదాహరణకు ఒక విద్యార్థికి ఒక భావన పాక్షికంగా అవగాహన అయితే ఆ ప్రశ్నకు సమాధానం సరిగా రాయకపోవటం వల్ల సున్నామార్కులువస్తాయి. (చాలా వరకు, ఆ భావన అవగాహన అయినప్పటికి..)

కనుక గ్రేడుల పద్ధతిలో యివ్వటం ద్వారా పరిధి సూచించబడుతుంది కనుక కొంతవరకు ఉపయోగకరం. 5 పాయింట్ స్కేల్ (గ్రేడ్) (A^+, A, B, C, D)ల గురించి తర్వాత భాగంలో చర్చించుట జరిగింది.

5.6.2. మదింపు, మూల్యాంకనానికి సంబంధించి నివేదించుట రికార్డుల నిర్వహణ – విద్యార్థులకు, తల్లిదండ్రులకు ఫలితాలను తెలియజేయుట.

నిరంతర మదింపు అనేది అభ్యసన, బోధనాభివృద్ధికి ముఖ్యంగా తోడ్పడే సమాచారంగా భావించటం ద్వారా తరచుగా వాటిని అభ్యసన సాక్ష్యాల నమోదు (Recorded Evidence of all Learning)గా భావించవచ్చు. అంతే కాక, అవి ఉపాధ్యాయునికి తప్ప విద్యార్థులకు లేదా తల్లిదండ్రులకు అవసరం లేదు. కొన్ని అంశాలు మాత్రం ఉపాధ్యాయుడు తన వ్యక్తిగత రికార్డులో నమోదు చేసుకోవడం ద్వారా ఆయా సందర్భాలలో పిల్లల ప్రగతి మూల్యాంకనాన్ని పిల్లవాడికి, తల్లిదండ్రులకు, పాఠశాలకు నివేదించడానికి తోడ్పడుతుంది.

త్రైమాసిక రికార్డు (ఉపాధ్యాయుని సొంత రికార్డుకై)

విద్యార్థి పేరు	అభ్యసనా సాక్ష్యాలు						వ్యక్తిగత, సాంఘిక గుణాలు మరియు నైపుణ్యాలపై గుణాత్మక రిమార్కులు
	రాత పరీక్షలు	కృత్యాలు లేదా నియోజనాల నివేదికలు	సృజనాత్మక పని	ప్రాజెక్ట్ పని	క్షేత్ర పర్యటన నివేదిక		

అభ్యసన నైపుణ్యాలు: స్వతంత్రంగా నిర్వహించు పని; చురుకుదనం; ఇంటి పని పూర్తి; సమాచారాన్ని ఉపయోగించుకోవటం, ఇతరులతో సహకారం, తరగతిలో భాగస్వామ్యం; సమస్యాసాధన, గమ్యం ఏర్పాటు. వీటిలో కొన్నింటికి ప్రాధాన్యతను ఏర్పరచుకొని ఉపాధ్యాయులు పిల్లల నైపుణ్యాలను రికార్డు చేయాలి.

పిల్లల ప్రగతిని నివేదించుట: పిల్లల ప్రగతిని ఇతరులకు నివేదించుటకు సలహాపూర్వకమైన వ్యూహాలు ఈ దిగువ సూచించడమైనది. ఉపాధ్యాయుడు, పాఠశాల మాత్రమే అంతిమ నిర్ణయం తీసుకోవాలి.

1. ముందుగా వివరించినట్లుగా పిల్లల ప్రగతిని A^+, A, B, C, D గ్రేడులుగా వివిధ విషయాలలో సూచించాలి. ఇవి పిల్లల అభ్యసనం ప్రగతి ఏ పరిధి మధ్యలో ఉన్నాయో సూచిస్తాయి. (వివరంగా తదుపరి చర్చించబడింది).
2. గుణాత్మక వాక్యాలలో వివరాలను గ్రేడుతోపాటు ఇవ్వాలి. ఏ సందర్భంలో విద్యార్థికి సహాయం అవసరం; ఏ సందర్భంలో పోటీతత్వాన్ని ప్రదర్శించాడు వంటి వివరాలతో...
3. వివిధ అంశాలలో పిల్లల ప్రయత్నాలను (Efforts) 3-పాయింట్ స్కేల్‌పై రేటింగ్ యివ్వాలి. (వివరంగా తదుపరి చర్చించబడింది)
4. ఉపాధ్యాయుల సమూహం విద్యార్థి పట్ల ఏర్పరచుకొన్న సమగ్రమైన లేదా పూర్తి స్థాయిలో భావనను గుణాత్మక వాక్యాలలో ఇవ్వాలి.

మూర్తి మత్వానికి చెందిన అంశాల నమోదు, నివేదించుట: పిల్లల సాధారణ సామర్థ్యాలైన భాషా సామర్థ్యాలు, ఏకాగ్రతా సామర్థ్యాలు, వైవిధ్యతతో సమాధానాలు, ప్రేరణ, అభిరుచి, ఉత్సుకత వంటి వైఖరులను కొద్ది రోజుల లేదా కొద్ది వారాల పరిశీలన, కొన్ని కృత్యాల ఆధారంగా నిర్ణయించలేము. సామర్థ్యాలు, వైఖరులు నెమ్మది నెమ్మదిగా మార్పు చెందుతాయి. కొన్ని సందర్భాలలోఅవి సాక్షాత్కరించకపోవచ్చు. విద్యార్థి యొక్క మూర్తిమత్వానికి చెందిన అన్ని అంశాలు అన్ని సందర్భాలలో వెల్లడి కాకపోవచ్చు. చాలా సందర్భాలలో పిల్లలకు సంబంధించి రిపోర్ట్ కార్డ్స్‌లో నమోదుచేసిన అంశాలు తగిన సాక్ష్యాలు, చాలినంత ఆలోచనలు లేకుండా నమోదు చేసేవే. కనుక అవి తప్పుడు లేదా అర్థం లేని నిర్ణయాలు కావచ్చు.

వ్యక్తిగత, సాంఘిక గుణాలకు గ్రేడింగ్: వ్యక్తిగత, సాంఘిక గుణాలకు గ్రేడింగ్ కొన్నికొన్ని సందర్భాలలో ఇస్తున్నారు. కాని ఇది సరికాదు. ఎందుకంటే సహానుభూతి, సహాయపడటం వంటి గుణాలను ఖచ్చితంగా నిర్వచించలేం, గుర్తించలేం. అటువంటి వాటికి ఒకరికి 'ఎ' గ్రేడు, ఇంకొకరికి 'బి' గ్రేడ్ ఇవ్వడం వంటివి సమస్యకు దారితీయవచ్చు.

కాని ప్రతి విద్యార్థికి డైరీలో ఒక పేజీని ఉపాధ్యాయుడు కేటాయించడం ద్వారా ప్రత్యేకత సాధించిన విద్యార్థి గురించిన అంశాలు నమోదు చేసుకోవచ్చు. అలా చేయకపోతే దీర్ఘకాలంలో అతని ప్రత్యేకతను మరచిపోయే అవకాశముంది. ఈ విధంగా ప్రతి విద్యార్థి గురించి అందరి ఉపాధ్యాయుల డైరీలలో సమాచారం ఆధారంగా ఆ విద్యార్థి మూర్తిమత్వాన్ని సమగ్రంగా అంచనా వేయవచ్చు. ఈ సందర్భంలో సమవయస్కుల మదింపు కూడా తోడ్పడుతుంది. అది ఏ విధంగా అంటే దయ, సహకారం, ఉత్సుకత, స్పందించే తీరు వంటి అంశాల గురించి తోటి విద్యార్థులనడిగి రాతరూపంలో తీసుకొన్నపుడు వాటిని నివేదించవచ్చు. ఉపాధ్యాయుడు మూర్తిమత్వ అంశాలకు సంబంధించి విలువైన సమాచారం కనుగొనకపోతే నివేదికలో ఖాళీనుంచాలి.

గణితంలో ప్రగతి పత్ర నమోదు వివరం

అంశం/ఉపఅంశం (ఉదాహరణతో)	జ్ఞానం	అవగాహన	వినియోగం	రిమార్కులు/అభివృద్ధికి ప్రయత్నాలు/అభ్యసన అభివృద్ధి
పూర్ణ సంఖ్యలు 1. ఆవశ్యకత 2. నిత్యజీవిత అనుసంధానం 3. సంఖ్యారేఖపై సూచించడం	నిర్వచనాలు యదార్థాలు పద్ధతులు క్రమసూత్రం (Algorithm)	వివరణలు తార్కికత	ఇతర అంశాలతో నిత్యజీవితంలో వినియోగం	

గ్రేడ్ స్కేల్:

'డి' గ్రేడ్ : అంశంపట్ల ప్రాథమిక అవగాహన చాలా బలహీనంగా ఉంది. అభ్యసన మెరుగుకై మరింత సమయం, ఆసరా ఇవ్వాలి.

'సి' గ్రేడ్ : అంశం పట్ల ప్రాథమిక అవగాహన ఉంది కాని మరింత శ్రద్ధపెట్టవలసిన అవసరం ఉంది.

'బి' గ్రేడ్ : అంశం పట్ల తగిన అవగాహన కలిగి ఉన్నారు.

'ఎ' గ్రేడ్ : అంశం పట్ల మంచి అవగాహన కలిగి ఉన్నారు.

'ఎ$^+$' గ్రేడ్ : అంశం పట్ల అదనపు అభిరుచి, సృజన కలిగి ఉన్నారు.

ప్రయత్న స్కేలు (Effort Scale):

స్థాయి-1 : అత్యద్భుత ప్రయత్నం: మూల్యాంకన సమయంలో అత్యద్భుత ప్రయత్నం చేసియున్నారు.

స్థాయి-2 : సాధారణ ప్రయత్నం: మూల్యాంకన సమయంలో సాధారణ ప్రయత్నం చేసియున్నారు.

స్థాయి-3 : మరింత ప్రయత్నం అవసరం: ప్రేరణ ద్వారా మరింత ప్రయత్నం చేసేందుకు కృషి చేయాలి.

సామర్థ్యాలకు, వైఖరులకు ఏ విధమైన గ్రేడులు యివ్వాల్సిన అవసరం లేదు. ఉపాధ్యాయుని సాధారణ పరిశీలనలు నివేదించే సందర్భంలో నమోదు చేస్తే చాలు.

విద్యార్థికి పరిపుష్టిని అందజేయుట (<u>Giving feedback to the child</u>): విద్యార్థికి పరిపుష్టిని తగుజాగ్రత్తగా, నిర్మాణాత్మక వైఖరితో ఉపాధ్యాయుడు అందచేయాలి. సానుకూల దృక్పథంతో సాగాలి. అది అతని అహాన్ని, స్వీయ ప్రతిభను కించపరిచేదిగా ఉండరాదు. ఇతరులతో కన్నా తనతో తాను పోటీ పడే విధంగా సూచించాలి. "నిన్న ఎక్కడున్నాను, వారం క్రితం ఎక్కడున్నాను? నేటి నా పరిస్థితి" తెలుసుకొనేలా ఉండాలి. పిల్లల మధ్యపోలికలు తాము తక్కువ అనే భావనని కల్గిస్తాయి. అదే సమయంలో ఒకరిని ఇతరులతో పోల్చి 'బాగు' అనడం కూడా అతని అహం పెంచేదిగాను, దానిని నిలబెట్టుకోవడానికి, ఒత్తిడికి గురిచేసేదిగానూ ఉంటుంది. ఏదైనా అభ్యసనలో వెలితిని గుర్తిస్తే వ్యక్తిగతంగా పిలిచి, నమ్రతతో వివరిస్తే బాగుంటుంది. పిల్లలు, పెద్దల వలె సవరించుకోవటానికి అంగీకరిస్తారు.అయితే తమ బాహ్య ఆదరణ (Public Image) పట్ల కూడా అంతే ప్రాముఖ్యతను ఇస్తారు.

తల్లిదండ్రులు, సంరక్షకులతో పంచుకోవాల్సిన అంశాలు: తమపిల్లలు పాఠశాలలో ఎలా ఉన్నారు. ఏమి చేస్తున్నారో తెలుసుకునే ఉత్సుకతని తల్లిదండ్రులు కలిగిఉంటారు. తలిదండ్రులకు ఉపాధ్యాయులు తమ పిల్లల ప్రగతిని గురించి "ఇంకను బాగా చేయాలి", "బాగుంది", "బాగాలేదు", "మరింత ప్రయత్నం పెట్టాలి" వంటి అంశాలతో నివేదికలు పంపిస్తారు. కాని అవి తమ పిల్లలు ఏమి చేయగలరు, ఏమి నేర్చుకొన్నారు అనే అంశాలపై పూర్తి సమాచారాన్ని ఇవ్వవు. ఇవి తమ పిల్లల ప్రగతిని గూర్చి తప్పుడు అభిప్రాయాలు కూడా కల్పిస్తాయి. పిల్లల సమస్యలు లేదా బలాల అవగాహనకు తల్లిదండ్రులకు అవకాశమివ్వని ఈ గ్రేడింగ్ పిల్లలకు ఏవిధంగానూ సహాయపడదు. ఉపాధ్యాయుడు సరళభాషలో వివరాలు ఈ దిగువ విధంగా ఇస్తే ఉపయోగం.

1. పిల్లవాడు ఏమిచేయగలడు, ఏ సందర్భంలో సహాయం అవసరం? అది ఏ రూపంలో ఇవ్వాలి?
2. పిల్లవాడు ఏం చేయడానికి, లేదా చేయకపోవడానికి ఇష్టపడుతున్నాడు.
3. పిల్లవాడు చేసిన అత్యద్భుత ప్రదర్శన, మంచి ప్రయత్నాలు, విజయగాథలను తల్లిదండ్రులకు సూచించాలి.
4. పిల్లవాడి సహకారం, బాధ్యతాయుత ప్రవర్తన, సునిశితత్వం, అభిరుచులు వంటి వాటి గురించి ఆశావహ దృక్పథంతో మాట్లాడాలి.
5. పిల్లవాడిని ఇంటి వద్ద పరిశీలించిన అంశాలు, వారు ఏ విధంగా సహాయపడగలరు వంటి వాటి గురించి మాట్లాడటం ద్వారా పిల్లల అభ్యసనకు ఉపాధ్యాయునికి సహాయపడుతుంది.

సూచించబడిన ప్రాజెక్టులు/కృత్యాలు:

1. ఏదైనా ప్రాథమికోన్నత తరగతి గణిత పాఠ్యాంశాన్ని తీసుకొని దాని నుంచి భావనల అవగాహన సామర్థ్యాలను మదింపు చేయడానికి ఉపయోగపడే విధంగా కనీసం 5 కృత్యాలు లేదా సమస్యాసాధన ప్రశ్నలు తయారు చేయండి. ఒక కృత్యానికి సంబంధించి మదింపుచేయడానికి తగిన రూబ్రిక్‌ని తయారు చేయండి.
2. ఈ కోర్సుకాలంలో చేసిన పనిని అంతా సూచించేలా పోర్ట్‌ఫోలియో తయారు చేయండి. దాని ఉద్దేశాలకు సంబంధించి మార్గదర్శకాలతో, ఆ పోర్ట్‌ఫోలియోలో ఉంచే అంశాలేమిటి? దాన్ని ఏ విధంగా రేటింగ్ చేస్తారు?
3. తరగతి గది పరిశీలనలో భాగంగా గణితపరంగా చేసిన పని (శాబ్దిక, రాతపూర్వకంగా) సేకరించండి. శాబ్దిక సంకేతాలు, రాతపూర్వక అంశాలను కెమెరానుపయోగించి సేకరించి, అందుండి విద్యార్థులకు గల తప్పు అవగాహన అంశాలను గుర్తించండి.
4. 6 నుంచి 8 తరగతులలో ఏదైనా విషయాంశం తీసుకొని నిర్మాణాత్మక, సంగ్రహణాత్మక మదింపుల మధ్య భేదాన్ని సోదాహరణగా వివరించే కృత్యాన్ని చేపట్టండి.
5. ఏదైనా పాఠ్యాంశానికి సంబంధించిన తప్పు అవగాహనలను (Misconceptions) గుర్తించి వాటికి లోపనిర్ధారణ (Diagonstic) పరీక్షను తయారుచేయండి.

వ్యాసరూప ప్రశ్నలు:

1. సాధనా పరీక్షలో సోపానాలు పేర్కొని, ఏదైనా ఒక యూనిట్‌కి ఈ సోపానాలననుసరించి సాధనా పరీక్షా పత్రాన్ని తయారుచేయండి.
2. లోప నిర్ధారణ పరీక్షలో సోపానాలు పేర్కొని, ఏదైనా సమస్యకు లోప నిర్థారణ పరీక్ష తయారు చేయండి.
3. నిరంతర సమగ్ర మూల్యాంకనంలోని వివిధ అంశాల గురించి సవివరంగా చర్చించండి.
4. భావనల అవగాహన, గణిత వివేచనా సామర్థ్యం, సమస్యాసాధన అంశాలను ఏ విధంగా మదింపు చేయాలి?
5. మూల్యాంకనాంశాలను నివేదికల రూపంలో ఏవిధంగా సూచించాలి? విద్యార్థులకు, తల్లిదండ్రులకు ఫలితాలను తెలియజేయుటలో అనుసరించాల్సిన సోపానాలు ఏవి?

సంక్షిప్త సమాధాన ప్రశ్నలు:

1. విషయ నిష్ఠ ప్రశ్నలలో రకాలను సంక్షిప్తంగా వివరించండి.
2. రూబ్రిక్ అనగానేమి?
3. పోర్ట్‌ఫోలియో అనగానేమి?
4. నిర్మాణాత్మక మదింపు అనగానేమి?
5. సంగ్రహణాత్మక మదింపు అనగానేమి?
6. గ్రేడింగ్ గురించి వివరించండి.
7. నిర్మాణాత్మక మదింపు సాధనాలు పేర్కొనండి.
8. సంగ్రహణాత్మక మదింపు సాధనాలు పేర్కొనండి.

సంప్రదింపు గ్రంథాలు

1. SCERT, Karnataka, D.El.Ed. Source Book 1st Year (Mathematics)
2. SCERT, Karnataka, D.El.Ed. Source Book 2nd Year (Mathematics)
3. NCERT, New Delhi CCE Exemplar Package for the Upper Primary Stage (Mathematics)
4. Quotations from Internet on "Assessment"
5. SCERT, AP, Continuous Comprehensive Evaluation Module
6. SCERT, AP, నిరంతర సమగ్ర మూల్యాంకనం – మాదిరి ప్రశ్నా పత్రాలు

GRK